Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 164–173

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 164–173

НЕРІВНІСТЬ ПУАНКАРЕ ТА ЛОГАРИФМІЧНА НЕРІВНІСТЬ СОБОЛЄВА ДЛЯ СФЕРИЧНО ЦЕНЗУРОВАНОЇ ГАУССОВОЇ МІРИ

УДК 519.21

Т. Д. ТИМОШКЕВИЧ

Анотація. Для одновимірної проекції сферично цензурованної гауссової міри в $\mathbf{R}^n$ доведено логарифмічну нерівність Соболєва. Як наслідок, для сферично цензурованної гауссової міри в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ отримано нерівність Пуанкаре.

Abstract. For a one-dimensional projection of a spherically censored Gaussian measure on $\mathbf{R}^n$ we prove the logarithmic Sobolev inequality. As a consequence, we obtaine the Poincare inequality for a spherically censored Gaussian measure on $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$.

Аннотация. Для одномерной проекции сферически цензурированной гауссовской меры в $\mathbf{R}^n$ доказано логарифмическое неравенство Соболева. Как следствие, для сферически цензурированной гауссовской меры в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, получено неравенство Пуанкаре.

1. Вступ

Метою статті є доведення нерівності Пуанкаре для сферично цензурованної багатовимірної гауссової міри та логарифмічної нерівності Соболєва для проекції цієї міри на пряму. Наведемо необхідні попередні відомості. Нехай μ — ймовірнісна міра на $\mathbf{R}^n$, абсолютно неперервна відносно гассової міри. Далі ми використовуємо позначення

$$\mathsf{E}_\mu f = \int f \, d\mu,$$

$$\mathrm{Var}_\mu f = \int f^2 \, d\mu - \left(\int f \, d\mu \right)^2.$$

для, відповідно, математичного сподівання та дисперсії функції f відносно міри μ. Для невід'ємної функції f також позначатимемо ентропію функції f відносно міри μ:

$$\mathrm{Ent}_\mu f = \int f \ln f \, d\mu - \int f \, d\mu \int \ln f \, d\mu.$$

За означенням для міри μ виконується логарифмічна нерівність Соболєва, зі сталою $c > 0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично інтегровні відносно міри μ, виконується

$$\mathrm{Ent}_\mu f^2 \leq 2c \, \mathsf{E}_\mu \, \|\nabla f\|^2.$$

Для міри μ виконується нерівність Пуанкаре, зі сталою $c > 0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично інтегровні відносно міри μ, виконується

$$\mathrm{Var}_\mu f \leq c \, \mathsf{E}_\mu \, \|\nabla f\|^2$$

Відомо, що з логарифмічної нерівності Соболєва для міри μ випливає нерівність Пуанкаре з тією ж сталою ([4, Proposition 2.1, стр. 144]).

Ключові слова і фрази. Логарифмічна нерівність Соболєва, нерівність Пуанкаре, цензурована гауссова міра.

Нехай γ_n — стандартна гауссова міра на $\mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^n$ — довільна вимірна множина з $\gamma_n(V) > 0$. Під цензурованою гауссовою мірою надалі ми розуміємо міру γ_n^V,

$$\gamma_n^V(A) = \frac{\gamma_n(A \cap V)}{\gamma_n(V)}$$

тобто умовну гауссову міру, в якій V — множина допустимих значень, а відповідно $\mathbf{R}^n \setminus V$ — цензурована множина.

Класичні доведення логарифмічної нерівності Соболєва та Пуанкаре, наприклад метод Бакрі–Емері [3], потребують обмежень на похідну від логарифмічної похідної міри і не є безпосередньо застосовними до цензурованих мір (за винятком тривіального випадку $V = \mathbf{R}^n$). Такі методи, однак, неважко узагальнити для отримання логарифмічної нерівності та нерівності Пуанкаре для міри γ_V^n з опуклими множинами V. Випадок V, що не є опуклою, виявляється істотно більш складним; його дослідження було започатковане в недавній статті [2], цілком присвяченій геометрично найпростішому випадку, в якому цензурована множина є кулею. Міру γ_n^V в якій $\mathbf{R}^n \setminus V$ — куля ми називаємо *сферично цензурованою* гауссовою мірою. У статті [2] запропоновані методи доведення нерівності Пуанкаре для сферично цензурованої гауссової міри та оцінки для відповідних сталих c в термінах радіуса R цензурованої кулі.

