

## ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

УДК 519.21

В. М. РАДЧЕНКО

**Анотация.** Для випадкових функций с траекториями из пространства Бесова визначено интеграл за за-  
гальной стохастической мерой. Для некоторых стохастических уравнений с такими интегралами получено  
утверждения про существование и единственность решений.

**ABSTRACT.** For random functions with trajectories from Besov space, the integral with respect to  
general stochastic measure is defined. For some stochastic equations with such integrals, the statements  
on existence and uniqueness of solutions are obtained.

**Аннотация.** Для случайных функций с траекториями из пространства Бесова определен инте-  
грал по общей стохастической мере. Для некоторых стохастических уравнений с такими интеграла-  
ми получены утверждения о существовании и единственности решений.

### 1. ВСТУП

Метою даної статті є дослідження стохастичного рівняння наступного вигляду:

$$u(x) = g(x) + \int_{(a,b]} f(x,y)u(y) d\mu(y),$$

де  $u(x)$  — невідома випадкова функція,  $\mu$  — загальна стохастична міра. При цьо-  
му інтеграл за  $\mu$  визначається як границя інтегральних сум спеціального вигляду,  
підінтегральна випадкова функція повинна мати траєкторії з простору Бесова.

Схожі стохастичні рівняння розглядалися, наприклад, в [1, 2]. При цьому на сто-  
хастичний інтегратор накладалися певні спеціальні умови. В [1] досліджувалися рів-  
няння типу Фредгольма, інтегратор мав узагальнену похідну в просторі  $L_2([0, 1]^d)$ ,  
стохастичний інтеграл визначався як сума певного ряду з допомогою ортонормо-  
ваного базису. В [2] розглядалося стохастичне рівняння типу Вольтерра інтеграл  
розглядався за процесами скінченної  $p$ -варіації,  $0 < p < 2$ , і визначався в сенсі Юнга  
як границя відповідних інтегральних сум.

В даній роботі на стохастичний інтегратор  $\mu$  накладається лише умова  $\sigma$ -адитив-  
ності за ймовірністю на борельовій  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{B}((a, b])$ . При цьому ми даємо означен-  
ня стохастичного інтеграла в наших рівняннях як границі інтегральних сум спеці-  
ального вигляду. Наше означення інтеграла схоже на те, що розглядається в [2] —  
ми не використовуємо ймовірнісні властивості  $\mu$ , фактично ми визначаємо інтеграл  
потраєкторно, при фіксованих  $\omega$ . Від підінтегрального процесу вимагається, щоб  
його траєкторії належали простору Бесова.

В [3, 4] вивчалися рівняння, в яких стохастичний вплив задавався інтегралом  
від не випадкової функції за стохастичними мірами. В даній роботі зроблено спробу  
дослідити рівняння з інтегралами від випадкових функцій за  $\mu$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H20, 60H05, 60G57.

*Ключові слова і фрази.* Стохастична міра, стохастичний інтеграл, стохастичне інтегральне рів-  
няння, простір Бесова.

Статтю побудовано наступним чином. В пункті 2 наведено деякі відомості про стохастичні міри та простори Бесова. В пункті 3 визначено інтеграл за  $\mu$ , доведено його адитивність. В пункті 4 розглянуто вказане стохастичне інтегральне рівняння, отримано твердження про існування та єдиність його розв'язку.

## 2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Нехай  $X$  — деяка множина,  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра підмножин  $X$ ,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — повний ймовірнісний простір. Через  $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  позначимо множину всіх випадкових величин (точніше кажучи, їхніх класів  $P$ -еквівалентності). Збіжність в  $L_0$  означає збіжність за ймовірністю.

**Означення 1.** *Стохастичною мірою (СМ) на  $\mathcal{B}$  називається  $\sigma$ -адитивне відображення  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow L_0$ .*

Ми не накладаємо на  $\mu$  ніяких вимог невід'ємності, існування моментів або узгодженості. В [5] така  $\mu$  називається загальною стохастичною мірою.

