Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 121–132

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 121–132

АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЙМОВІРНОСТІ НЕБАНКРУТСТВА В МОДЕЛІ РИЗИКУ З ДОДАТКОВИМИ НАДХОДЖЕННЯМИ КОШТІВ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА, О. Ю. РАГУЛІНА І О. М. СТРОЄВ

Анотація. Розглядається модель ризику, яка узагальнює класичну, коли в момент надходження кожної вимоги страхова компанія залучає додаткові кошти. Досліджуються властивості неперервності й диференційовності ймовірності небанкрутства на нескінченному інтервалі часу та виводиться інтегро-диференціальне рівняння для цієї функції. Знаходиться точний розв'язок цього рівняння у випадку експоненціально розподілених розмірів вимог і додаткових коштів.

Abstract. We consider a risk model, which generalizes the classical one, when an insurance company gets additional funds whenever a claim arrives. We investigate continuity and differentiability of the infinite-horizon survival probability and derive an integro-differential equation for this function. We find the closed form solution of this equation in the case when claim sizes and additional funds are exponentially distributed.

Аннотация. Рассматривается модель риска, которая обобщает классическую, когда в момент поступления каждого требования страховая компания привлекает дополнительные средства. Исследуются свойства непрерывности и дифференцируемости вероятности неразорения на бесконечном интервале времени и выводится интегро-дифференциальное уравнение для этой функции. Находится точное решение этого уравнения в случае экспоненциально распределенных величин требований и дополнительных средств.

1. Вступ

Нехай усі об'єкти, що використовуються далі, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Розглядається модель ризику з неперервним часом, яка узагальнює класичну.

У класичній моделі ризику припускається (див., наприклад, [1, 2, 3, 4]), що страхова компанія має початковий капітал $x \geq 0$ та отримує премії від клієнтів зі сталою інтенсивністю $c > 0$. Розміри страхових вимог, що надходять до компанії, утворюють послідовність $(\xi_i)_{i\geq 1}$ невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F_1(y) = \mathsf{P}[\xi_i \leq y]$ і скінченним математичним сподіванням $\mathsf{E}[\xi_i] = \mu_1$. Момент надходження i-ї вимоги позначимо через τ_i. Покладемо $\tau_0 = 0$. Кількість вимог, що надійшли на інтервалі часу $[0, t]$, описується однорідним пуассонівським процесом $(N_t)_{t\geq 0}$ з інтенсивністю $\lambda > 0$.

На відміну від класичної моделі ризику, ми припускаємо, що в момент τ_i надходження i-ї вимоги страхова компанія залучає додаткові кошти в розмірі η_i, які можна інтерпретувати, наприклад, як кошти від інвестування неосновного капіталу або як додатковий прибуток. Вважаємо, що $(\eta_i)_{i\geq 1}$ є послідовністю невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B30, Secondary 60G51.
Ключові слова і фрази. Модель ризику, імовірність небанкрутства, неперервність і диференційовність, інтегро-диференціальне рівняння.

$F_2(y) = \mathsf{P}[\eta_i \le y]$ і скінченним математичним сподіванням $\mathsf{E}[\eta_i] = \mu_2$. Окрім того, припускаємо, що послідовності $(\xi_i)_{i\ge1}$, $(\eta_i)_{i\ge1}$ і процес $(N_t)_{t\ge0}$ є незалежними. Позначимо $\zeta_i = \eta_i - \xi_i$, $i \ge 1$.

Нехай $X_t(x)$ — капітал страхової компанії в момент часу t за умови, що її початковий капітал дорівнює x. Тоді за зроблених вище припущень

$$X_t(x) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i - \eta_i), \qquad t \ge 0. \tag{1}$$

Зауважимо, що тут і далі всі суми, в яких верхній індекс підсумовування менший за нижній, дорівнюють нулеві. Зокрема, в (1) маємо $\sum_{i=1}^{0}(\xi_i - \eta_i) = 0$, якщо $N_t = 0$.

Імовірність банкрутства страхової компанії на нескінченному інтервалі часу як функція початкового капіталу визначається для всіх $x \ge 0$ рівністю

$$\psi(x) = \mathsf{P}\big[\inf_{t\ge0}\ X_t(x) < 0\big].$$

Відповідна ймовірність небанкрутства на нескінченному інтервалі часу дорівнює

$$\varphi(x) = 1 - \psi(x).$$

Легко бачити, що функція $\psi(x)$ є незростаючою, а функція $\varphi(x)$ є неспадною. Проте такі властивості $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ як диференційовність або навіть неперервність не є очевидними і не випливають із визначення цих функцій. Виявляється, що ці функції не завжди є диференційовними для всіх $x \ge 0$. Більш того, як свідчать результати роботи [5], у деяких моделях за певних умов $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ можуть бути розривними.

Дослідження властивостей неперервності й диференційовності ймовірностей банкрутства (небанкрутства) необхідне, перш за все, для виведення інтегро-диференціальних рівнянь для цих функцій, які в свою чергу використовуються при знаходженні точних або наближених виразів, дослідженні асимптотичної поведінки, побудові оцінок, розв'язанні оптимізаційних задач тощо. Зазначимо, що детальному дослідженню властивостей неперервності й диференційовності ймовірностей небанкрутства в різних моделях ризику присвячені роботи [6, 7, 8, 9]. Окрім того, це питання розглядалося в [1] для класичної моделі ризику, але при цьому використовувалися інші методи. Відзначимо також, що взагалі однорідні процеси з незалежними приростами та від'ємними стрибками досліджувалися, наприклад, у [10, 11].

