Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 38–54

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 38–54

УМОВИ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

УДК 519.21

Д. В. ЗАТУЛА І Ю. В. КОЗАЧЕНКО

Анотація. Робота присвячена дослідженню ліпшицевої неперервності випадкових процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, де $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір, а також знаходженню оцінок розподілу норм випадкових процесів у просторах Ліпшиця.

1. Вступ

Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір. Наведено умови, за яких траєкторії випадкових процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ задовольняють умову Ліпшиця. Зокрема, знайдено модулі неперервності, тобто такі функції f, що з ймовірністю 1:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \le 1,$$

та оцінено ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\le v} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}$$

для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, тобто банахових просторів з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонно зростаюча функція. Такі простори були введені у роботі [6], а властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ розглянуто у [9].

Для гаусових процесів подібні задачі розглядалися у роботі [3]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча у [7, 8], а також у [2, 15]. Досліджена ліпшицева неперервність для φ-субгаусових процесів та знайдені оцінки розподілу ліпшицевих норм таких процесів у роботі [11].

Останнім часом, багато аналітичних властивостей траекторій випадкових процесів розглянуто для процесів та полів, які не є гаусовими, наприклад, субгаусових та орлічевих. Зокрема, досліджено збіжність зважених сум φ-субгаусових залежних випадкових величин у [5], розглянуто застосування до випадкових рядів Фур'є φ-субгаусових випадкових величин у [4], знайдено необхідні та достатні умови, за яких симетричновизначений нескінченноподільний процес має траєкторії з простору Орліча L_ψ з функцією ψ, яка задовольняє умові Δ_2, у [1]. Різноманітні властивості просторів Орліча експоненційного типу та просторів Фенхеля–Орліча досліджено

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 60G17.

Ключові слова і фрази. Банахові простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, випадкові процеси, умови Ліпшиця, модулі неперервності, метрична масивність.

у [12]. Більш узагальнені класи стохастичних процесів, що набувають значень з просторів Орліча, та властивості таких процесів розглянуто у [13]. Стохастичні процеси зі значеннями з просторів Орліча експоненційного типу також розглянуто у [14].

Робота складається зі вступу та чотирьох розділів. У розділі 2 вводиться умова А, яка є необхідною для доведення основної теореми. Третій розділ присвячений формулюванню та доведенню основної теореми. Умови Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин знайдено у розділі 4. П'ятий розділ містить кілька прикладів застосування доведених теорем до конкретних функцій $\psi(u)$ та $\sigma(h)$.

2. Означення та умова А простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$

У цьому розділі наведемо кілька означень, технічних результатів та необхідну умову, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 2.1. Нехай $\psi(u) > 0, u \geq 1$ — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. ([9]) Випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується наступна умова:

$$\sup_{u\geq 1} \frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \infty. \tag{1}$$

У роботі [6] (див. також [9]) доведено, що $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}. \tag{2}$$

Теорема 2.1 ([9]). *Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, то $\forall x > 0$ виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \cdot (\psi(u))^u}{x^u}. \tag{3}$$

Надалі будемо розглядати простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють наступній умові.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо

$$\eta = \max_{1\leq k\leq n} |\xi_k|, \qquad a = \max_{1\leq k\leq n} \|\xi_k\|_\psi.$$

Умова А. Існують функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$, що $\forall x > x_0$ виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\{\eta > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \frac{1}{n} \exp\{-z(x)\}. \tag{4}$$

Зауваження 2.1. Якщо простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові А, то для $M > n$ та $\forall x > x_0$ справджується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\{\eta > x \cdot a \cdot U(M)\} \leq \frac{1}{M} \exp\{-z(x)\}.$$

Наведемо приклади просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють умові А, та знайдемо для них функції $U(n)$ і $z(x)$.