Наведемо деякі приклади. Якщо  $M(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , є квадратично інтегровним мартингалом, то  $\mu(A) := \int_{[0,T]} \mathbf{1}_A(t) dM(t) \in \text{СМ}$  на борельовій  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{B}([0, T])$ . Аналогічним чином визначає СМ дробовий броунівський рух  $B^H(x)$  при значенні показника Хюрста  $H > 1/2$  (це випливає з нерівності (1.5) [6]). Частинним випадком СМ будуть визначені на  $\sigma$ -алгебрі  $\alpha$ -стійкі міри з незалежними значеннями, докладно розглянуті в [7, розділ 3]. Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують СМ, є в розділах 7 і 8 [5].

У [8] побудовано і вивчено інтеграл вигляду  $\int_A h(x) d\mu(x)$ , де  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$  — вимірна не випадкова функція,  $A \in \mathcal{B}$ . Його конструкція проводиться стандартно з використанням наближення простими функціями. (Аналогічна побудова наведена в розділі 7 [5], також див. [9]). Зокрема, будь-яка обмежена вимірна  $h$  буде інтегрованою за будь-якою  $\mu$ . Для цього інтеграла має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [8] або твердження 7.1.1 [5]).

В подальших міркуваннях важливе значення будуть мати простори Бесова  $B_{22}^\alpha([a, b])$ . Нагадаємо, що норма в цих класичних банахових просторах для  $0 < \alpha < 1$  може бути визначена наступним чином:

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([a,b])} = \|g\|_{L_2([a,b])} + \left( \int_a^b (\omega_2(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

де

$$\omega_2(g, r) = \sup_{0 \leq s \leq r} \left( \int_a^{b-s} |g(y+s) - g(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Відомо, що для  $1/2 < \alpha < 1$  кожен з класів еквівалентності  $B_{22}^\alpha([a, b])$  містить функцію з  $C([a, b])$ . Всюди далі функції з  $B_{22}^\alpha([a, b])$ ,  $1/2 < \alpha < 1$ , вважаємо неперервними.

Для  $n \geq 0$  покладемо

$$d_{kn} = a + k2^{-n}(b-a), \quad 0 \leq k \leq 2^n, \quad \Delta_{kn} = (d_{(k-1)n}, d_{kn}], \quad 1 \leq k \leq 2^n$$

(в позначеннях ми поки що не відзначаємо, поділ якого саме інтервалу  $(a, b]$  ми беремо).

Тоді, як показано в теоремі 1.1 [11], при  $1/2 < \alpha < 1$  еквівалентною нормою в просторі  $B_{22}^\alpha([a, b])$  є

$$\|g\|_{22}^\alpha = |g(a)| + \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} (g(d_{kn}) - g(d_{(k-1)n}))^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Відмітимо, що лема [10] (див. також лему 3.1 [3]) дає, що для множин  $A_{kn} \in \mathcal{B}((a, b])$ , таких, що  $A_{k_1n} \cap A_{k_2n} = \emptyset$  при будь-яких  $n$ ,  $k_1 \neq k_2$ , при  $\alpha > 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(A_{kn})|^2 < +\infty \quad \text{м.н.} \quad (2.3)$$

Через  $C$  та  $C(\omega)$  ми будемо позначати не істотні для підрахунків константи та випадкові константи, їхні значення можуть бути різними в різних формулах.

### 3. ІНТЕГРАЛ ЗА СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ ВІД ПРОЦЕСУ З ПРОСТОРУ БЕСОВА

В даному пункті ми дамо означення і дослідимо деякі властивості інтеграла вигляду  $\int_{(a,b]} h(t, \omega) d\mu(t)$ , де  $\mu$  — СМ на  $\mathcal{B}((a, b])$ , процес  $h(t)$  має траєкторії з простору Бесова  $B_{22}^\alpha([a, b])$ ,  $1/2 < \alpha < 1$ .