Далі стаття побудована таким чином. У розділі 2 наводяться деякі допоміжні результати. У розділі 3 досліджуються властивості неперервності й диференційовності ймовірності небанкрутства в моделі, що розглядається, а також виводиться інтегро-диференціальне рівняння для цієї функції. У розділі 4 розглядається випадок, коли випадкові величини ξ_i і η_i, $i \ge 1$, експоненціально розподілені.

Далі припускатимемо, що виконуються умови $\mathsf{P}[\xi_i - \eta_i > 0] > 0$ і $\mathsf{P}[\xi_i - \eta_i < 0] > 0$. Дійсно, випадки $\mathsf{P}[\xi_i - \eta_i \le 0] = 1$ і $\mathsf{P}[\xi_i - \eta_i \ge 0] = 1$ є тривіальними: у першому з них банкрутство не відбудеться ніколи, а другий зводиться до класичної моделі ризику.

2. Допоміжні результати

Лема 2.1. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю* (1).

(i) *Якщо* $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 \le 0$, *то* $\varphi(x) = 0$ *для всіх* $x \ge 0$.
(ii) *Якщо* $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, *то* $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$.

Для доведення цієї леми нам знадобиться наступна теорема для випадкових блукань.

Теорема 2.1 ([1, теорема 6.3.1, с. 233]). *Нехай* $(\tilde{\zeta}_i)_{i\geq 1}$ — *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, таких що* $\mathsf{P}[\tilde{\zeta}_i > 0] > 0$, $\mathsf{P}[\tilde{\zeta}_i < 0] > 0$ *і* $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] < \infty$. *Визначимо послідовність* $(S_n)_{n\geq 1}$ *таким чином:* $S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_i$.

(i) *Якщо* $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] > 0$, *то* $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\big] = 1$.

(ii) *Якщо* $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] < 0$, *то* $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty\big] = 1$.

(iii) *Якщо* $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] = 0$, *то* $\mathsf{P}\big[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\big] = 1$ *і* $\mathsf{P}\big[\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\big] = 1$.

Зауважимо, що доведення цієї теореми в перших двох випадках є досить простим. Дійсно, з огляду на посилений закон великих чисел $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i]\big] = 1$. Звідси маємо $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\big] = 1$ при $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] > 0$ і $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty\big] = 1$ при $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] < 0$. Випадок $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] = 0$ є набагато складнішим і розглядається в [1].

Доведення леми 2.1. Проведемо міркування аналогічні до тих, що наведені в [1, с. 153, 162] для класичної моделі ризику. Введемо випадкові величини

$$\tilde{\zeta}_i = \xi_i - \eta_i - c(\tau_i - \tau_{i-1}), \qquad i \geq 1.$$

Зазначимо, що випадкові величини $\tilde{\zeta}_i$ задовольняють умови теореми 2.1 і $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] = \mu_1 - \mu_2 - c/\lambda$.

Нехай $S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_i$ і $M = \sup_{t\geq 0}\big(\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i - \eta_i) - ct\big)$. Легко бачити, що M можна також записати у вигляді $M = \sup_{n\geq 1} S_n$. Звідси випливає, що

$$\psi(x) = \mathsf{P}[M > x]. \tag{2}$$

Якщо $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 \leq 0$, то $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] \geq 0$ і $\mathsf{P}\big[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\big] = 1$ внаслідок теореми 2.1. Отже, з огляду на (2) для всіх $x \geq 0$ отримуємо $\psi(x) = 1$, що еквівалентно $\varphi(x) = 0$.

Якщо $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, то $\mathsf{E}[\tilde{\zeta}_i] < 0$ і $\mathsf{P}\big[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty\big] = 1$ внаслідок теореми 2.1. Тому $\mathsf{P}[M < \infty] = 1$, звідки з огляду на (2) маємо $\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = 0$, що еквівалентно $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$. Лему доведено. □

Зауваження 2.1. Умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$ є аналогом умови додатності прибутку в класичній моделі ризику. Вона означає, що в середньому компанія збирає більше премій, аніж виплачує за вимогами.

Нагадаємо, що ми позначили $\zeta_i = \eta_i - \xi_i$, $i \geq 1$. Очевидно, що $(\zeta_i)_{i\geq 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Позначимо їхню функцію розподілу через $F(y)$. Введемо також функції розподілів $G_1(y)$ і $G_2(y)$ таким чином: $G_1(y)$ — функція розподілу випадкової величини ζ_i за умови, що $\zeta_i \geq 0$; $G_2(y)$ — функція розподілу випадкової величини $-\zeta_i$ за умови, що $-\zeta_i > 0$.

Лема 2.2. *За зроблених вище припущень маємо*

$$F(y) = \int_{(-y\vee 0)_-}^{+\infty} F_2(y+u)\, dF_1(u), \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$G_1(y) = \begin{cases} \frac{F(y)-F(0_-)}{1-F(0_-)}, & y \geq 0,\\ 0, & y < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$G_2(y) = \begin{cases} \frac{F(0_-)-F((-y)_-)}{F(0_-)}, & y \geq 0,\\ 0, & y < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Зауважимо, що тут і далі запис $F(y_-)$ означає границю зліва функції розподілу в точці y, а запис y_- на нижній межі інтегрування означає інтегрування по інтервалу, який містить лівий окіл точки y, а радіус цього околу прямує до нуля.

Доведення. Для всіх $y \in \mathbb{R}$ маємо

$$F(y) = \mathsf{P}[\zeta_i \le y] = \mathsf{P}[\eta_i \le \xi_i + y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y+u} dF_2(v)\, dF_1(u)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(y+u)\, dF_1(u) = \int_{(-y\vee 0)_-}^{+\infty} F_2(y+u)\, dF_1(u),$$

що доводить (3). Зазначимо, що при останньому переході ми використали невід'ємність випадкових величин ξ_i і η_i.

