Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 174–183

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 174–183

ОБМЕЖЕНІ ВЛАСТИВОСТІ ІЗОМЕТРІЇ ДЛЯ МАТРИЦЬ, ЕЛЕМЕНТИ ЯКИХ Є ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ З ПЕВНИХ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА $L_U(\Omega)$

УДК 519.21

В. Б. ТРОШКІ

Анотація. Останнім часом стрімко почав розвиватись новий підхід в обробці сигналів під назвою стискаюче зондування. По цій тематиці з'явилось багато робіт, однак і надалі залишається невирішеною задача побудови найбільш універсальної матриці вимірювань. В даній роботі запропоновано в якості такої матриці використовувати матрицю елементами якої є випадкові величини з певних просторів Орліча $L_U(\Omega)$. Також встановлено, що матриці з такими елементами задовільняють обмеженим властивостям ізометрії, що є одним з основних понять в стисткаючому зондуванні.

Abstract. Nowadays a new approach to the signal processing that called compressive sensing is actively developing. There are many works on this subject, but the problem of constructing the universal matrix of measurements is not solved yet. In this paper, we propose to use a matrix the elements of which are random variables from some Orlicz spaces $L_U(\Omega)$. Also established, that the matrix with such elements satisfies the restricted isometry properties, which is one of the main concepts in compressive sensing.

Аннотация. В последнее время стремительно начал развиваться новый подход в обработке сигналов под названием сжимающее зондирования. По этой тематике появилось много работ, однако и в дальнейшем остается нерешенной задача построения наиболее универсальной матрицы измерений. В данной работе предложено в качестве такой матрицы использовать матрицу элементами которой являются случайные величины с некоторых пространств Орлича $L_U(\Omega)$. Также установлено, что матрицы с такими элементами удовлетворяют ограниченным свойствам изометрии, что является одним из основных понятий в сжимающему зондировании.

1. Вступ

Випадкові матриці широко використовуються в стискаючому зондуванні для кодування вектора $x \in \mathbf{R}^N$, який ми отримали внаслідок вимірювання $y = Ax$, де A — $n \times N$ випадкова матриця норма кожного стовпця якої дорівнює одиниці. Стискаюче зондування — це новий підхід в обробці сигналів. Його основною метою є створення схеми відновлення сигналів, які б давали хороші результати при малій кількості вимірювань. Початки дана теорія бере в роботах Кашина [1], Горнаєва і Глускіна [2], однак більш стрімкий та сучасний її розвиток почався з робіт Кандеса, Тао [3] та Донаго [4].

Одним з основних понять в цій теорії є властивість обмеженої ізометрії. Кажуть, що матриця A задовільняє обмеженим властивостям ізометрії порядку K якщо існує $\delta \in (0;1)$ таке, що для довільного $x \in \Sigma_K$ виконується $(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|Ax\|_2^2 \le (1+\delta)\| x\|_2^2$, де Σ_K — це множина всіх векторів з $\mathbf{R}^N$, які містять не більше ніж K ненульових координат. Завдання по встановленню обмеженої властивості ізометрії для певних класів випадкових величин вже розглядались. Так Войтажчик в роботі

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 68P30; Secondary 68W20.

Ключові слова і фрази. Простори Орліча, обмежені властивості ізометрії, стискаюче зондування.

[5] в якості ξ розглядав нормовані гауссові випадкові величини. В роботі [6] Баранік, Давенпорт, Девор, Вакін довели обмежені властивості ізометрії для випадкових матриць для яких виконується нерівність $\mathsf{P}\{\left|\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2\right| > \delta\|x\|_2^2\} \leq 2\exp\{-c_0(\delta)n\}$, де $c_0(\delta)$ — це деяка стала, що залежить від δ. Пізніше Девор, Петрова, Войтажчик [7] встановили, що матриці, елементи яких є реалізаціями субгауссових випадкових величин також можуть бути використані для кодування сигналів.