Теорема 2.2. *Нехай $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. Тоді наступна нерівність виконується для $\forall x > \max\{(\ln 3)^{-\alpha}, (2e \ln 3/(\alpha(\ln 3 - 1)))^\alpha\}$:*

$$\mathsf{P}\{\eta > x \cdot a \cdot (\ln(n+2))^\alpha\} \leq \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{\alpha}{e} x^{1/\alpha}\right\}. \tag{5}$$

Доведення. Для цього випадку нерівність (3) набуває наступного вигляду ([9]):

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}$$

при $x > \|\xi\|_\psi$. Тоді $\forall x > (\ln 3)^{-\alpha}$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\eta > x\cdot a\cdot(\ln(n+2))^\alpha\} &= \mathsf{E}\mathbb{1}\{\omega\colon \eta > x\cdot a\cdot(\ln(n+2))^\alpha\}\\
&\le \sum_{k=1}^n \mathsf{E}\mathbb{1}\{\eta = |\xi_k|\}\cdot\mathbb{1}\{\omega\colon |\xi_k| > x\cdot a\cdot(\ln(n+2))^\alpha\}\\
&\le n\cdot\max_{1\le k\le n}\mathsf{P}\{|\xi_k| > x\cdot a\cdot(\ln(n+2))^\alpha\}\\
&\le n\cdot\max_{1\le k\le n}\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x\cdot a}{\|\xi_k\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\cdot\ln(n+2)\right\}\\
&\le n\cdot\max_{1\le k\le n}\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x\cdot a}{a}\right)^{1/\alpha}\cdot\ln(n+2)\right\} = \frac{1}{n}\cdot n^2\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\cdot\ln(n+2)\right\}.
\end{aligned}$$

Позначимо $d_n = \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\ln(n+2)$. Має місце наступна рівність:

$$n^2\cdot\exp\{-d_n\} = \exp\{2\ln n - d_n\}.$$

Легко бачити, що якщо справджується

$$\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln 3}} \le d_n,$$

тобто $x \ge (2e\ln 3/(\alpha(\ln 3 - 1)))^\alpha$, то виконується й наступна нерівність:

$$2\ln n - d_n \le -d_n\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}.$$

Дійсно, $\forall n \ge 1$:

$$\begin{aligned}
x \ge \left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3-1)}\right)^\alpha &\Leftrightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{\ln 3}} \le \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha} \Rightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\\
&\Leftrightarrow \frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\ln n \Rightarrow \frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\ln(n+2).
\end{aligned}$$

Отже, $\forall x > \max\{(\ln 3)^{-\alpha}, (2e\ln 3/(\alpha(\ln 3-1)))^\alpha\}$ маємо наступне:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\eta > x\cdot a\cdot(\ln(n+2))^\alpha\} &\le \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\ln(n+2)\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}\right\}\\
&= \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.3. *Нехай* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$. *Тоді наступна нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\eta > x\cdot a\cdot\left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda\right\} \le \frac{1}{n}\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right)\right\} \tag{6}$$

виконується для

$$\forall x \ge \left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^\lambda.$$

Доведення. Для цього випадку нерівність (3) набуває наступного вигляду ([9]):

$$\mathsf{P}\{|\xi|>x\}\le e^{\lambda}\cdot\exp\left\{-\lambda\cdot\exp\left\{\left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}$$

при $x>0$. Позначимо $U(n)=\left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda}$. Тоді $\forall x>0$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\eta>x\cdot a\cdot U(n)\}&=\mathsf{E}\,\mathbb{1}\{\omega\colon \eta>x\cdot a\cdot U(n)\}\\&\le\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\mathbb{1}\{\eta=|\xi_k|\}\cdot\mathbb{1}\{\omega\colon|\xi_k|>x\cdot a\cdot U(n)\}\\&\le n\cdot\max_{1\le k\le n}\mathsf{P}\{|\xi_k|>x\cdot a\cdot U(n)\}\\&\le ne^{\lambda}\cdot\max_{1\le k\le n}\exp\left\{-\lambda\cdot\exp\left\{\left(\frac{x\cdot a\cdot U(n)}{\|\xi_k\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}\\&\le ne^{\lambda}\cdot\max_{1\le k\le n}\exp\left\{-\lambda\cdot\exp\left\{\left(\frac{x\cdot a\cdot U(n)}{a}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}\\&=\frac{e^{\lambda}}{n}\cdot n^2\cdot\exp\left\{-\lambda\cdot\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}}{e}\cdot\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Позначимо

$$d_n=\lambda\cdot\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}}{e}\cdot\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right\}.$$