Далі, оскільки $G_1(y) = \mathsf{P}\left[\zeta_i \le y \;/\; \zeta_i \ge 0\right]$ і $G_2(y) = \mathsf{P}\left[-\zeta_i \le y \;/\; -\zeta_i > 0\right]$, то $G_1(y) = 0$ і $G_2(y) = 0$ для всіх $y < 0$. Для всіх $y \ge 0$ маємо

$$G_1(y) = \frac{\mathsf{P}[0 \le \zeta_i \le y]}{\mathsf{P}[\zeta_i \ge 0]} = \frac{F(y) - F(0_-)}{1 - F(0_-)},$$

$$G_2(y) = \frac{\mathsf{P}[0 < -\zeta_i \le y]}{\mathsf{P}[-\zeta_i > 0]} = \frac{\mathsf{P}[-y \le -\zeta_i < 0]}{\mathsf{P}[\zeta_i < 0]} = \frac{F(0_-) - F((-y)_-)}{F(0_-)}.$$

Лему доведено. □

Лема 2.3. *Процес* $\big(X_t(x)\big)_{t\ge 0}$, *заданий рівністю* (1), *може бути зображений у вигляді*

$$X_t(x) = x + ct + \sum_{i=1}^{N_t^+} \zeta_i^+ - \sum_{i=1}^{N_t^-} \zeta_i^-, \qquad t \ge 0, \tag{6}$$

де $(N_t^+)_{t\ge 0}$ *і* $(N_t^-)_{t\ge 0}$ *— однорідні пуассонівські процеси з інтенсивностями*

$$\lambda\big(1 - F(0_-)\big)$$

і $\lambda F(0_-)$ *відповідно,* $(\zeta_i^+)_{i\ge 1}$ *і* $(\zeta_i^-)_{i\ge 1}$ *— послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин з функціями розподілів* $G_1(y)$ *і* $G_2(y)$, *які задані рівностями* (4) *і* (5), *відповідно; усі випадкові величини і процеси у правій частині рівності* (6) *незалежні.*

Доведення. Проведемо процедуру проріджування процесу $(N_t)_{t\ge 0}$ таким чином, що залишимо тільки невід'ємні ζ_i, $i \ge 1$. Внаслідок такого проріджування отримаємо нову послідовність випадкових величин $(\zeta_i^+)_{i\ge 1}$ і новий процес $(N_t^+)_{t\ge 0}$. Очевидно, що $(\zeta_i^+)_{i\ge 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $G_1(y)$. Процес $(N_t^+)_{t\ge 0}$ є однорідним пуассонівським з інтенсивністю $\lambda\,\mathsf{P}[\zeta_i \ge 0]$ (див., наприклад, задачу 5 у [12, с. 234]) і не залежить від послідовності $(\zeta_i^+)_{i\ge 1}$. Зазначимо, що $\lambda\,\mathsf{P}[\zeta_i \ge 0] = \lambda\big(1 - F(0_-)\big)$.

Аналогічно проведемо процедуру проріджування процесу $(N_t)_{t\ge 0}$ таким чином, що залишимо тільки від'ємні ζ_i, $i \ge 1$, і візьмемо їх з протилежним знаком. Внаслідок такого проріджування отримаємо нову послідовність випадкових величин $(\zeta_i^-)_{i\ge 1}$ і новий процес $(N_t^-)_{t\ge 0}$. Легко бачити, що $(\zeta_i^-)_{i\ge 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $G_2(y)$. Процес $(N_t^-)_{t\ge 0}$ є однорідним пуассонівським з інтенсивністю $\lambda\,\mathsf{P}[\zeta_i < 0]$ і не залежить від послідовності $(\zeta_i^-)_{i\ge 1}$. Окрім того, $\lambda\,\mathsf{P}[\zeta_i < 0] = \lambda F(0_-)$.

Зрозуміло, що кожна випадкова величина ζ_i, $i \ge 1$, залишиться тільки при одній процедурі проріджування з двох описаних вище. Тому

$$-\sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \eta_i) = \sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i = \sum_{i=1}^{N_t^+} \zeta_i^+ - \sum_{i=1}^{N_t^-} \zeta_i^-, \qquad t \ge 0,$$

причому $(\zeta_i^+)_{i\ge 1}$, $(\zeta_i^-)_{i\ge 1}$, $(N_t^+)_{t\ge 0}$, $(N_t^-)_{t\ge 0}$ є незалежними внаслідок незалежності $(\zeta_i)_{i\ge 1}$ і $(N_t)_{t\ge 0}$. Лему доведено. □

3. Інтегро-диференціальне рівняння для ймовірності небанкрутства

Позначимо $\lambda_1 = \lambda\big(1 - F(0_-)\big)$ і $\lambda_2 = \lambda F(0_-)$. Зауважимо, що $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$.

Теорема 3.1. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю* (1).

(1) *Функція $\varphi(x)$ неперервна на інтервалі $[0, +\infty)$.*

(2) *Нехай, окрім того, виконується умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$. Тоді*

  (i) *функція $\varphi(x)$ є неперервно диференційовною в усіх точках інтервалу $[0, +\infty)$, окрім точок розриву функції $G_2(y)$;*

  (ii) *якщо $x > 0$ — точка розриву функції $G_2(y)$ і $G_2(x) - G_2(x_-) = p$, то $\varphi(x)$ має в цій точці лівобічну й правобічну похідні $\varphi'_-(x)$ і $\varphi'_+(x)$, причому*

$$\varphi'_-(x) - \varphi'_+(x) = \frac{\lambda_2 p \varphi(0)}{c} > 0; \tag{7}$$

  (iii) *$\varphi(x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння*

$$c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - \lambda_1 \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dG_1(y) - \lambda_2 \int_0^x \varphi(x-y)\, dG_2(y) \tag{8}$$

на інтервалі $[0, +\infty)$ з граничною умовою $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$ (у точках розриву $G_2(y)$ ми маємо на увазі правобічну похідну $\varphi(x)$).