В даній роботі показано, що матриця A елементами якої є випадкові величини з просторів Орліча $L_U(\Omega)$, де

$$U_\alpha(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases} \quad \text{коли } 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

задовільняє обмеженим властивостям ізометрії. Більше того в роботі також розглянута сім'я випадкових величин $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, де $U_{1\alpha}(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$, яка була введена в роботі [8]. Показано, що ця сім'я є лінійним простором. Також знайдені необхідна та достатня умови належності випадкових величин цьому простору та показано, що матриці елементи яких є незалежними реєлізаціями випадкових величин з цього простору задовільняють обмеженим властивостям ізометрії. Всі необхідні означення та властивості просторів Орліча можна знайти в книзі [9].

2. Необхідні відомості

Означення 2.1 ([9])**.** Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbf{R}\}$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Означення 2.2 ([9])**.** C-функція Орліча $U = \{U(x), x \in \mathbf{R}\}$ називається N-функцією Орліча, якщо виконуються такі умови:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{U(x)}{x} = 0,$$
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 2.3 ([9])**.** Нехай U — довільна C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що

$$\mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча — це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 2.4. Для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з простору $L_U(\Omega)$ справедлива нерівність:

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_U^2.$$

де C_U — деяка абсолютна константа.

Позначимо $L_{U_\alpha}(\Omega)$ — це простір Орліча, що породжений функцією $U_\alpha(x)$. Нехай $U_{1\alpha}(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$. $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ — сім'я таких випадкових величин ξ, що існує r при якому $\mathsf{E}\, U_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Розглянемо функціонал

$$\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}} = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2\right\}. \tag{2}$$

Лема 2.1 ([10]). *Для того, щоб $\xi \in L_{U_\alpha}(\Omega)$ необхідно й достатньо, щоб $\xi \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ і справджувалися нерівності:*

$$\|\xi\|_{U_\alpha} \le \left(e^{2/\alpha+2}\right) \langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}};$$

$$\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}} \le \|\xi\|_{U_\alpha} \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}.$$

Лема 2.2 ([8]). *Для простору Орліча $L_{U_\alpha}(\Omega)$, де $U_\alpha(x)$ задана в (1) справджується умова* **H** *зі сталою*

$$C_{\psi,\alpha} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{e^{2/\alpha+2}\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha}}{\frac{1}{2^{1/\alpha}}\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha}\alpha^{1/\alpha}} \right)^2.$$

Лема 2.3 ([11, §15]). *Нехай B_n — це одинична сфера в $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|^*)$, де $\|\cdot\|^*$ — довільна норма. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина $Q_\varepsilon \subset B_n$, що $\#(Q_\varepsilon) \le (\frac{3}{\varepsilon})^n$, де $\#(Q_\varepsilon)$ — це число елементів в Q_ε і для довільного $b \in B_n$ існує таке $q \in Q_\varepsilon$, що $\|b-q\|^* \le \varepsilon$.*

Нехай A — це матриця з n рядків і N стовців, елементи якої a_{ij} це незалежні реалізації випадкової величини ξ для якої $\mathsf{E}\,\xi = 0$ і $\mathsf{E}\,\xi^2 = \frac{1}{n}$.

Означення 2.5 ([6]). Нехай Σ_K — це множина всіх векторів з $\mathbf{R}^N$, які містять не більше ніж K ненульових координат. Кажуть, що матриця A задовільняє обмеженим властивостям ізометрії порядку K якщо існує $\delta \in (0;1)$ таке, що для довільного $x \in \Sigma_K$

$$(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|Ax\|_2^2 \le (1+\delta)\|x\|_2^2.$$

3. Основні результати

Лема 3.1. *Для того, щоб $\xi \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ необхідно і достатньо щоб існували такі сталі $C > 0$, $D > 0$, що для всіх $x > 0$:*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \le C \exp\left\{-\frac{|x|^\alpha}{D^\alpha}\right\} \tag{3}$$