Має місце наступна рівність:

$$n^2\cdot\exp\{-d_n\}=\exp\{2\ln n-d_n\}.$$

Легко бачити, що якщо справджується

$$\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(2+e^{\lambda/2})}}\le d_n,$$

тобто

$$\forall x\ge\left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{\lambda},$$

то виконується й наступна нерівність:

$$2\ln n-d_n\le -d_n\cdot\frac{1}{(\ln(n+1+e^{\lambda/2}))^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}}.$$

Дійсно, $\forall n\ge 1$

$$\begin{aligned}&x\ge\left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{\lambda}\Leftrightarrow\frac{x^{1/\lambda}}{e}\ln\frac{2}{\lambda}\ge\ln\frac{2}{\lambda\left(1-\frac{1}{\ln(2+e^{\lambda/2})}\right)}\\&\Rightarrow\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(2+e^{\lambda/2})}}\le\lambda\cdot\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}\cdot\ln(n+1+e^{\lambda/2})\\&\Leftrightarrow\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(2+e^{\lambda/2})}}\le\lambda\cdot\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}}{e}\left(\ln\frac{2}{\lambda}+\ln\ln(n+1+e^{\lambda/2})\right)\right\}\\&\Rightarrow\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+1+e^{\lambda/2})}}\le\lambda\cdot\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}}{e}\cdot\ln\ln(n+1+e^{\lambda/2})^{\frac{2}{\lambda}}\right\}.\end{aligned}$$

Тоді

$$\forall x \geq \left(e \cdot \ln \frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)} \cdot \left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{\lambda}$$

маємо наступне:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}&\left\{\eta > xa\left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda}\right\} \leq \frac{e^{\lambda}}{n}\exp\left\{-d_n\frac{1}{(\ln(n+1+e^{\lambda/2}))^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}}\right\}\\
&= \frac{e^{\lambda}}{n}\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}}{e}\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right\}\frac{1}{(\ln(n+1+e^{\lambda/2}))^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}}\right\}\\
&= \frac{e^{\lambda}}{n}\exp\Bigg\{-\lambda\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}+\ln\left(\ln\left(n+1+e^{\frac{\lambda}{2}}\right)\right)^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times\frac{1}{(\ln(n+1+e^{\frac{\lambda}{2}}))^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}}\Bigg\}\\
&= \frac{e^{\lambda}}{n}\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}\left(\ln\left(n+1+e^{\frac{\lambda}{2}}\right)\right)^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}\frac{1}{\left(\ln\left(n+1+e^{\frac{\lambda}{2}}\right)\right)^{\frac{x^{1/\lambda}}{e}}}\right\}\\
&= \frac{e^{\lambda}}{n}\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}\right\} = \frac{1}{n}\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right)\right\}. \qquad\square
\end{aligned}$$

Означення 2.2 ([2])**.** Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — метричний простір. Метричною масивністю $N_{(\mathbb{T},\rho)}(u) := N(u)$ називається найменше число замкнених ρ-околів, діаметр яких не перевищує $2u$, якими можна покрити $\mathbb{T}$.

Означення 2.3 ([9])**.** Випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо для всіх $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $X(t) \in \mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 2.4 ([2, 11])**.** Функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ називається модулем неперервності, якщо $q(t) \geq 0$, $q(0) = 0$ та $q(t+s) \leq q(t) + q(s)$ при $t > 0$, $s > 0$.

Означення 2.5 ([2, 11])**.** Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — метричний простір, q — модуль неперервності. Тоді сім'я функцій $\{x(t), t \in \mathbb{T}\}$, для яких

$$\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ t\neq s}} \frac{|x(t)-x(s)|}{q(\rho(t,s))} < \infty$$

(або ж $\sup_{\rho(t,s)\leq h}|x(t)-x(s)| = o(q(h))$ при $h \to 0$), називається простором Ліпшиця $\Lambda_q(\mathbb{T},\rho)$ (або ж $\Lambda_q^0(\mathbb{T},\rho)$).