Доведення. Доведення проводитимемо за тією ж схемою, що і в роботах [6, 7, 8], і використовуватимемо зображення (6) процесу $\big(X_t(x)\big)_{t\geq 0}$.

Нехай перший стрибок процесу $(N_t)_{t\geq 0}$ відбувається в момент часу $\tau_1 = s$ і $|\zeta_1| = y$. До моменту часу τ_1 банкрутство не настане, а після цього моменту воно не відбудеться тоді й тільки тоді, коли виконується одна з двох умов:

- у момент часу τ_1 відбувається перший стрибок процесу $(N_t^+)_{t\geq 0}$ (імовірність цієї події дорівнює λ_1/λ) і банкрутство не настане на інтервалі часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $x + cs + y$;
- у момент часу τ_1 відбувається перший стрибок процесу $(N_t^-)_{t\geq 0}$ (імовірність цієї події дорівнює λ_2/λ) і банкрутство не настане на інтервалі часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $x + cs - y$.

Оскільки випадкова величина τ_1 має показниковий розподіл з параметром λ, то за формулою повної ймовірності для всіх $x \geq 0$ маємо

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \bigg(\lambda_1 \int_0^{+\infty} &\varphi(x+cs+y)\, dG_1(y) \\ &+ \lambda_2 \int_0^{x+cs} \varphi(x+cs-y)\, dG_2(y)\bigg)\, ds.\end{aligned} \tag{9}$$

Після заміни змінної інтегрування $x + cs = u$ у зовнішньому інтегралі в правій частині (9) отримаємо

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \frac{e^{\lambda x/c}}{c} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda u/c} \bigg(\lambda_1 \int_0^{+\infty} &\varphi(u+y)\, dG_1(y) \\ &+ \lambda_2 \int_0^u \varphi(u-y)\, dG_2(y)\bigg)\, du.\end{aligned} \tag{10}$$

Оскільки внутрішні інтеграли в правій частині (10) є неспадними й обмеженими функціями змінної u, то підінтегральна функція в зовнішньому інтегралі є інтегровною на інтервалі $[0, +\infty)$. Отже, $\varphi(x)$ неперервна на $[0, +\infty)$.

Згідно з теоремою Лебега про розклад неспадної функції запишемо $G_2(y)$ у вигляді $G_2(y) = G_2^c(y) + G_2^d(y)$, де $G_2^c(y)$ і $G_2^d(y)$ — неперервна й дискретна компоненти $G_2(y)$ відповідно. Нехай $(y_k)_{k\geq 1}$ — послідовність усіх точок розриву (якщо такі існують) функції $G_2(y)$. Як відомо, множина таких точок є не більш ніж зліченною. Позначимо $p_k = G_2(y_k) - G_2((y_k)_-)$. Тоді (10) можна переписати у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{11}$$

де

$$\varphi_1(x) = \frac{e^{\lambda x/c}}{c} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda u/c} \big(\lambda_1 I_1(u) + \lambda_2 I_2(u)\big)\, du, \tag{12}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{e^{\lambda x/c}}{c} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda u/c} \left(\lambda_2 \sum_{k:\ y_k \le u} p_k \varphi(u - y_k)\right) du, \tag{13}$$

$$I_1(u) = \int_0^{+\infty} \varphi(u + y)\, dG_1(y),$$

$$I_2(u) = \int_0^{u} \varphi(u - y)\, dG_2^c(y).$$

Покажемо неперервність функції $I_2(u)$ зліва на інтервалі $(0, +\infty)$. Візьмемо довільну точку $u_0 > 0$. При $u \le u_0$ маємо

$$I_2(u_0) - I_2(u) = \int_0^{u} \big(\varphi(u_0 - y) - \varphi(u - y)\big)\, dG_2^c(y) + \int_u^{u_0} \varphi(u_0 - y)\, dG_2^c(y). \tag{14}$$

Очевидно, що

$$0 \le \lim_{u \uparrow u_0} \int_u^{u_0} \varphi(u_0 - y)\, dG_2^c(y) \le \lim_{u \uparrow u_0} \big(G_2^c(u_0) - G_2^c(u)\big) = 0. \tag{15}$$

Оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна на інтервалі $[0, u_0]$, то за теоремою Кантора вона рівномірно неперервна на цьому інтервалі. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке що при $|(u_0 - y) - (u - y)| < \delta$, $u \in [0, u_0]$, $y \in [0, u]$, виконується $|\varphi(u_0 - y) - \varphi(u - y)| < \varepsilon$. Звідси при $|u_0 - u| < \delta$ маємо

$$\left| \int_0^{u} \big(\varphi(u_0 - y) - \varphi(u - y)\big)\, dG_2^c(y) \right| < \varepsilon G_2^c(u_0) \le \varepsilon. \tag{16}$$

З (14)–(16) випливає неперервність функції $I_2(u)$ зліва в довільній точці $u_0 > 0$.