Більш того $\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}} \le (1+C)^{\frac{1}{\alpha}} D$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\xi \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$. Тоді з нерівності Чебишева та визначення сім'ї $\xi \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ випливає, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{|\xi| \ge x\} &= \mathsf{P}\left\{\exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\} \ge \exp\left\{\left(\frac{x}{\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}\right\} \\ &\le \frac{\mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}}{\exp\left\{\left(\frac{x}{\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{x}{\langle\!\langle \xi \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Достатність. Нехай існують такі сталі $C > 0$ і $D > 0$, що виконується (3). Нехай $F(x)$ — це функція розподілу випадкової величини $|\xi|$ і $a > D$. Розглянемо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{a^\alpha}\right\} = \int_0^\infty \exp\left\{\frac{|u|^\alpha}{a^\alpha}\right\} dF(x) = -\int_0^\infty \exp\left\{\frac{|u|^\alpha}{a^\alpha}\right\} d(1-F(u)).$$

Обчислимо даний інтеграл частинами, тоді

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{a^\alpha}\right\} = -(1-F(u))\exp\left\{\left(\frac{u}{a}\right)^\alpha\right\}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1-F(u))\exp\left\{\left(\frac{u}{a}\right)^\alpha\right\} d\left(\frac{u}{a}\right)^\alpha.$$

Перший доданок у верхній межі перетворюється в 0 при $u \to \infty$, оскільки $a > D$ і

$$\begin{aligned}(1-F(u))\exp\left\{\left(\frac{u}{a}\right)^{\alpha}\right\} &\le C\exp\left\{-\left(\frac{u}{D}\right)^{\alpha}\right\}\exp\left\{\left(\frac{u}{a}\right)^{\alpha}\right\}\\ &= C\exp\left\{-\left(\frac{u}{D}\right)^{\alpha}+\left(\frac{u}{a}\right)^{\alpha}\right\}\to 0,\end{aligned}$$

а у нижній межі в 1, тому що $1-F(0)\le 1$. Тоді з нерівності (3)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\frac{|\xi|^{\alpha}}{a^{\alpha}}\right\} &\le 1 + C\int_0^{\infty}\exp\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right\}\exp\left\{-\left(\frac{x}{D}\right)^{\alpha}\right\} d\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\\ &= 1 + C\int_0^{\infty}\exp\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}-\left(\frac{x}{D}\right)^{\alpha}\right\} d\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\\ &= 1 + C\int_0^{\infty}\exp\left\{x^{\alpha}\left(\frac{1}{a^{\alpha}}-\frac{1}{D^{\alpha}}\right)\right\} d\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\\ &= 1+\frac{C}{a^{\alpha}}\frac{1}{\frac{1}{a^{\alpha}}-\frac{1}{D^{\alpha}}}\exp\left\{x^{\alpha}\left(\frac{1}{a^{\alpha}}-\frac{1}{D^{\alpha}}\right)\right\}\Bigg|_0^{\infty} = 1+\frac{C}{a^{\alpha}}\frac{a^{\alpha}D^{\alpha}}{a^{\alpha}-D^{\alpha}}\\ &= 1+\frac{CD^{\alpha}}{a^{\alpha}-D^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Якщо $a = D(C+1)^{\frac{1}{\alpha}}$, то $\mathsf{E}\exp\{|\xi|^{\alpha}/a^{\alpha}\}\le 2$, а звідси випливає, що $\xi\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$. $\square$

Лема 3.2. *Нехай для симетричної випадкової величини ξ виконується при $D>0$, $x>0$*

$$\mathsf{P}\{|\xi|>x\}\le R\exp\left\{-\frac{x^{\alpha}}{D}\right\},\qquad 0<\alpha<1,$$

R-це деяка стала. Тоді для випадкової величини $\eta=\xi^2-\mathsf{E}\,\xi^2$ буде справджуватись:

$$\mathsf{P}\{|\eta|>x\}\le a\exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{D}\right\},\tag{5}$$

де

$$a = R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\alpha/2}\right\}\right).$$