В данній статті ми отримуємо верхню оцінку на сталу c в нерівності Пуанкаре для сферично цензурованої міри, яка є поліміальною відносно радіуса кулі. Для цього ми, використовуємо метод, запропонований в [1] аналізуючи сталу в логарифмічній нерівності Соболєва для одномірної проекції сферично цензурованої гауссової міри на пряму, що проходить через центр відповідної кулі та центр координат. Це, як наслідок дає оцінку на сталу в нерівності Пуанкаре для такої міри, що дозволяє застосувати метод "розкладу дисперсії" ("decomposition of variance") зі статтті [2].

Істотна відмінність між мірами з опуклими допустимими множинами та сферично цензурованими добре ілюструє той факт, що, згідно з рівняннями [2], відповідна стала з необхідністю буде залежати від радіусу цензурованої кулі. Водночас, характер такої залежності ще не є достатньо дослідженим. В [2] виказується гіпотеза про те, що стала c при великих R не перевищує $c_1(1 + R^2)$. З іншого боку, для деяких випадків (R велике і відстань від початку координат до центру кулі лежить в інтервалі $[0, R + \sqrt{2}]$) у [2] отримана лише значно слабша оцінка $c \le c_1 \exp\{c_2 R^2\}$.

2. Основна частина

Гауссова міра ротаційно інваріантна відносно центру координат, тому далі ми можемо не порушуючи загальності, досліджувати нерівність Пуанкаре для сферично цензурованої гауссової міри у випадку, коли центр відповідної кулі має вигляд $(a, 0, 0, \dots, 0)$, де $a \in [0; R + \sqrt{2}]$. Позначимо $\mu_n^{a,R}$ таку сферично цензуровану міру, та $\mu_{n,a,R}$ її проекцію на вісь (1, 0, 0, ..., 0).

Зазначимо, що щільність міри $\mu_{n,a,R}$ має вигляд

$$\rho_{\mu_{n,a,R}}(x) = \begin{cases} \frac{c_{n-1} e^{-ax + \frac{a^2 - R^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1 - B_n(a,R))} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2}), & x \in [a - R, a + R], \\ \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1 - B_n(a,R))}, & \text{для інших } x. \end{cases}$$

де $B_n(a, R) = \gamma_n(B((\underbrace{a, 0, , \dots, 0}_{n}); R)$,

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{[0,\pi]^{n-2}} \sin(\vartheta_1)\dots(\sin(\vartheta_{n-2}))^{n-2}\, d\vartheta_1 \dots \vartheta_{\vartheta-2}.$$

Теорема 2.1. *Для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і f' квадратично інтегровані відносно міри $\mu_{n,a,R}$,*

$$\mathrm{Ent}_{\mu_{n,a,R}} f^2 \le 2c_{n,R}\, \mathsf{E}_{\mu_{n,a,R}} (f')^2.$$

де

$$c_{n,R} = \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2}(1+R)\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + \frac{2\sqrt{2}\pi + 4c_n H_{n-1}(\sqrt{2}R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}\right) + 1.$$

Зауваження 2.1. Зазначимо, що

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(2k)!!}{(2(k-m))!!} x^{2(k-m)},$$

$$\begin{aligned} H_{2k}(x) &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k-2m-1)!!} x^{2k-2m-1} + (2k-1)!!\, e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &\le \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k-2m-1)!!} x^{2k-2m-1} + (2k-1)!! \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

тобто функція H_n обмежується поліномом. Отже, як вже нагадувалось, стала

$$c_{n,R} \le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1+R)\frac{H_{n-2}(R)}{(n-3)!!} + \frac{2\sqrt{2}\pi + 4c_n H_{n-1}(\sqrt{2}R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{c_{n-1}(n-3)!!}\right) + 1$$

в нерівності Соболєва для міри $\mu_{n,a,R}$ допускає оцінку, поліноміальну за R.