**Означення 2.** Для СМ  $\mu$  на борельовій  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{B}((a, b])$  і функції  $h: [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такої, що для деякого  $1/2 < \alpha < 1 \forall \omega \in \Omega: h(\cdot, \omega) \in B_{22}^\alpha([a, b])$ , покладемо

$$\int_{(a,b]} h d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} h(d_{(k-1)n}, \omega) \mu(\Delta_{kn}), \quad (3.1)$$

де границя береться майже напевно.

Щоб обґрунтувати коректність означення інтеграла, досить показати існування даної границі. Позначимо

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} h(d_{(k-1)n}, \omega) \mu(\Delta_{kn}), \quad n \geq 0.$$

Оскільки  $\Delta_{k(n-1)} = \Delta_{(2k-1)n} \cup \Delta_{(2k)n}$ , то, використовуючи нерівність Коші–Буняковського, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |S_n - S_{n-1}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (h(d_{(2k-1)n}) - h(d_{(k-1)(n-1)})) \mu(\Delta_{(2k)n}) \right| \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (h(d_{(2k-1)n}) - h(d_{(k-1)(n-1)}))^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\mu(\Delta_{(2k)n})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (\|h\|_{22}^\alpha - h(a)) \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\mu(\Delta_{(2k)n})|^2 \right)^{1/2} \stackrel{(2.3)}{<} +\infty \quad \text{м.н.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(Також ми нехтуємо множиною ймовірності нуль, на якій

$$\mu(\Delta_{k(n-1)}) \neq \mu(\Delta_{(2k-1)n}) + \mu(\Delta_{(2k)n})$$

для деяких  $k, n$ .) Звідси випливає існування м. н. границі (3.1). З того, що

$$\left| \int_{(a,b]} h d\mu \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right| \leq |S_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |S_n - S_{n-1}|, \quad (3.3)$$

отримуємо оцінку

$$\left| \int_{(a,b]} h d\mu \right| \leq |h(a)| \cdot |\mu((a,b])| + (\|h\|_{22}^\alpha - |h(a)|) \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\mu(\Delta_{(2k)n})|^2 \right)^{1/2} \quad \text{м.н.} \quad (3.4)$$

Відмітимо, що для не випадкових функцій  $h \in B_{22}^\alpha([a,b])$  даний інтеграл співпадає з інтегралом, визначеним в [5] та [8]. Рівність інтеграла з [5] та [8] границі інтегральних сум (3.1) випливає з аналога теореми Лебега (твердження 7.1.1 [5]).

Коли  $\mu$  є не випадковою невід'ємною мірою, як легко бачити, наш інтеграл співпадає із звичайним інтегралом Лебега  $\int_{(a,b]} h(x, \omega) d\mu(x)$ , визначеним при кожному фіксованому  $\omega$  (властивості такого інтеграла досліджувалися в [12]).

Ми визначаємо інтеграл лише по відрізках. Оскільки в (3.1) розглядаються лише двійкові поділи відповідного відрізка, деякі стандартні властивості даного інтеграла не є очевидними.

Спочатку ми отримаємо твердження про зв'язок інтегралів по різних інтервалах. В ньому ми будемо розглядати поділи на  $2^n$  однакових частин і інтервалу  $(a,b]$ , і інтервалу  $(c,d]$ , і при поділі другого інтервалу будемо вживати позначення  $d_{kn}^{(c,d]}$ ,  $\Delta_{kn}^{(c,d]}$  (позначення  $d_{kn}$ ,  $\Delta_{kn}$ , як і раніше, відповідають поділам  $(a,b]$ ).

**Теорема 1.** Нехай  $(c,d] \subset (a,b]$  та  $\{h(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset B_{22}^\alpha([a,b])$ ,  $1/2 < \alpha < 1$ . Тоді

$$\int_{(c,d]} h(t) d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} h(d_{(k-1)n}, \omega) \mu(\Delta_{kn} \cap (c,d]) \quad \text{м.н.} \quad (3.5)$$