Доведення. Для $x>0$ буде виконуватись:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{|\eta|>x\} &= \mathsf{P}\{|\xi^2-\mathsf{E}\,\xi^2|>x\} = \mathsf{P}\{\xi^2-\mathsf{E}\,\xi^2>x\}+\mathsf{P}\{\xi^2-\mathsf{E}\,\xi^2<-x\}\\ &= \mathsf{P}\{\xi^2>x+\mathsf{E}\,\xi^2\}+\mathsf{P}\{\xi^2<\mathsf{E}\,\xi^2-x\} = \mathsf{P}\left\{|\xi|>\sqrt{x+\mathsf{E}\,\xi^2}\right\}+Z(x)\\ &\le R\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}+Z(x),\end{aligned}$$

де

$$Z(x)=\begin{cases}0, & x\ge \mathsf{E}\,\xi^2,\\ \mathsf{P}\{|\xi|<\sqrt{\mathsf{E}\,\xi^2-x}\}, & x<\mathsf{E}\,\xi^2.\end{cases}$$

Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF(x) = 2\int_0^{\infty}x^2\,dF(x) = -2\int_0^{\infty}x^2\,d(1-F(x))\\ &= -2x^2\left(1-F(x)\right)\big|_0^{\infty}+4\int_0^{\infty}x(1-F(x))\,dx\le 4R\int_0^{\infty}x\exp\left\{-D^{-1}x^{\alpha}\right\}dx\\ &= \frac{4RD^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha}\int_0^{\infty}u^{\frac{2}{\alpha}-1}\exp\{-u\}\,du = \frac{4R}{\alpha}D^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Таким чином при $x < \mathsf{E}\,\xi^2$ можна записати, що

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{|\eta| > x\} &\le R\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\
&\quad + R\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\exp\left\{D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\
&\quad \times \mathsf{P}\left\{|\xi| < \sqrt{\mathsf{E}\,\xi^2 - x}\right\} \\
&= R\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\
&\quad \times \left(1+\mathsf{P}\left\{|\xi| < \sqrt{\mathsf{E}\,\xi^2 - x}\right\}\exp\left\{D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) \\
&\le R\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\
&\quad \times \sup_{0<x\le \mathsf{E}\,\xi^2}\left(1+\mathsf{P}\left\{|\xi| < \sqrt{\mathsf{E}\,\xi^2 - x}\right\}\exp\left\{D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) \\
&\le R\exp\left\{-D^{-1}(x+\mathsf{E}\,\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\sup_{0<x\le \mathsf{E}\,\xi^2}\left(1+\exp\left\{D^{-1}(x+\mathsf{E}\,\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) \\
&\le \left(1+\exp\left\{D^{-1}(2\,\mathsf{E}\,\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)R\exp\left\{-D^{-1}(x+\mathsf{E}\,\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\
&\le \left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)R\exp\left\{-D^{(-1)}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Тоді для довільних $x > 0$ отримаємо

$$
\mathsf{P}\{|\eta| > x\} \le a\exp\left\{-D^{-1}\left(x+\mathsf{E}\,\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \le a\exp\left\{-D^{-1}x^{\frac{\alpha}{2}}\right\},
$$

де

$$
a = R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right). \qquad \square
$$

Лема 3.3. *Сім'я $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ є лінійним простором відносно функціонала $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}$ визначеного в* (2). *Більше того, якщо $\xi \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, а $\eta = \xi^2 - \mathsf{E}\,\xi^2$, то $\eta \in S_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}(\Omega)$ і для незалежних випадкових величин η_i, $i = 1,\dots,n$, розподілених так само як і η виконується умова* **H** *зі сталою*

$$
C_{\psi,\frac{\alpha}{2}} = 4\cdot 9^{\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{e^{4/\alpha+2}\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/\alpha}}{\frac{1}{2^{4/\alpha}}\left(e^{4/\alpha}+1\right)^{-2/\alpha}\alpha^{2/\alpha}}\right)^2.
$$