3. Теорема про модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин

У цьому розділі ми сформулюємо та доведемо основний результат роботи — теорему про модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин.

Теорема 3.1. *Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — деякий компактний метричний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з банахового простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що задовольняє умові A з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$.*

Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція

$$\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$$

така, що $\sigma(0)=0$ *та виконується наступна нерівність:*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h}\|X(t)-X(s)\|_\psi\le\sigma(h). \tag{7}$$

Нехай $N(\varepsilon)=N_\rho(\mathbb{T},\varepsilon)$ — *метрична масивність простору* $(\mathbb{T},\rho)$*. Також нехай* $\varepsilon_0=\sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)\right)$*;* $g_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt<\infty$*,* $\varepsilon>0$*.*

Тоді для $x>x_0$*,* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *виконується наступна нерівність:*

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f_B(\rho(t,s))+(5+2\sqrt{6})g_B(\rho(t,s))}>x\right\}\\&\qquad\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\{-z(x)\},\end{aligned}\tag{8}$$

де $B>1$ — *деяке число,* $f_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(BN(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$*,* $\varepsilon>0$*.*

Доведення. Нехай $r\in(0,1)$, $\{\nu_k,k=0,1,2,\dots\}$ — деяка послідовність, для якої $\nu_0=\sup_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)$, $\nu_{k+1}=\min\{r\nu_k,\delta_k\}$, де

$$\delta_k=A\inf\left\{\nu\colon N\big(\sigma^{(-1)}(\nu)\big)<BN\big(\sigma^{(-1)}(\nu_k)\big)\right\}, \tag{9}$$

де $\sigma^{(-1)}(\nu)$ є оберненою функцією до функції σ, $B>1$, A — таке число, що $A>1$ та $Ar<1$. Для послідовності $\{\nu_k,k=0,1,2,\dots\}$ маємо:

$$\nu_{k+1}\le r\nu_k,\qquad k=0,1,2,\dots, \tag{10}$$

або ж

$$\nu_k\le\frac{1}{1-r}(\nu_k-\nu_{k+1}). \tag{11}$$

З нерівностей (9) та (10) маємо, що

$$N\big(\sigma^{(-1)}(\nu_{k+2})\Big)\ge N\big(\sigma^{(-1)}(r\nu_{k+1})\big)\ge N\big(\sigma^{(-1)}(r\delta_k)\big)\ge BN\big(\sigma^{(-1)}(\nu_k)\big).$$

Таким чином,

$$N\big(\sigma^{(-1)}(\nu_k)\big)\ge BN\big(\sigma^{(-1)}(\nu_{k-2})\big)\ge B^2N\big(\sigma^{(-1)}(\nu_{k-4})\big)\ge\dots. \tag{12}$$

Нехай $\varepsilon_0=\sigma^{(-1)}(\nu_0),\dots,\varepsilon_k=\sigma^{(-1)}(\nu_k)$. Також нехай V_{ε_k}, $k=0,1,2,\dots$ — множина центрів замкнених куль радіусів ε_k, яка формує мінімальне покриття простору $(\mathbb{T},\rho)$. Число точок у V_{ε_k} дорівнює $N(\varepsilon_k)$. Позначимо $V_0=\bigcup_{k=0}^\infty V_{\varepsilon_k}$. З нерівності (7), використовуючи нерівність Чебишева, випливає, що процес X — неперервний за ймовірністю. Тому V_0 є множиною сепарабельності процесу X. Нехай α_n — відображення: $V_0\to V_{\varepsilon_n}$, де $\alpha_n(t)=t$, якщо $t\in V_{\varepsilon_n}$, а інакше $\alpha_n(t)$ — це точка у V_{ε_n} така, що $\rho(t,\alpha_n(t))<\varepsilon_n$. З нерівності (2) маємо, що $\forall\xi\in\mathbb{F}_\psi(\Omega)$:

$$\frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^2)^{1/2}}{\psi(2)}\le\|\xi\|_\psi\ \Leftrightarrow\ \mathsf{E}\,\xi^2\le\|\xi\|_\psi^2\cdot(\psi(2))^2. \tag{13}$$