Наслідок 2.1. *Має місце нерівність Пуанкаре для $\mu_{n,a,R}$:*

$$\mathrm{Var}_{\mu_{n,a,R}} f \le c_{n,R} \int |f'|^2\, d\mu_{n,a,R}$$

Нерівність Пуанкаре для міри $\mu_n^{a,R}$ з поліноміально залежною від R константою, є наслідком нерівності Пуанкаре для міри $\mu_{n,a,R}$. Сформулюємо це твердження, його доведення випливає з наслідка 2.1, формул (4.1) і (4.3) статті [2].

Теорема 2.2. *Має місце нерівність Пуанкаре для гауссової міри з вирізаною кулею $\mu_n^{a,R}$:*

$$\mathrm{Var}_{\mu_n^{a,R}} f \le \left(c_{n,R} + 1 + \frac{R^2}{n-1}\right) \int \|\nabla f\|^2\, d\mu_n^{a,R}.$$

3. Доведення основних результатів

Умова яка доводиться в наступній лемі, є достаньою для виконання логарифмічної нерівності Соболєва з твердження теореми 2.1. Це є результат статті [1]. Тому доведення теоремы 2.1 фактично зводиться до леми 3.1.

Лема 3.1. *Виконується нерівність*

$$\begin{aligned} K_{\mu_{n,a,R}}(x) &= \frac{\rho_{\gamma_1}\left(F_{\gamma_1}^{-1}(F_{\mu_{n,a,R}}(x))\right)}{\rho_{\mu_{n,a,R}(x)}} \le c_{n,R} \\ &= \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2}(1+R)\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + \frac{2\sqrt{2}\pi + 4c_n H_{n-1}(\sqrt{2}R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}\right) + 1 \end{aligned}$$

де $F_{\mu_{n,a,R}}(x), F_{\gamma_1}$ — функції розподілу відповідних мір.

Почнемо доведення леми 3.1 з випадку коли $x \in (-\infty, a-R] \cup [a+R, \infty)$.

Лема 3.2. *Для $x \in (-\infty, a-R] \cup [a+R, \infty)$ вірна нерівність $K_{\mu_{n,a,R}}(x) \le 1$.*

Доведення. Будемо позначати $I(p) := \rho_{\gamma_1}(F_{\gamma_1}^{-1}(p))$ ізопериметричну функцію стандартної гауссової міри. Помітимо, що $I'(p) = -F_{\gamma_1}^{-1}(p)$. Тоді для будь-якого $c > 1$ і $x \le F_{\gamma_1}^{-1}(1/c)$ ми маємо

$$[I(cF_{\gamma_1}(x))]' = -F_{\gamma_1}^{-1}(cF_{\gamma_1}(x))c\rho_{\gamma_1}(x) \le (-x)c\rho_{\gamma_1}(x) = c\rho'_{\gamma_1}(x)$$

тому, що $F_{\gamma_1}^{-1}$ зростаюча функція. Зрозуміло, що обидві функції $I(cF_{\gamma_1}(x))$ і $\rho_{\gamma_1}(x)$ прямують до нуля при $x \to -\infty$, отже

$$I(cF_{\gamma_1}(x)) = \int_{-\infty}^{x} [I(cF_{\gamma_1}(y))]'\, dy \le c\int_{-\infty}^{x} \rho'_{\gamma_1}(y)\, dy = c\rho_{\gamma_1}(x), \qquad x \le F_{\gamma_1}^{-1}(1/c).$$

Помітимо, що для $x \le a-R$

$$F_{\mu_{n,a,R}}(x) = \frac{1}{1-B_n(a,R)}F_{\gamma_1}(x), \qquad \rho_{\mu_{n,a,R}} = \frac{1}{1-B_n(a,R)}\rho_{\gamma_1}(x),$$

і $(1-B_n(a,R))^{-1} > 1$. Також, півпростір $\{y = (y_1, y_2, \dots, y_n)\colon y_1 \le x\}$ міститься в $\mathbf{R}^n \setminus B_n(a,R)$, отже

$$F_{\gamma_1}(x) = \gamma_n(\{y = (y_1, y_2, \dots, y_n)\colon y_1 \le x\}) \le (1-B_n(a,R)) \Leftrightarrow x \le F_{\gamma_1}^{-1}\left(1-B_n(a,R)\right),$$