Доведення. Нехай $\lambda \ne 0$ — це деяка стала і $\xi \in S_{U_{1\alpha}}$. Тоді

$$
\begin{aligned}
\langle\langle\lambda\xi\rangle\rangle_{U_{1\alpha}} &= \inf\left\{r>0; \mathsf{E}\,U_{1\alpha}\left(\frac{\lambda\xi}{r}\right)\le 2\right\} = |\lambda|\inf\left\{\frac{|r|}{\lambda}>0; \mathsf{E}\,U_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r/|\lambda|}\right)\le 2\right\} \\
&= |\lambda|\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Покажемо, що якщо $\xi_1,\xi_2 \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ то і $\xi_1+\xi_2 \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$. Для цього розглянемо

$$
\mathsf{E}\left(U_{1\alpha}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{r}\right)\right) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{(\xi_1+\xi_2)^\alpha}{r}\right\}.
$$

З того, що $\alpha < 1$ і нерівності Гельдера отримаємо

$$
\mathsf{E}\left(U_{1\alpha}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{r}\right)\right) \le \mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi_1^\alpha}{r}\frac{\xi_2^\alpha}{r}\right\} \le \left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{p\xi_1^\alpha}{r}\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{q\xi_2^\alpha}{r}\right\}\right)^{\frac{1}{q}},
$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тепер якщо покласти $r=\max\{p\langle\langle\xi_1\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}, q\langle\langle\xi_2\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}\}$, то

$$\mathsf{E}\left(U_{1\alpha}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{r}\right)\right)\le\left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi_1^\alpha}{\langle\langle\xi_1\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}}\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi_2^\alpha}{\langle\langle\xi_2\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\le 2^{1/p}\cdot 2^{1/q}=2.$$

Це і доводить, що $\xi_1+\xi_2\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$.

Оскільки $\xi\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, то з (4) випливає нерівність

$$\mathsf{P}\{|\xi|\ge x\}\le 2\exp\left\{-\left(\frac{x}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}$$

Тоді з леми 3.2 випливає, що

$$\mathsf{P}\{|\eta|\ge x\}\le a\exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\langle\langle\xi\rangle\rangle^\alpha_{U_{1\alpha}}}\right\}$$

тобто $\eta\in S_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}(\Omega)$. Оскільки з леми 2.2 випливає, що для випадкових величин з простору $L_{U_\alpha}(\Omega)$ буде виконуватись умова $\mathbf{H}$, то

$$\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|^2_{U_{\alpha/2}}\le C_{\psi,\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=1}^n\|\eta_i\|^2_{U_{\frac{\alpha}{2}}}. \qquad\square$$

.

Наслідок 3.1. *Нехай η_i, $i=1,\dots,n$, незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\eta\in S_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}(\Omega)$. Тоді буде справджуватись наступна нерівність*

$$\left\langle\!\!\left\langle\sum_{i=1}^n\eta_i\right\rangle\!\!\right\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}\le C_{S,\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=1}^n\langle\langle\eta_i\rangle\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}},$$

де $C_{S,\frac{\alpha}{2}}=C_{\psi,\frac{\alpha}{2}}\left(e^{2/\alpha+2}\right)^2\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha}$.

Доведення. З лем 2.1 та 3.3 випливають наступні нерівності

$$\left\langle\!\!\left\langle\sum_{i=1}^n\eta_i\right\rangle\!\!\right\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}\le\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha}\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|^2_{U_{\frac{\alpha}{2}}}\le\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha}C_{\psi,\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=1}^n\|\eta_i\|^2_{U_{\frac{\alpha}{2}}}$$
$$\le\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha}\left(e^{2/\alpha+2}\right)^2C_{\psi,\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=1}^n\langle\langle\eta_i\rangle\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}. \qquad\square$$

Зауваження 3.1. Легко показати, що якщо ξ_i, $i=1,\dots,n$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\xi_i\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, то буде справджуватись наступна нерівність

$$\left\langle\!\!\left\langle\sum_{i=1}^n\xi_i\right\rangle\!\!\right\rangle^2_{U_{1\alpha}}\le\tilde{C_S}\sum_{i=1}^n\langle\langle\xi_i\rangle\rangle^2_{U_{1\alpha}},$$

де $\tilde{C_S}=C_{\psi,\alpha}\left(e^{2/\alpha+2}\right)^2\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha}$.