Неперервність справа функції $I_2(u)$ на інтервалі $[0, +\infty)$ доводиться аналогічно з тією відмінністю, що при $u \ge u_0$ маємо

$$I_2(u) - I_2(u_0) = \int_0^{u_0} \big(\varphi(u - y) - \varphi(u_0 - y)\big)\, dG_2^c(y) + \int_{u_0}^{u} \varphi(u - y)\, dG_2^c(y).$$

Неперервність функції $I_1(u)$ на інтервалі $[0, +\infty)$ випливає з того, що для всіх $u \ge 0$, $u_0 \ge 0$ та довільного числа $L > 0$ виконується

$$\begin{aligned} \big|I_1(u) - I_1(u_0)\big| &\le \int_0^{+\infty} \big|\varphi(u + y) - \varphi(u_0 + y)\big|\, dG_1(y) \\ &\le \big(1 - G_1(L)\big) + \sup_{y \in [0, L]} \big|\varphi(u + y) - \varphi(u_0 + y)\big|. \end{aligned}$$

Тому можна спочатку вибором досить великого L зробити доданок $1 - G_1(L)$ як завгодно малим, а потім зробити другий доданок досить малим при u близьких до u_0.

Отже, підінтегральна функція в правій частині (12) неперервна на $[0, +\infty)$, тому $\varphi_1(x)$ є диференційовною на цьому інтервалі та

$$\varphi_1'(x) = \frac{\lambda}{c} \varphi_1(x) - \frac{\lambda_1 I_1(x) + \lambda_2 I_2(x)}{c}. \tag{17}$$

Оскільки підінтегральна функція в правій частині (13) є неперервною справа на $[0,+\infty)$, то існує правобічна похідна функції $\varphi_2(x)$ на цьому інтервалі (позначимо її через $\big(\varphi_2(x)\big)'_+$) і

$$\big(\varphi_2(x)\big)'_+ = \frac{\lambda}{c}\varphi_2(x) - \frac{\lambda_2}{c}\sum_{k:\ y_k\le x} p_k\varphi(x-y_k). \tag{18}$$

Оскільки значення інтеграла не залежить від значення підінтегральної функції у зліченній кількості точок, то (13) можна записати у вигляді

$$\varphi_2(x) = \frac{e^{\lambda x/c}}{c}\int_x^{+\infty} e^{-\lambda u/c}\left(\lambda_2\sum_{k:\ y_k<u} p_k\varphi(u-y_k)\right)du. \tag{19}$$

Підінтегральна функція в правій частині (19) є неперервною зліва на $(0,+\infty)$, тому існує лівобічна похідна функції $\varphi_2(x)$ на цьому інтервалі (позначимо її через $\big(\varphi_2(x)\big)'_-$) і

$$\big(\varphi_2(x)\big)'_- = \frac{\lambda}{c}\varphi_2(x) - \frac{\lambda_2}{c}\sum_{k:\ y_k< x} p_k\varphi(x-y_k). \tag{20}$$

Беручи до уваги (18) і (20), отримаємо

$$\big(\varphi_2(x)\big)'_- - \big(\varphi_2(x)\big)'_+ = \frac{\lambda_2 p_k\varphi(0)\mathbb{I}_{\{x=y_k\}}}{c}, \tag{21}$$

де $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ — індикатор множини.

Оскільки $c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2>0$, то $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ внаслідок леми 2.1. Тоді з рівності (9) випливає, що $\varphi(0)>0$. Дійсно, оскільки $\varphi(x)$ неперервна на $[0,+\infty)$ і $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$, то підставивши $x=0$ у (9) маємо: підінтегральна функція в зовнішньому інтегралі є строго додатною принаймні починаючи з деякого $s>0$. Отже, права частина (9) є додатною при $x=0$. Звідси маємо $\varphi(0)>0$. У цьому разі з (21) випливає, що функція $\varphi_2(x)$ є диференційовною у всіх точках інтервалу $[0,+\infty)$, окрім точок y_k, $k\ge 1$. Беручи до уваги (11), маємо, що $\varphi(x)$ також є диференційовною у всіх точках інтервалу $[0,+\infty)$, окрім точок розриву функції $G_2(y)$, і виконується (7). Більш того, з (11), (17), (18) отримаємо

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\lambda}{c}\big(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\big) - \frac{\lambda_1}{c}\,I_1(x) - \frac{\lambda_2}{c}\left(I_2(x) + \sum_{k:\ y_k\le x} p_k\varphi(x-y_k)\right)\\ &= \frac{\lambda}{c}\,\varphi(x) - \frac{\lambda_1}{c}\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)\,dG_1(y) - \frac{\lambda_2}{c}\int_0^x \varphi(x-y)\,dG_2(y),\end{aligned}$$

звідки безпосередньо випливає інтегро-диференціальне рівняння (8). Оскільки права частина (8) є неперервною в усіх точках інтервалу $[0,+\infty)$, окрім точок розриву функції $G_2(y)$, то $\varphi'(x)$ також є неперервною в цих точках. Теорему доведено. □

Зауваження 3.1. Визначити точки розриву функції $G_2(y)$ на основі точок розриву функцій $F_1(y)$ і $F_2(y)$ можна таким чином. Нехай $(y_{1,i})_{i\ge1}$ і $(y_{2,j})_{j\ge1}$ — послідовності точок розриву функцій $F_1(y)$ і $F_2(y)$ відповідно, причому $F_1(y_{1,i}) - F_1((y_{1,i})_-) = p_{1,i}$, $i\ge1$, і $F_2(y_{2,j}) - F_2((y_{2,j})_-) = p_{2,j}$, $j\ge 1$. Розглядаємо всі можливі значення величини $y_{1,i}-y_{2,j}$ та залишаємо тільки додатні. Кожна додатна точка $y_{1,i}-y_{2,j}$ є точкою розриву функції $G_2(y)$, а розмір стрибка в цій точці дорівнює $p_{1,i}\,p_{2,j}$, якщо значення $y_{1,i}-y_{2,j}$ повторюється один раз. Якщо ж значення $y_{1,i}-y_{2,j}$ повторюється декілька разів, то відповідні значення $p_{1,i}\,p_{2,j}$ у цій точці підсумовуються.