*Доведення.* Розглянемо наближення  $h$  кусково-лінійними функціями на  $[a,b]$ . Нехай  $h_j: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  — такі функції, що  $h_j(d_{kj}) = h(d_{kj})$ ,  $1 \leq k \leq 2^j$ , а на  $[d_{(k-1)j}, d_{kj}]$  функції  $h_j$  є лінійними. Для деякої випадкової константи  $L_j(\omega)$  маємо

$$|h_j(x) - h_j(y)| \leq L_j(\omega)|x - y|, \quad (3.6)$$

тому  $h_j \in B_{22}^\alpha([a,b])$  є інтегровними за  $\mu$ . Маємо на  $[a,b]$

$$\begin{aligned} (\|h - h_j\|_{22}^\alpha)^2 &= \sum_{n=j}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |(h - h_j)(d_{kn}) - (h - h_j)(d_{(k-1)n})|^2 \\ &\leq 2 \sum_{n=j}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |h(d_{kn}) - h(d_{(k-1)n})|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{n=j}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |h_j(d_{kn}) - h_j(d_{(k-1)n})|^2 \\ &:= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Оскільки  $\|h(\cdot, \omega)\|_{22}^\alpha < +\infty$ , з (2.2) маємо  $S_1 < +\infty$ , і тому  $S_1 \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Для  $S_2$  з лінійності  $h_j$  на  $[d_{(k-1)j}, d_{kj}]$  маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |h_j(d_{kn}) - h_j(d_{(k-1)n})|^2 &= \sum_{k=1}^{2^j} |h(d_{kj}) - h(d_{(k-1)j})|^2 \sum_{n=j}^{\infty} 2^{n(2\alpha-2)+j} \\ &= \frac{2^{j(2\alpha-1)}}{1 - 2^{2\alpha-2}} \sum_{k=1}^{2^j} |h(d_{kj}) - h(d_{(k-1)j})|^2. \end{aligned}$$

Із скінченності норми (2.2) для  $h$  отримуємо, що  $S_2 \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

В силу означення просторів Бесова

$$\|h(\cdot, \omega) - h_j(\cdot, \omega)\|_{B_{22}^\alpha([c, d])} \leq \|h(\cdot, \omega) - h_j(\cdot, \omega)\|_{B_{22}^\alpha([a, b])},$$

і зокрема

$$h_j(\cdot, \omega) \in B_{22}^\alpha([c, d]).$$

З еквівалентності норми (2.2) і норми в просторі Бесова та нерівності (3.4) (всі — розглянуті на відрізку  $[c, d]$ ) отримуємо, що

$$\int_{(c, d]} (h - h_j) d\mu \rightarrow 0 \quad \text{м.н.}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

За означенням інтеграла, для кожного фіксованого  $j$  буде

$$\int_{(c, d]} h_j d\mu - \sum_{k=1}^{2^n} h_j(d_{(k-1)n}^{(c, d]}) \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]}) \rightarrow 0 \quad \text{м.н.}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

При  $n \geq j$  маємо

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{2^n} h_j(d_{(k-1)n}^{(c, d]}) \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]}) - \sum_{k=1}^{2^n} h_j(d_{(k-1)n}) \mu(\Delta_{kn} \cap (c, d]) \right| \\ & \leq \sum_{1 \leq k, k' \leq 2^n} \left| h_j(d_{(k-1)n}^{(c, d]}) - h_j(d_{(k'-1)n}) \right| \left| \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]} \cap \Delta_{k'n}) \right| \\ & \stackrel{(3.6)}{\leq} L_j(\omega) 2^{-n} (b-a) \sum_{1 \leq k, k' \leq 2^n} \left| \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]} \cap \Delta_{k'n}) \right|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тут  $k'$  взято так, що у відповідних різницях  $\Delta_{kn}^{(c, d]} \cap \Delta_{k'n} \neq \emptyset$ , тому

$$\left| d_{(k-1)n}^{(c, d]} - d_{(k'-1)n} \right| \leq 2^{-n} (b-a).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq k, k' \leq 2^n} 2^{-n} \left| \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]} \cap \Delta_{k'n}) \right| \\ & \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1+n(2\alpha-2)} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq k, k' \leq 2^n} 2^{n(1-2\alpha)} \left| \mu(\Delta_{kn}^{(c, d]} \cap \Delta_{k'n}) \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \stackrel{(2.3)}{<} +\infty \quad \text{м.н.}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

при  $n \rightarrow \infty$  прямує до нуля значення в (3.9).