Теорема 3.1. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n\le N$, $a_{ij}=n^{-1/2}\xi_{ij}$, де $\xi_{ij}\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, ξ_{ij} — незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x\in\boldsymbol{R}^N$ та для всіх i та j, $\mathsf{E}\xi_{ij}^2=b$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2-b\|x\|_2^2\right|>\varepsilon\|x\|_2^2\right\}\le 2\exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C_S}g)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\},$$

де

$$a = R\left(1 + \exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$$

— це стала з леми 3.2, $C_{S,\frac{\alpha}{2}}$ *та* $\tilde{C}_S$ *визначені відповідно в наслідку 3.1 та зауваженні 3.1,* $g = \langle\!\langle \xi_{ij} \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}}$.

Доведення. Не зменшуючи загальності можна покласти $\|x\|_2^2 = 1$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ буде справджуватись

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\right| > \varepsilon\|x\|_2^2\right\} &= \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j a_{ij}\right)^2 - b\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - b\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - nb\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > n\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Оскільки $b = \mathsf{E}\,\xi_{ij}^2$, то

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\right| > \varepsilon\right\} &\le \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \xi_{ij}^2\right)\right| > n\varepsilon\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2\right)\right| > n\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Нехай $\theta_i = \sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}$. Тоді з леми 3.3 отримаємо, що $\theta_i \in S_{U_{1\alpha}}$, $i = 1, \ldots, n$. З доведення леми 3.1 випливає, що

$$\mathsf{P}\{|\theta_i| > \varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{\langle\!\langle \theta_i \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}.$$

Тоді, згідно леми 3.2, має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\left|\theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2\right| > \varepsilon\right\} \le a\exp\left\{-\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\langle\!\langle \theta_i \rangle\!\rangle^\alpha_{U_{1\alpha}}}\right\}.$$

Нехай $\zeta = \sum_{i=1}^n \left(\theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2\right)$. З леми 3.3 випливає, що $\zeta \in S_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}$, а з леми 3.1 отримаємо, що

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\right| > \varepsilon\right\} = \mathsf{P}\{|\zeta| > n\varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{n\varepsilon}{\langle\!\langle \zeta \rangle\!\rangle_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Оскільки для простору $S_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}$ виконується умова **H** зі сталою $C_{S,\frac{\alpha}{2}}$, то

$$\langle\!\langle \zeta \rangle\!\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} = \left\langle\!\!\left\langle \sum_{i=1}^n \left(\theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2\right) \right\rangle\!\!\right\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \le C_{S,\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^n \langle\!\langle \theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2 \rangle\!\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}}.$$

З леми 3.1 випливає, що $\langle\!\langle \theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2 \rangle\!\rangle_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \le (1+a)^{2/\alpha} \langle\!\langle \theta_i \rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}$.

Із зауваження 3.1 отримаємо, що для випадкових величин з простору $S_{U_{1\alpha}}$ виконується умова $\mathbf{H}$ зі сталою $\tilde{C}_S$, тоді

$$\langle\!\langle \theta_i \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}} = \langle\!\langle \sum_{j=1}^{N} x_j \xi_{ij} \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}} \le \tilde{C}_S \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \langle\!\langle \xi_{ij} \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}} = g \cdot \tilde{C}_S,$$

де $g = \langle\!\langle \xi_{ij} \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}}$.

Тоді

$$\langle\!\langle \theta_i^2 - \mathsf{E}\,\theta_i^2 \rangle\!\rangle_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \le (1+a)^{\frac{4}{\alpha}} \sqrt{g \cdot \tilde{C}_S},$$

а тому $\langle\!\langle \zeta \rangle\!\rangle^2_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \le C_{S,\frac{\alpha}{2}} n (1+a)^{\frac{4}{\alpha}} \tilde{C}_S g$, звідси $\langle\!\langle \zeta \rangle\!\rangle_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \le \left(C_{S,\frac{\alpha}{2}} n (1+a)^{\frac{4}{\alpha}} \tilde{C}_S g\right)^{1/2}$.