4. Випадок експоненціально розподілених розмірів вимог і додаткових коштів

Лема 4.1. *Якщо випадкові величини ξ_i і η_i, $i \ge 1$, експоненціально розподілені із середніми μ_1 і μ_2 відповідно, то випадкові величини ζ_i^+ і ζ_i^-, $i \ge 1$, також експоненціально розподілені із середніми μ_2 і μ_1 відповідно. Окрім того, $\lambda_1 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ і $\lambda_2 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$.*

Доведення. За умовою леми $F_1(y) = 1 - e^{-y/\mu_1}$ і $F_2(y) = 1 - e^{-y/\mu_2}$ для всіх $y \ge 0$. Використовуючи твердження леми 2.2, знайдемо спочатку функцію розподілу $F(y)$ випадкових величин ζ_i, $i \ge 1$. З огляду на (3) для всіх $y \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-y\vee 0}^{+\infty} \Big(1 - e^{-(y+u)/\mu_2}\Big) \frac{1}{\mu_1} e^{-u/\mu_1}\, du \\
&= \int_{-y\vee 0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_1} e^{-u/\mu_1}\, du - \frac{1}{\mu_1} e^{-y/\mu_2} \int_{-y\vee 0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(\mu_1+\mu_2)u}{\mu_1\mu_2}\right\} du \\
&= e^{-(-y\vee 0)/\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{-y/\mu_2} \exp\left\{-\frac{(-y\vee 0)(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}\right\} \\
&= e^{(y\wedge 0)/\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \exp\left\{\frac{(y\wedge 0)(\mu_1+\mu_2) - \mu_1 y}{\mu_1\mu_2}\right\}.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$F(0) = 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2},$$

то $\lambda_1 = \lambda\big(1 - F(0_-)\big) = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ і $\lambda_2 = \lambda F(0_-) = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ внаслідок леми 2.3.

Беручи до уваги (4) і (5), для всіх $y \ge 0$ маємо

$$G_1(y) = \frac{1 - \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{-y/\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}} = \frac{\mu_2 - \mu_2 e^{-y/\mu_2}}{\mu_2} = 1 - e^{-y/\mu_2},$$

$$G_2(y) = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} - e^{-y/\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{-y/\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}} = \frac{\mu_1 - \mu_1 e^{-y/\mu_1}}{\mu_1} = 1 - e^{-y/\mu_1},$$

звідки випливає твердження леми. □

Теорема 4.1. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю (1), випадкові величини ξ_i і η_i, $i \ge 1$, експоненціально розподілені із середніми μ_1 і μ_2 відповідно та виконується умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$. Тоді*

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\lambda\mu_1(1-\alpha\mu_2)}{(c\alpha-\lambda)(1-\alpha\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda\mu_2} e^{\alpha x} \tag{22}$$

для всіх $x \ge 0$, де

$$\alpha = \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 - \sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2}.$$

Зауваження 4.1. При доведенні теореми 4.1 буде показано, що $\alpha < 0$ і

$$-1 < \frac{\lambda\mu_1(1-\alpha\mu_2)}{(c\alpha-\lambda)(1-\alpha\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda\mu_2} < 0.$$

Тому функція $\varphi(x)$, визначена рівністю (22), має всі природні властивості ймовірності небанкрутства. Зокрема, вона є неспадною та обмеженою нулем знизу й одиницею зверху.

Доведення. Внаслідок теореми 3.1 і леми 4.1 у цьому разі функція $\varphi(x)$ є диференційовною на інтервалі $[0, +\infty)$, а рівняння (8) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)\,\frac{1}{\mu_2}\,e^{-y/\mu_2}\,dy \\ - \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\int_0^{x}\varphi(x-y)\,\frac{1}{\mu_1}\,e^{-y/\mu_1}\,dy. \end{aligned} \tag{23}$$

Після замін змінних інтегрування $x + y = u$ і $x - y = u$ у першому та другому інтегралах відповідно у правій частині (23) маємо

$$\begin{aligned} c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\,e^{x/\mu_2}\int_x^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du \\ - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\,e^{-x/\mu_1}\int_0^{x}\varphi(u)\,e^{u/\mu_1}\,du. \end{aligned} \tag{24}$$

Легко бачити, що права частина (24) є диференційовною на інтервалі $[0, +\infty)$. Тому для всіх $x \geq 0$ існує друга похідна функції $\varphi(x)$. Продиференціювавши (24), отримаємо

$$\begin{aligned} c\varphi''(x) = \lambda\varphi'(x) - \frac{\lambda}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}\,e^{x/\mu_2}\int_x^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du \\ + \frac{\lambda}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}\,e^{-x/\mu_1}\int_0^{x}\varphi(u)\,e^{u/\mu_1}\,du. \end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, що права частина (25) є диференційовною на інтервалі $[0, +\infty)$. Тому існує третя похідна функції $\varphi(x)$ на цьому інтервалі. Продиференціювавши (25), маємо

$$\begin{aligned} c\varphi'''(x) = \lambda\varphi''(x) + \frac{\lambda}{\mu_1\mu_2}\,\varphi(x) - \frac{\lambda}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\,e^{x/\mu_2}\int_x^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du \\ + \frac{\lambda}{\mu_1^2(\mu_1+\mu_2)}\,e^{-x/\mu_1}\int_0^{x}\varphi(u)\,e^{u/\mu_1}\,du. \end{aligned} \tag{26}$$