Далі розглянемо

$$T_n := \sum_{k=1}^{2^n} h_j(d_{(k-1)n}, \omega) \mu(\Delta_{kn} \cap (c, d]) - \sum_{k=1}^{2^n} h(d_{(k-1)n}) \mu(\Delta_{kn} \cap (c, d]), \quad n \geq 0.$$

Тоді, повторюючи міркування з (3.2) для  $h - h_j$  замість  $h$ , враховуючи, що

$$(h - h_j)(a) = 0$$

і  $T_0 = 0$ , маємо

$$\begin{aligned} |T_n| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |T_n - T_{n-1}| \\ &\leq \|h_j - h\|_{22}^{\alpha} \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\mu(\Delta_{(2k)n} \cap (c, d])|^2 \right)^{1/2} \stackrel{(2.3)}{<} +\infty \quad \text{м.н.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Розглядаємо  $\omega \in \Omega$ , для яких (3.7)–(3.11) справджуються для всіх  $n, j$ . При фіксованому  $\omega$  вибором великого  $j$  можемо зробити як завгодно малими (3.7) і (3.11), а далі при фіксованому  $j$  вибором  $n$  можемо зменшити (3.8) і (3.9). Так ми отримаємо (3.5).  $\square$

**Наслідок 1.** Нехай  $a < c < b$  та  $\{h(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset B_{22}^{\alpha}([a, b])$ ,  $1/2 < \alpha < 1$ . Тоді

$$\int_{(a,b]} h \, d\mu = \int_{(a,c]} h \, d\mu + \int_{(c,b]} h \, d\mu \quad \text{м.н.}$$

*Доведення.* Безпосередньо випливає з (3.5).  $\square$

#### 4. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

Тепер ми розглянемо рівняння відносно невідомої випадкової функції  $u$

$$u(x) = g(x) + \int_{(a,b]} f(x, y) u(y) \, d\mu(y), \quad (4.1)$$

де  $g, u: [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — вимірні випадкові функції,

$$\{g(\cdot, \omega), u(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset B_{22}^{\alpha}([a, b]), \quad 1/2 < \alpha < 1,$$

інтеграл розглядається в сенсі означення 2.

В множині функцій  $B_{22}^{\alpha}([a, b])$  ми будемо використовувати норму

$$\|h\|_2^{\alpha} = \left( \max_{x \in [a,b]} |h(x)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} (h(d_{kn}) - h(d_{(k-1)n}))^2 \right)^{1/2}.$$

Збіжність за даною нормою еквівалентна рівномірній збіжності і збіжності за стандартною нормою  $B_{22}^{\alpha}([a, b])$ . Тому отриманий нормований простір буде повним, що дає можливість використати властивості стискаючих відображень для отримання розв'язку.

Далі будемо використовувати позначення

$$M_{\alpha}(\omega) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(1-2\alpha)} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |\mu(\Delta_{(2i)j})|^2 \right)^{1/2}.$$

Нагадаємо, що за (2.3) буде  $M_{\alpha} < +\infty$  м. н.

**Лема 1.** Нехай  $\{u(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset B_{22}^{\alpha}([a, b])$ ,  $1/2 < \alpha < 1$ , випадкова функція  $f(x, y, \omega): [a, b]^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  така, що

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq K_x(\omega) |x_1 - x_2|^{\delta_x}, \quad \delta_x > \alpha, \quad (4.2)$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K_y(\omega) |y_1 - y_2|^{\delta_y}, \quad \delta_y > \alpha, \quad (4.3)$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)| \leq K_{xy}(\omega) |x_1 - x_2|^{\delta_x} |y_1 - y_2|^{\delta_y}. \quad (4.4)$$