З нерівності Чебишева, (13) та (10) маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{|X(t)-X(\alpha_n(t))|>r^{n/2}\right\}&\le\frac{\mathsf{E}(X(t)-X(\alpha_n(t)))^2}{r^n}\le\frac{\|X(t)-X(\alpha_n(t))\|_\psi^2\cdot(\psi(2))^2}{r^n}\\&\le\frac{(\sigma(\rho(t,\alpha_n(t))))^2\cdot(\psi(2))^2}{r^n}\le\frac{(\sigma(\varepsilon_n))^2\cdot(\psi(2))^2}{r^n}\\&=\frac{\nu_n^2\cdot(\psi(2))^2}{r^n}\le\frac{r^{2n}\nu_0^2(\psi(2))^2}{r^n}=\nu_0^2r^n(\psi(2))^2.\end{aligned}$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|X(t)-X(\alpha_n(t))|>r^{n/2}\right\}<\infty.$$

З леми Бореля–Кантеллі випливає, що $X(\alpha_n(t)) \to X(t)$ з ймовірністю 1 при $n \to \infty$. Оскільки множина V_0 — зліченна, то $X(\alpha_n(t)) \to X(t)$ при $n \to \infty$ з ймовірністю 1 $\forall t \in V_0$.

Візьмемо $0<\varepsilon \le \varepsilon_0$ та виберемо таке m, що $\varepsilon_{m+1}<\varepsilon \le \varepsilon_m$. Оскільки V_0 — це множина сепарабельності процесу X, то з ймовірністю 1:

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)<\varepsilon\\ t,s\in\mathbb{T}}} |X(t)-X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s)<\varepsilon\\ t,s\in V_0}} |X(t)-X(s)|. \tag{14}$$

Нехай $t,s \in V_0$ та $\rho(t,s)<\varepsilon$. Розглянемо $k>m+1$. Позначимо $t_k=\alpha_k(t)$, $t_{k-1}=\alpha_{k-1}(t_k),\dots,t_m=\alpha_m(t_{m+1})$; $s_k=\alpha_k(s)$, $s_{k-1}=\alpha_{k-1}(s_k),\dots,s_m=\alpha_m(s_{m+1})$. Тоді для будь-яких t, s таких, що $\rho(t,s)<\varepsilon$, маємо:

$$\begin{aligned} X(t)-X(s) &= (X(t)-X(t_k)) + \sum_{l=m+2}^{k} (X(t_l)-X(t_{l-1})) - (X(s)-X(s_k)) \\ &\quad - \sum_{l=m+2}^{k} (X(s_l)-X(s_{l-1})) + (X(t_{m+1})-X(s_{m+1})). \end{aligned} \tag{15}$$

З нерівності (15) маємо:

$$\begin{aligned} X(t_{m+1})-X(s_{m+1}) &= (X(t)-X(s)) - (X(t)-X(t_k)) + (X(s)-X(s_k)) \\ &\quad - \sum_{l=m+2}^{k} (X(t_l)-X(t_{l-1})) + \sum_{l=m+2}^{k} (X(s_l)-X(s_{l-1})) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \|X(t_{m+1})-X(s_{m+1})\|_\psi &\le \|X(t)-X(s)\|_\psi + \|X(t)-X(t_k)\|_\psi \\ &\quad + \|X(s)-X(s_k)\|_\psi + \sum_{l=m+2}^{k} \|X(t_l)-X(t_{l-1})\|_\psi \\ &\quad + \sum_{l=m+2}^{k} \|X(s_l)-X(s_{l-1})\|_\psi \\ &\le \sigma(\rho(t,s)) + \sigma(\rho(t,t_k)) + \sigma(\rho(s,s_k)) \\ &\quad + \sum_{l=m+2}^{k} \sigma(\rho(t_l,t_{l-1})) + \sum_{l=m+2}^{k} \sigma(\rho(s_l,s_{l-1})) \\ &\le \sigma(\varepsilon) + 2\sigma(\varepsilon_k) + 2\sum_{l=m+2}^{k} \sigma(\varepsilon_{l-1}) \\ &\le \sigma(\varepsilon) + 2\sum_{l=m+2}^{\infty} \sigma(\varepsilon_{l-1}) = \sigma(\varepsilon) + 2\sum_{l=m+2}^{\infty} \nu_{l-1} \\ &\le \sigma(\varepsilon) + 2\sum_{l=1}^{\infty} \nu_{m+l} \le \sigma(\varepsilon) + 2\sum_{l=1}^{\infty} \nu_{m+1} r^{l-1} \\ &= \sigma(\varepsilon) + \nu_{m+1}\frac{2}{1-r} \le \sigma(\varepsilon)\left(1+\frac{2}{1-r}\right) = \sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}. \end{aligned} \tag{16}$$