Введемо функції

$$H_1(x) = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\,e^{x/\mu_2}\int_x^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du,$$

$$H_2(x) = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\,e^{-x/\mu_1}\int_0^{x}\varphi(u)\,e^{u/\mu_1}\,du.$$

Тоді (24), (25), (26) запишуться відповідно у вигляді

$$c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - H_1(x) - H_2(x), \tag{27}$$

$$c\varphi''(x) = \lambda\varphi'(x) - \frac{1}{\mu_2}\,H_1(x) + \frac{1}{\mu_1}\,H_2(x), \tag{28}$$

$$c\varphi'''(x) = \lambda\varphi''(x) + \frac{\lambda}{\mu_1\mu_2}\,\varphi(x) - \frac{1}{\mu_2}\,H_1(x) + \frac{1}{\mu_1}\,H_2(x). \tag{29}$$

Із (27) маємо

$$H_2(x) = -c\varphi'(x) + \lambda\varphi(x) - H_1(x). \tag{30}$$

Підставивши в (28) значення $H_2(x)$ з (30) і зробивши елементарні перетворення, отримаємо

$$H_1(x) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\left(-c\varphi''(x) + \lambda\varphi'(x) - \frac{c}{\mu_1}\,\varphi'(x) + \frac{\lambda}{\mu_1}\,\varphi(x)\right). \tag{31}$$

Підставивши в (29) значення $H_2(x)$ з (30), маємо

$$c\varphi'''(x) = \lambda\varphi''(x) + \frac{c}{\mu_1^2}\,\varphi'(x) + \left(\frac{\lambda}{\mu_1\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1^2}\right)\varphi(x) + \left(\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right)H_1(x). \tag{32}$$

Підставивши в (32) значення $H_1(x)$ з (31) і зробивши елементарні перетворення, отримаємо

$$c\varphi'''(x) - \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2}{\mu_1\mu_2}\,\varphi''(x) - \frac{c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2}{\mu_1\mu_2}\,\varphi'(x) = 0. \tag{33}$$

Рівняння (33) для знаходження $\varphi(x)$ є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами й розв'язується відомими методами. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$c\mu_1\mu_2\alpha^3 - (\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2)\alpha^2 - (c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)\alpha = 0. \tag{34}$$

Розв'язавши рівняння (34), отримаємо

$$\alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 - \sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 + \sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2}.$$

Зауважимо, що оскільки виконується умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, то

$$c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) > 0.$$

Більш того, неважко переконатися, що в цьому разі

$$|\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2| < \sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}.$$

Звідси випливає, що $\alpha_2 < 0$ і $\alpha_3 > 0$.

Загальний розв'язок рівняння (33) має вигляд

$$\varphi(x) = A_1e^{\alpha_1x} + A_2e^{\alpha_2x} + A_3e^{\alpha_3x}, \tag{35}$$

де A_1, A_2, A_3 — невідомі сталі, які визначаються з наступних трьох умов:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1, \tag{36}$$

$$c\varphi'(0) = \lambda\varphi(0) - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du, \tag{37}$$

$$c\varphi''(0) = \lambda\varphi'(0) - \frac{\lambda}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-u/\mu_2}\,du. \tag{38}$$

Зазначимо, що умова (36) виконується внаслідок леми 2.1, а (37) і (38) отримані підстановкою $x = 0$ у (24) і (25) відповідно.

Оскільки $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha_2x} = 0$ і $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha_3x} = +\infty$ то з (35) і (36) випливає, що $A_1 = 1$ і $A_3 = 0$. Тоді (35) перепишеться у вигляді

$$\varphi(x) = 1 + A_2e^{\alpha_2x}. \tag{39}$$

Із (39) маємо $\varphi(0) = 1 + A_2$ і $\varphi'(0) = A_2\alpha_2$. Тоді (37) запишеться у вигляді

$$cA_2\alpha_2 = \lambda(1 + A_2) - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\int_0^{+\infty}\left(1 + A_2e^{\alpha_2u}\right)e^{-u/\mu_2}\,du,$$

звідки

$$A_2 = \frac{\lambda\mu_1(1-\alpha_2\mu_2)}{(c\alpha_2-\lambda)(1-\alpha_2\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda\mu_2}. \tag{40}$$

Підставивши $\varphi'(0) = A_2\alpha_2$ і $\varphi''(0) = A_2\alpha_2^2$ у (38) маємо

$$cA_2\alpha_2^2 = \lambda A_2\alpha_2 - \frac{\lambda}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}\int_0^{+\infty}\left(1 + A_2e^{\alpha_2u}\right)e^{-u/\mu_2}\,du,$$

звідки

$$A_2 = \frac{-\lambda(1-\alpha_2\mu_2)}{\alpha_2(c\alpha_2-\lambda)(1-\alpha_2\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda}. \tag{41}$$

Але оскільки α_2 є коренем характеристичного рівняння (34), то неважко переконатися, що A_2, задані (40) і (41), рівні. Отже, маємо (22). Зазначимо, що у формулюванні теореми ми пишемо α замість α_2.