Також позначимо  $K_f(\omega) = \max_{x \in [a,b]} |f(x, \omega)|$ . Тоді

$$\eta(x) = \int_{(a,b]} f(x, y) u(y) \, d\mu(y) \quad (4.5)$$

має модифікацію  $\tilde{\eta}(x)$  таку, що  $\{\tilde{\eta}(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset B_{22}^\alpha([a, b])$ , і при цьому

$$\begin{aligned} (\|\tilde{\eta}\|_2^\alpha)^2 &\leq 3(\|u\|_2^\alpha)^2 \\ &\times \left( (b-a)^{2\delta_x} 2^{2\alpha} (2^{2\delta_x} - 2^{2\alpha})^{-1} \right. \\ &\quad \times \max \left\{ K_x^2 |\mu((a, b])|^2 \right. \\ &\quad \left. + K_{xy}^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_\alpha^2, K_x^2 M_\alpha^2 \right\} \\ &\quad + \max \left\{ K_f^2 |\mu((a, b])|^2 \right. \\ &\quad \left. + K_y^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_\alpha^2, \right. \\ &\quad \left. K_f^2 (b-a)^{2\delta_x} M_\alpha^2 \right\} \quad \text{м.н.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

*Доведення.* З умови Гельдера (4.3), обмеженості  $f$  і  $u$ , умови  $u(\cdot, \omega) \in B_{22}^\alpha([a, b])$ , нерівності

$$|f(x, y+s)u(y+s) - f(x, y)u(y)| \leq |f(x, y+s) - f(x, y)| \cdot |u(y+s)| + |u(y+s) - u(y)| \cdot |f(x, y)|$$

і (2.1) отримуємо, що  $\{f(x, \cdot, \omega)u(\cdot, \omega), \omega \in \Omega, x \in [a, b]\} \subset B_{22}^\alpha([a, b])$ . Тому інтеграл в (4.5) визначений.

Інтеграл в (4.5) визначаємо за (3.1) так, що при всіх  $x$  беремо одну й ту ж версію  $\mu$ . Так отримана  $\tilde{\eta}(x)$  задовольняє нерівність (3.4) м. н., а виключна множина міри нуль тут буде спільною для всіх  $x \in [a, b]$ .

Далі розглядаємо

$$\begin{aligned} (\|\tilde{\eta}\|_2^\alpha)^2 &= \max_{x \in [a, b]} |\tilde{\eta}(x)|^2 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left| \int_{(a, b]} (f(d_{kn}, y) - f(d_{(k-1)n}, y)) u(y) d\mu(y) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Позначимо

$$v_{kn}(y) = f(d_{kn}, y) - f(d_{(k-1)n}, y), \quad K_u(\omega) = \max_{x \in [a, b]} |u(x, \omega)|,$$

і тоді маємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_{(a, b]} v_{kn}(y) u(y) d\mu(y) \right|^2 \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} \left( |v_{kn}(a)u(a)| \cdot |\mu((a, b])| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \left| (v_{kn}(d_{(2i-1)j}) u(d_{(2i-1)j}) - v_{kn}(d_{(i-1)(j-1)}) u(d_{(i-1)(j-1)})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \mu(\Delta_{(2i)j}) \right| \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3(|v_{kn}(a)u(a)| \cdot |\mu((a, b])|)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(v_{kn}(d_{(2i-1)j}) - v_{kn}(d_{(i-1)(j-1)}))u(d_{(2i-1)j})\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(u(d_{(2i-1)j}) - u(d_{(i-1)(j-1)}))v_{kn}(d_{(i-1)(j-1)})\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\stackrel{(4.2), (4.4)}{\leq} 3K_x^2(b-a)^{2\delta_x}2^{-2n\delta_x}K_u^2|\mu((a, b])|^2 \\
&\quad + 3K_u^2 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} K_{xy}(b-a)^{\delta_x+\delta_y}2^{-n\delta_x-j\delta_y}|\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\quad + 3K_x^2(b-a)^{2\delta_x}2^{-2n\delta_x} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(u(d_{(2i-1)j}) - u(d_{(i-1)(j-1)}))\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\leq 3(b-a)^{2\delta_x}2^{-2n\delta_x} \\
&\quad \times \left( K_x^2K_u^2|\mu((a, b])|^2 + K_u^2K_{xy}^2(b-a)^{2\delta_y}2^{2\alpha-1}(2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1}M_{\alpha}^2 \right. \\
&\quad \left. + K_x^2 \left( (\|u\|_2^{\alpha})^2 - K_u^2 \right) M_{\alpha}^2 \right) \\
&\leq 3(\|u\|_2^{\alpha})^2(b-a)^{2\delta_x}2^{-2n\delta_x} \\
&\quad \times \max\{K_x^2|\mu((a, b])|^2 + K_{xy}^2(b-a)^{2\delta_y}2^{2\alpha-1}(2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1}M_{\alpha}^2, K_x^2M_{\alpha}^2\}.
\end{aligned}$$