Отже,

$$\mathsf{P}\{|\zeta| > n\varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\frac{(n\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}} n (1+a)^{\frac{4}{\alpha}} \tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}} \tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}} (1+a)}\right\}.$$

□

В наступній лемі показано як результат отриманий в теоремі 3.1 може бути використаний для доведення обмеженої властивості ізометрії для фіксованого K-вимірного підпростору. Нехай T — це множина, що містить індекси ненульових елементів у векторі $x \in \mathbf{R}^N$, $\#(T) = K$. Позначимо через X_T множину всіх векторів із $\mathbf{R}^N$ елементи яких нульові, крім тих, індекси яких належать T.

Лема 3.4. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n \le N$, $a_{ij} = n^{-1/2}\xi_{ij}$, де $\xi_{ij} \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, ξ_{ij} — незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x \in \boldsymbol{R}^N$ та для всіх i та j, $\mathsf{E}\,\xi_{ij}^2 = 1$. Тоді для довільної множини індексів T, вимірності $K < n$, $X_T \subset R^N$ і довільного $\varepsilon \in (0;1)$ для всіх $x \in X_T$ справджується*

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2\right| \ge \varepsilon \|x\|_2^2\right\} \le 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}} \tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}} (1+a)}\right\},$$

де

$$a = R\left(1 + \exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\alpha/2}\right\}\right),$$

$C_{S,\frac{\alpha}{2}}$ та $\tilde{C}_S$ визначені відповідно в наслідку 3.1 та зауваженні 3.1, $g = \langle\!\langle \xi_{ij} \rangle\!\rangle^2_{U_{1\alpha}}$.

Доведення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $\|x\|_2^2 = 1$. Це можливо, оскільки Ax є лінійним перетворенням. Нехай $A_q = \left|\|Aq\|_2^2 - \|q\|_2^2\right|$, $q \in \mathbf{R}^N$. З леми 2.3 випливає, що ми можемо вибрати скінченну множину точок $Q_T \subseteq X_T$, $\#(Q_T) \le (12/\varepsilon)^K$ таку, що $\|x - q\|_2 \le \frac{\varepsilon}{4}$, для всіх $q \in Q_T$ і $x \in X_T$. З теореми 3.1 та з властивостей ймовірності випливає, що всіх $q \in Q_T$ і $0 < \varepsilon < 1$ виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{\overline{\bigcap_{q \in Q_T} \{q\colon A_q < \varepsilon\}}\right\} &= \mathsf{P}\left\{\bigcup_{q \in Q_T} \overline{\{q\colon A_q < \varepsilon\}}\right\} = \mathsf{P}\left\{\bigcup_{q \in Q_T} \{q\colon A_q > \varepsilon\}\right\} \\ &\le \sum_{q \in Q_T} \mathsf{P}\{\{q\colon A_q < \varepsilon\}\} \\ &\le 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}} \tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}} (1+a)}\right\}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\mathsf{P}\left\{\bigcap_{q\in Q_T}\{q\colon A_q<\varepsilon\}\right\}=1-\mathsf{P}\left\{\bigcup_{q\in Q_T}\overline{\{q\colon A_q<\varepsilon\}}\right\}$$
$$\geq 1-2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}.$$

Виберемо $\min_{q\in Q_T}\|x-q\|_2\leq\frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки виконується $\|Aq\|_2^2\leq(1+\varepsilon)\|q\|_2^2$, то

$$\|Aq\|_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}\|q\|_2. \tag{6}$$

Нехай ε_1 — це таке найменше число, що

$$\|Ax\|_2\leq(1+\varepsilon_1)\|x\|_2. \tag{7}$$

Має місце нерівність $\|Ax\|_2\leq\|Aq\|_2+\|A(x-q)\|_2$. З нерівності (6), при $\|q\|_2=1$ випливає, що $\|Aq\|_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}$. З (7) матимемо, що $\|A(x-q)\|_2\leq(1+\varepsilon_1)\|\,x-q\|_2\leq(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$\|Ax\|_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}\leq 1+\varepsilon+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки ε_1 — найменше, то $\varepsilon_1\leq\varepsilon+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}$. Звідси $\varepsilon_1\leq\frac{3\varepsilon}{4-\varepsilon}$. Врахувавши, що $0\leq\varepsilon\leq 1$ отримаємо, що $\frac{3}{4-\varepsilon}\leq 1$, а тому $\varepsilon_1\leq\varepsilon$.