Далі, оскільки $\alpha_2 < 0$, то $1 - \alpha_2\mu_2 > 0$ і

$$(\lambda - c\alpha_2)(1 - \alpha_2\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) > \lambda \cdot 1 \cdot \mu_2 = \lambda\mu_2.$$

Тому з (40) випливає, що $A_2 < 0$. Більш того, оскільки

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu_1(1 - \alpha_2\mu_2)}{(\lambda - c\alpha_2)(1 - \alpha_2\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) - \lambda\mu_2} &< \frac{\lambda\mu_1(1 - \alpha_2\mu_2)}{\lambda(1 - \alpha_2\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) - \lambda\mu_2} \\ &= \frac{\lambda\mu_1(1 - \alpha_2\mu_2)}{\lambda\mu_1(1 - \alpha_2\mu_2) - \lambda\alpha_2\mu_2^2} < 1,\end{aligned}$$

то з (40) випливає, що $A_2 > -1$. Отже, функція $\varphi(x)$, визначена рівністю (22), має всі природні властивості ймовірності небанкрутства.

Зауважимо також, що знайдений розв'язок дійсно є ймовірністю небанкрутства. Справді, ймовірність небанкрутства є розв'язком рівняння (8), яке було виведено без додаткових припущень (зокрема, щодо диференційовності $\varphi(x)$) і зведено до рівняння (33). Тому ймовірність небанкрутства є розв'язком рівняння (33). Оскільки ми показали, що рівняння (33) має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (36)–(38), то цей розв'язок дійсно є ймовірністю небанкрутства. Теорему доведено. □

Зауваження 4.2. Якщо в класичній моделі ризику без додаткових надходжень коштів виконується умова додатності прибутку $c - \lambda\mu_1 > 0$, а розміри страхових вимог мають експоненціальний розподіл із середнім μ_1, то

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} \exp\left\{\frac{(\lambda\mu_1 - c)x}{c\mu_1}\right\}$$

для всіх $x \geq 0$ (див., наприклад, [1, 2, 3, 4]).

Позначимо

$$A(\lambda, c, \mu_1, \mu_2) = c^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2).$$

Тоді у моделі ризику, що розглядається, маємо

$$\begin{aligned}\lim_{\mu_2 \downarrow 0} \alpha &= \lim_{\mu_2 \downarrow 0} \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 - \sqrt{A(\lambda, c, \mu_1, \mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2} \\ &= \lim_{\mu_2 \downarrow 0} \frac{\big(\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2\big)^2 - A(\lambda, c, \mu_1, \mu_2)}{2c\mu_1\mu_2\big(\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 + \sqrt{A(\lambda, c, \mu_1, \mu_2)}\big)} \\ &= \lim_{\mu_2 \downarrow 0} \frac{-4c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}{2c\mu_1\mu_2 \cdot 2c\mu_1} = \frac{\lambda\mu_1 - c}{c\mu_1}\end{aligned}$$

і

$$\lim_{\mu_2 \downarrow 0} \frac{\lambda\mu_1(1 - \alpha\mu_2)}{(c\alpha - \lambda)(1 - \alpha\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) + \lambda\mu_2} = \lim_{\mu_2 \downarrow 0} \frac{\lambda\mu_1}{(c\alpha - \lambda)\mu_1} = \frac{\lambda}{(\lambda\mu_1 - c)/\mu_1 - \lambda} = -\frac{\lambda\mu}{c}.$$

Отже, при досить малих μ_2 (при незначних надходженнях додаткових коштів) імовірність небанкрутства в моделі ризику, що розглядається, близька до відповідної ймовірності небанкрутства в класичній моделі ризику.

Приклад 4.1. Нехай $c = 10$, $\lambda = 4$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0.1$. Тоді в класичній моделі ризику

$$\varphi(x) = 1 - 0.8\, e^{-0.1x},$$

а в моделі ризику, що розглядається,

$$\varphi(x) \approx 1 - 0.760473\, e^{-0.119763x}.$$

5. Висновки

У статті розглянуто модель ризику, яка є узагальненням класичної, коли в момент надходження кожної вимоги страхова компанія залучає додаткові кошти. Досліджено властивості неперервності й диференційовності ймовірності небанкрутства на нескінченному інтервалі часу. Виведено інтегро-диференціальне рівняння для цієї функції. У випадку, коли розміри вимог і додаткових коштів експоненціально розподілені, знайдено точний розв'язок цього рівняння і встановлено, що при незначних надходженнях додаткових коштів імовірність небанкрутства в моделі ризику, яка розглядається, близька до відповідної ймовірності небанкрутства в класичній моделі ризику. Наведено чисельний приклад.

Література

1. T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
2. S. Asmussen, *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore, 2000.
3. J. Grandell, *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
4. М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко, *Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці*, "Інформтехніка", Київ, 1995.
5. A. V. Boikov, *The Cramér–Lundberg model with stochastic premium process*, Theory Probab. Appl. **47** (2002), no. 3, 489–493.
6. О. Ю. Рагуліна, *Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика (2010), № 1–2, 82–116.
7. О. Ю. Рагуліна, *Оцінки і властивості ймовірності небанкрутства страхової компанії в класичній моделі ризику за умови розміщення капіталу на фінансовому (B,S)-ринку*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки (2012), № 2, 23–30.
8. О. Ю. Рагуліна, *Про ймовірність небанкрутства страхової компанії у двох моделях ризику*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика (2012), № 1, 40–50.
9. B. V. Bondarev and E. Yu. Ragulina, *On the finite–time nonruin probability of an insurance company with investments in the financial (B,S)–market*, Cybernetics and Systems Analysis **48** (2012), no. 5, 736–748.
10. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, "Наука", Москва, 1964.
11. Д. В. Гусак, *Кумулянтне зображення кореня Лундберга для напівнеперервних процесів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 21–29.
12. С. Карлин, *Основы теории случайных процессов*, "Мир", Москва, 1971.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Адреса електронної пошти: lena_ragulina@mail.ru

58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, факультет математики та інформатики, кафедра математичного моделювання

Адреса електронної пошти: o.stroiev@chnu.edu.ua

Надійшла 09/10/2014