Тут в передостанній нерівності було використано оцінку

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} 2^{-j\delta_y} |\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} 2^{j(2\alpha-2\delta_y-1)} \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} 2^{j(1-2\alpha)} |\mu(\Delta_{(2i)j})|^2 \right) \quad (4.8) \\
&= 2^{2\alpha-1}(2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1}M_{\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Аналогічно для кожного  $x \in [a, b]$  маємо

$$\begin{aligned}
|\tilde{\eta}(x)| &= \left| \int_{(a, b]} f(x, y)u(y) d\mu(y) \right| \\
&\stackrel{(3.3)}{\leq} \left( |f(x, a)u(a)| \cdot |\mu((a, b])| \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \left| (f(x, d_{(2i-1)j})u(d_{(2i-1)j}) - f(x, d_{(i-1)(j-1)})u(d_{(i-1)(j-1)})) \right. \\
&\quad \left. \left. \times \mu(\Delta_{(2i)j}) \right| \right)^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq 3(|f(x, a)u(a)| \cdot |\mu((a, b])|)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(f(x, d_{(2i-1)j}) - f(x, d_{(i-1)(j-1)}))u(d_{(2i-1)j})\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(u(d_{(2i-1)j}) - u(d_{(i-1)(j-1)}))f(x, d_{(i-1)(j-1)})\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\stackrel{(4.2), (4.4)}{\leq} 3K_u^2 K_f^2 |\mu((a, b])|^2 \\
&\quad + 3K_u^2 K_y^2 (b-a)^{2\delta_y} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} 2^{-j\delta_y} |\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\quad + 3K_f^2 (b-a)^{2\delta_x} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} |(u(d_{(2i-1)j}) - u(d_{(i-1)(j-1)}))\mu(\Delta_{(2i)j})| \right)^2 \\
&\stackrel{(4.8)}{\leq} 3K_u^2 K_f^2 |\mu((a, b])|^2 \\
&\quad + 3K_u^2 K_y^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_{\alpha}^2 \\
&\quad + 3K_f^2 (b-a)^{2\delta_x} (\|u\|_2^{\alpha})^2 - K_u^2 M_{\alpha}^2 \\
&\leq 3(\|u\|_2^{\alpha})^2 \max \left\{ K_f^2 |\mu((a, b])|^2 + K_y^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_{\alpha}^2, \right. \\
&\quad \left. K_f^2 (b-a)^{2\delta_x} M_{\alpha}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Залишається використати (4.7).  $\square$

Далі використаємо позначення

$$\begin{aligned}
\Omega_1 = \left\{ \omega \in \Omega: (b-a)^{2\delta_x} 2^{2\alpha} (2^{2\delta_x} - 2^{2\alpha})^{-1} \right. \\
\quad \times \max \left\{ K_x^2 |\mu((a, b])|^2 \right. \\
\quad \quad \left. + K_{xy}^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_{\alpha}^2, K_x^2 M_{\alpha}^2 \right\} \\
\quad \left. + \max \left\{ K_f^2 |\mu((a, b])|^2 \right. \right. \\
\quad \quad \left. + K_y^2 (b-a)^{2\delta_y} 2^{2\alpha-1} (2^{2\delta_y} - 2^{2\alpha})^{-1} M_{\alpha}^2, K_f^2 (b-a)^{2\delta_x} M_{\alpha}^2 \right\} < \frac{1}{3} \right\}.
\end{aligned}$$

В наступному твердженні ми розглянемо звуження рівняння (4.1) на  $\Omega_1$ . При такому звуженні не порушуються властивості, використані нами для означення інтеграла та при доведенні його властивостей. Формально кажучи, ми можемо покласти всі значення  $\mu(A, \omega) = 0$ ,  $A \in \mathcal{B}((a, b])$ ,  $\omega \in (\Omega \setminus \Omega_1)$ , і розглядати (4.1) вже для зміненої СМ.