Аналогічно можна показати, що $\|Ax\|_2\geq 1-\varepsilon$ для всіх $x\in X_T$. □

Теорема 3.2. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n\leq N$, $a_{ij}=n^{-1/2}\xi_{ij}$, де $\xi_{ij}\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, ξ_{ij} — незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x\in\boldsymbol{R}^N$, та для всіх i та j, $\mathsf{E}\xi_{ij}^2=1$. Тоді для всіх $x\in\Sigma_K$ справджується*

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2-\|x\|_2^2\right|\geq\varepsilon\|x\|_2^2\right\}\leq 2\exp\left\{K\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}$$

для довільного K,

$$1\leq K<\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)}$$

і $0<\varepsilon<1$, де $C_{S,\frac{\alpha}{2}}$ та $\tilde{C}_S$ визначені відповідно в наслідку 3.1 та зауваженні 3.1, $g=\langle\!\langle\xi_{ij}\rangle\!\rangle_{U_{1\alpha}}^2$,

$$a=R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right).$$

Доведення. З леми 3.4 випливає, що для довільного $x\in X_T$, де T- це множина індексів вимірності $K<n$, $X_T\subset\mathbf{R}^N$ буде справедливим

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2-\|x\|_2^2\right|\geq\varepsilon\|x\|_2^2\right\}\leq 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}.$$

Врахувавши, що $C_N^K\leq(eN/K)^K$ отримаємо, що для довільного $x\in\Sigma_K$, буде справедливим

$$\mathsf{P}\left\{\left|\|Ax\|_2^2-\|x\|_2^2\right|\geq\varepsilon\|x\|_2^2\right\}\leq 2\left(\frac{eN}{K}\right)^K\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}$$
$$=2\exp\left\{K\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)-\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}.$$

Звідси випливає, що при

$$1 \leq K < \frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)}$$

і $0 < \varepsilon < 1$ матриця A задовільняє обмеженим властивостям ізометрії з ймовірністю більшою за

$$p_n = 1 - 2\exp\left\{K\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right) - \frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C}_S g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)}\right\}.$$

Зауважимо також, що $p_n \to 1$ при $n \to \infty$. □

4. Висновки

В даній роботі показано, що матриці побудовані з випадкових величин, які належать просторам Орліча $L_{U_\alpha}(\Omega)$, де $U_\alpha(x)$ задана в (1), а також еквівалентним просторам $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ задовільняють обмеженим влативостям ізометрії.

Література

1. B. Kashin, *The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions*, Izvestia Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.
2. A. Garnaev and E. Gluskin, *The widths of a Euclidean ball*, Dokl. AN SSSR **277** (1984), 1048–1052.
3. E. Candes and T. Tao, *Decoding by linear programming*, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (2005), 4203–4215.
4. D. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Trans. Inf. Theory **52** (2006), no. 4, 1289–1306.
5. P. Wojtaszczyk, *Stability and instance optimality for Gaussian measurements in compressed sensing*, Found. Comput. Math. **10(1)** (2010), 1–13.
6. R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, *A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices*, Constr. Approx. **2008** (2007).
7. R. DeVore, G.Petrova, and P. Wojtaszczyk, *Instance-optimality in probability with an l1-minimization decoder*, Applied and Computational Harmonic Analysis **27** (2009), 275–288.
8. Ю. Млавець, *Звязок просторів Орліча випадкових величин з просторами* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математ. і інформ. **25** (2014), no. 1, 77–84.
9. V. Buldygin and Yu. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
10. Ю. Козаченко, Ю. Млавець, *Простори Банаха випадкових величин* $F_\psi(\Omega)$, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 92–107.
11. G. Lorentz, M. von Golitschek, and Yu. Makovoz, *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Кафедра теорії ймовірностей та математичного аналізу, математичний факультет, ДВНЗ "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: btroshki@ukr.net

Надійшла 09/09/2014