і ми можемо застосувати тільки що доведену нерівність, щоб отримати

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) = \frac{I(F_{\mu_{n,a,R}}(x))}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)} = \frac{I\left(\frac{1}{1-B_n(a,R)}F_{\gamma_1}(x)\right)}{\frac{1}{1-B_n(a,R)}\rho_{\gamma_1}(x)} \le 1, \qquad x < a-R.$$

Для випадку, коли $x \ge a+R$

$$1 - F_{\mu_{n,a,R}(x)} = \frac{1}{1-B_n(a,R)}(1-F_{\gamma_1}(x)).$$

Помітимо, що $I(p) = I(1-p)$ і $F_{\gamma_1}^{-1}(1-F_{\gamma_1}(x)) = -x$, тому ми можемо використати таке саме доведення, як і для випадку $x \le a-R$, що $\hat{K}_\mu(x) \le 1$, бо для будь-якого $c > 1$

$$I(c(1-F_{\gamma_1}(x)) = -c\int_x^\infty F_{\gamma_1}^{-1}\big(c(1-F_{\gamma_1}(y))\big)\, dy \le c\int_x^\infty y\rho'_{\gamma_1}(y)\, dy = c\rho_{\gamma_1}(x). \qquad \square$$

Тепер залишилось довести нерівність з леми 3.1, для випадку $x \in [a-R, a+R]$. Для цього нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 3.3. *Для $x \in (0,1)$ виконується нерівність*

$$I(x) = \rho_{\gamma_1}\left(F_{\gamma_1}^{-1}(x)\right) \le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}(1-x)\sqrt{\ln\frac{1}{1-x}}.$$

Доведення. Покладемо $g(y) = \exp\{-y^2/2\} - F_{\gamma_1}(-y)$. Помітимо, що

$$g'(y) = -y\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} - (-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} = \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - y\right)$$

значить на промені $[0,\infty)$ функція g має один локальний мінімум в точці 0, та зменшується на промені $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. Маємо $g(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0 - 0 =$

0. Отже, $\exp\{-y^2/2\} \geq F_{\gamma_1}(-y)$, $y \in [0, +\infty)$,

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}\right)^2\right\} = x \geq F_{\gamma_1}\left(-\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}\right), \qquad x \in (0,1),$$

$$\Rightarrow F_{\gamma_1}^{-1}(x) \geq -\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}, \qquad x \in (0,1),$$

$$\Rightarrow -F_{\gamma_1}^{-1}(x) \leq \sqrt{2\ln\frac{1}{x}}, \qquad x \in (0,1).$$

Помітимо, що на проміжку $x \in (0, \frac{1}{2})$ має місце нерівність

$$\sqrt{2\ln\frac{1}{x}} \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2\ln\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}}\right).$$

Тому

$$-F_{\gamma_1}^{-1}(x) \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2\ln\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}}\right), \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(I(x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}x\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}\right)' \leq 0, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\left(I(x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}x\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}\right) = 0,$$

маємо

$$I(x) \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}x\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}, \qquad x \in (0, \frac{1}{2}].$$

Нехай $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тоді

$$I(x) = I(1-x) \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}(1-x)\sqrt{2\ln\frac{1}{1-x}}.$$

Для доведення нерівності у випадку $x \in (0, \frac{1}{2}]$ скористаємося наступним фактом:

$$(1-x)\sqrt{\ln\frac{1}{1-x}} \geq x\sqrt{\ln\frac{1}{x}}, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Ця нерівність вірна, так як функція $g_1(x) = (1-x)^2\ln\frac{1}{1-x} - x^2\ln\frac{1}{x}$, приймає значення 0 в точках $\frac{1}{2}$ і 1, і випукла вгору $g_1''(x) = 2(\ln x - \ln(1-x)) \leq 0, x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Отже,

$$I(x) \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}x\sqrt{2\ln\frac{1}{x}} \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}(1-x)\sqrt{2\ln\frac{1}{1-x}}, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \qquad \square$$

Тепер ми можем обмежити функцію

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) \leq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\frac{(1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x))}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)}\sqrt{2\ln\frac{1}{1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x)}}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

З результату наступної леми випливає твердження леми 3.1 для $x \in [a-R, a+R]$, при $a \in [0; R]$.