**Теорема 2.** *Нехай для рівняння (4.1) справджуються умови (4.2)–(4.4). Тоді на  $\Omega_1$  (можливо, крім множини ймовірності нуль) (4.1) має єдиний розв'язок.*

*Доведення.* Як дає (4.6), на  $\Omega_1$  майже напевно права частина (4.1) задає стискаюче відображення в  $B_{22}^{\alpha}([a, b])$  з нормою  $\|\cdot\|_2^{\alpha}$ .  $\square$

Для заданої  $f$  вказана множина  $\Omega_1$  може виявитися порожньою. Але для рівнянь  $u(x) = g(x) + \int_{(a,b]} \varepsilon f(x, y)u(y) d\mu(y)$  для відповідних множин існування розв'язку

буде  $P(\Omega_1) \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Це випливає з прямування до нуля коефіцієнтів  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$  і  $K_f$ , взятих для функцій  $\varepsilon f$ .

В даному пункті ми розглянули стохастичне інтегральне рівняння типу Фредгольма. Аналогічне дослідження стохастичного рівняння типу Вольтерра  $u(x) = g(x) + \int_{(a,x]} f(x,y)u(y) d\mu(y)$  не проходить, оскільки траєкторії стохастичного інтеграла тут, взагалі кажучи, не належать простору Бесова  $B_{22}^\alpha([a,b])$ ,  $\alpha > 1/2$ . Наприклад, для процесу  $\mu((a,x]) = \int_{(a,x]} d\mu(y)$  лише відомо, що його траєкторії належать  $B_{22}^\alpha([a,b])$  при всіх  $\alpha < 1/2$  (див. основну теорему [10]).

На підставі отриманих результатів в подальшому планується досліджувати асимптотичну поведінку розв'язку рівняння (4.1) при  $x, b \rightarrow \infty$ , розглядати проблему великих відхилень для нього.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. S. Ogawa, *Stochastic integral equations for the random fields*, Seminaire de Probabilites XXV, Springer, Berlin–Heidelberg, 1991, pp. 324–329.
2. T. Mikosch and R. Norvaiša, *Stochastic integral equations without probability*, Bernoulli **6** (2000), no. 3, 401–434.
3. V. M. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Mathematica **194** (2009), no. 3, 231–251.
4. V. Radchenko, *Stochastic partial differential equations driven by general stochastic measures*, Modern Stochastics and Appl. (V. Korolyuk, N. Limnios, Yu. Mishura, L. Sakhno, G. Shevchenko, eds.), Springer/Cham Heidelberg, 2014, pp. 143–156.
5. S. Kwapień and W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
6. J. Memin, Yu. Mishura, and E. Valkeila, *Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion*, Statistics and Probability Letters **27** (2001), no. 2, 197–206.
7. G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, London, 1994.
8. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Труды Института математики НАН Украины **27** (1999).
9. G. Curbera and O. Delgado, *Optimal domains for  $L^0$ -valued operators via stochastic measures*, Positivity **11** (2007), no. 3, 399–416.
10. V. Radchenko, *Besov regularity of stochastic measures*, Statist. Prob. Lett. **77** (2007), no. 8, 822–825.
11. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl. (N.S.) **13** (1997), no. 2, 63–77.
12. В. Н. Радченко, *Об определении интеграла от случайной функции*, Теория вероятностей и ее применения **41** (1996), no. 3, 677–682.

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, Київ 01601, УКРАЇНА

Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Надійшла 29/08/2014