Лема 3.4. *Якщо $a \in [0;R]$, тоді для $x \in [a-R, a+R]$ виконується нерівність*

$$\frac{(1-F_{\mu_{a,n,R}}(x))}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)}\sqrt{2\ln\frac{1}{1-F_{\mu_{a,n,R}}(x)}} \le \frac{\sqrt{2}RH_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + \frac{2\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R)+1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}$$

Доведення. Позначимо

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \frac{1-F_{\mu_{a,n,R}}(x)}{\rho_{\mu_{a,n,R}}(x)} \\ &= \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} + \frac{e^{\frac{R^2-a^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$A := \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}.$$

Оскільки для $x>0$ має місце нерівність $\int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy < \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$, тоді

$$B := \frac{e^{\frac{R^2-a^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} < \frac{\frac{1}{a+R}e^{-aR-a^2}}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}.$$

Відмітимо, що

$$A \le \frac{1-e^{a(x-a-R)}}{a}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} \le \frac{1-e^{-2aR}}{a}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}$$

Покладемо

$$\begin{aligned} K_2(x) &= \sqrt{\ln\frac{1}{1-F_{\mu_{a,n,R}}(x)}} \\ &= \sqrt{\ln\frac{\sqrt{2\pi}(1-\gamma_n(B(a;R)))}{c_{n-1}e^{\frac{a^2-R^2}{2}}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}} \\ &\le \sqrt{\ln\frac{\sqrt{2\pi}(1-\gamma_n(B(0;R-a)))}{c_{n-1}e^{\frac{a^2-R^2}{2}}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}} \\ &= \sqrt{\ln\frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)e^{-\frac{(R-a)^2}{2}}}{c_{n-1}e^{\frac{a^2-R^2}{2}}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}} \\ &= \sqrt{2aR+\ln M_1(x)} \le \sqrt{2aR} + \sqrt{\ln M_1(x)} \le \sqrt{2aR} + M_1(x), \end{aligned}$$

де

$$M(x) = \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}\big(\sqrt{R^2-(a-y)^2}\big)\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}.$$

Покладемо

$$C := \sqrt{2aR},$$

$$D := \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}.$$

Нерівність 1.

$$AC \le \frac{1-e^{-2aR}}{a}\sqrt{2aR}H_{n-2}(R) = \sqrt{1-e^{-2aR}}\sqrt{\frac{1-e^{-2aR}}{2aR}}\sqrt{2}R\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}$$
$$\le \sqrt{2}R\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 2.

$$AD = \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{-ax+a^2+aR}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}H_{n-2}(0)} \le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R)}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 3.

$$BC \le \frac{\frac{1}{a+R}e^{-aR-a^2}}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}\sqrt{2aR}$$
$$= \frac{e^{a(x-(a+R))}}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}\frac{\sqrt{2aR}}{a+R} \le \frac{1}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\le \frac{1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 4.

$$BD = \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}\frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)e^{\frac{ax-(a+R)^2}{2}}}{c_{n-1}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}H_{n-2}(0)} \le \frac{\sqrt{2\pi}c_nH_{n-1}(R)}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Для $a \in [0; R]$

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) \le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} K_1(x) K_2(x) = \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}(AC + AD + BC + BD)$$
$$\le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2}R\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + 2\frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1}H_{n-2}(0)} + \frac{1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}\right) \le c_{n,R}$$

многочлен $n-1$ степені. □

Наступна лема завершує загальне доведення, з нього випливає твердження леми 3.1 для $x \in [a-R, a+R]$, при $a \in [R; R+\sqrt{2}]$.

Лема 3.5. *Якщо $a \in [R; R+\sqrt{2}]$, тоді для $x \in [a-R, a+R]$ виконується нерівність*

$$\frac{(1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x))}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)}\sqrt{2\ln\frac{1}{1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x)}} \le \sqrt{2}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + \frac{2\sqrt{2\pi}+1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Доведення. Позначимо

$$K_1(x) = \frac{1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x)}{\rho_{\mu_{a,n,R}}(x)}$$
$$= \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2})dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} + \frac{e^{\frac{R^2-a^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}.$$

Покладемо

$$A := \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2})dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})}.$$

Оскільки для $x > 0$ має місце нерівність $\int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy < \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$, тоді

$$B := \frac{e^{\frac{R^2-a^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} < \frac{\frac{1}{a+R}e^{-aR-a^2}}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}.$$

Відмітимо, що

$$A \le \frac{1 - e^{a(x-a-R)}}{a}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} \le \frac{1 - e^{-2aR}}{a}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}.$$

Покладемо

$$K_2(x) = \sqrt{\ln\frac{1}{1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x)}}$$
$$= \sqrt{\ln\frac{\sqrt{2\pi}(1 - \gamma_n(B(a;R)))}{c_{n-1}e^{\frac{a^2-R^2}{2}}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}}$$
$$\le \sqrt{\ln\frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{\frac{a^2-R^2}{2}}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a+R)^2}{2} + \ln M_2(x)} \le \frac{a+R}{\sqrt{2}} + \sqrt{\ln M_2(x)} \le \frac{a+R}{\sqrt{2}} + M_2(x),$$

де

$$M_2(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}.$$

Покладемо

$$C := \frac{a+R}{\sqrt{2}},$$

$$D := \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}dy}.$$

Нерівність 1.

$$AC \le \frac{1-e^{-2aR}}{a}\frac{a+R}{\sqrt{2}}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} \le \frac{a+R}{\sqrt{2}a}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{R}{\sqrt{2}a}\right)\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}$$
$$\le \sqrt{2}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 2.

$$AD = \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}{e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{-ax+a^2+aR}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \le \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\le \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 3.

$$BC \le \frac{\frac{1}{a+R}e^{-aR-a^2}}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}\frac{a+R}{\sqrt{2}} = \frac{e^{a(x-(a+R))}}{\sqrt{2}c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2}c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \le \frac{1}{\sqrt{2}c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Нерівність 4.

$$BD = \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$
$$\times \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}e^{a^2+aR}\int_x^{a+R} e^{-ay}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2})\,dy + e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{c_{n-1}e^{-ax}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{(a+R)^2}{2}}\int_{a+R}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy}$$
$$\le \frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{ax-(a+R)^2}{2}}}{c_{n-1}H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \le \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}H_{n-2}(0)} \le \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}.$$

Для $x \in [R; R+\sqrt{2}]$

$$\begin{aligned} K_{\mu_{n,a,R}}(x) &\le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} K_1(x) K_2(x) = \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}(AC + AD + BC + BD) \\ &\le \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}\left(\sqrt{2}\frac{H_{n-2}(R)}{H_{n-2}(0)} + 2\frac{\sqrt{2\pi}}{c_{n-1}H_{n-2}(0)} + \frac{1}{c_{n-1}H_{n-2}(0)}\right) \\ &\le c_{n,R}. \end{aligned}$$

□

Як вже було зазначено, з результату лемми 3.1 випливають результати теореми 2.1. і теореми 2.2, що і треба було довести.

Подяка. Стаття підготовлена частково під час візиту автора до університету Потсдама; автор висловлює глибоку подяку університету Потсдама і особисто Sylvie Roelly за гостинність. Автор також вдячний Emmanuel Boissard за плідну дискусію, що стосуються рукопису.

Література

1. A. Kulik and T. Tymoshkevych, *Lift zonoid order and functional inequalities*, Теорія ймовір. та матем. статист. **89** (2013), 75–90.
2. E. Boissard, P. Cattiaux, A. Guillin, and L. Miclo, *Ornstein–Uhlenbeck pinball: I. Poincare inequalities in a punctured domain*, arXiv:1309.0986v1.
3. D. Bakry and M. Emery, *Hypercontractivity for diffusion semi-groupes*, Comptes rendus des seances de l'Academie des sciences. Serie 1, Mathematique Y., no. 15, 775–778.
4. M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de probabilités (Strasbourg), vol. 33, 1999, pp. 120–216.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: tymoshkevych@gmail.com

Надійшла 04/09/2014