З нерівностей (15) та (16) для $\forall t, s \in \mathbb{T}$ таких, що $\rho(t,s) < \varepsilon$, маємо:

$$\begin{aligned}|X(t)-X(s)| \le &\sum_{l=m+2}^{k} |X(t_l)-X(t_{l-1})| + \sum_{l=m+2}^{k} |X(s_l)-X(s_{l-1})| + |X(t)-X(t_k)| \\ &+ |X(s)-X(s_k)| + |X(t_{m+1})-X(s_{m+1})| \\ &\le 2\sum_{l=m+2}^{k} \max_{p\in V_{\varepsilon_l}} |X(p)-X(\alpha_{l-1}(p))| + |X(t)-X(t_k)| + |X(s)-X(s_k)| \\ &+ \max_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{m+1}}: \\ \|X(v)-X(w)\|_\psi \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}} |X(v)-X(w)|.\end{aligned}$$

Спрямуємо $k \to \infty$:

$$|X(t)-X(s)| \le 2\sum_{l=m+2}^{\infty} \max_{p\in V_{\varepsilon_l}} |X(p)-X(\alpha_{l-1}(p))| + \max_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{m+1}}: \\ \|X(v)-X(w)\|_\psi \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}} |X(v)-X(w)|.$$

Отже, з рівності (14) маємо:

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\rho(t,s)<\varepsilon \\ t,s\in\mathbb{T}}} |X(t)-X(s)| &= \sup_{\substack{\rho(t,s)<\varepsilon \\ t,s\in V_0}} |X(t)-X(s)| \\ &\le 2\sum_{k=m+2}^{\infty} \max_{p\in V_{\varepsilon_k}} |X(p)-X(\alpha_{k-1}(p))| \\ &+ \max_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{m+1}}: \\ \|X(v)-X(w)\|_\psi \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}} |X(v)-X(w)|.\end{aligned} \tag{17}$$

Позначимо

$$c_k = \sigma(\varepsilon_{k-1}) \cdot U(N(\varepsilon_k)),$$

$$b_m(\varepsilon) = \frac{3-r}{1-r}\sigma(\varepsilon) \cdot U\left(N^2(\varepsilon_{m+1})\right),$$

$$\xi_k = \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} |X(t)-X(\alpha_{k-1}(t))|,$$

$$\eta_m(\varepsilon) = \max_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{m+1}}: \\ \|X(v)-X(w)\|_\psi \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}} |X(v)-X(w)|.$$

Нехай $\{G(\varepsilon), \varepsilon \ge 0\}$ — деяка зростаюча функція така, що

$$G(\varepsilon) \ge 2\sum_{k=m+2}^{\infty} c_k + b_m(\varepsilon),$$

де m таке число, що $\varepsilon_{m+1} < \varepsilon \le \varepsilon_m$. Тоді

$$\begin{aligned}\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{G(\rho(t,s))} &\le \sup_{0<y\le\varepsilon}\left[\sup_{0<\rho(t,s)\le y} \frac{|X(t)-X(s)|}{G(y)}\right] \\ &\le \sup_{l\ge m+1}\ \sup_{\varepsilon_{l+1}<y\le\varepsilon_l} \frac{2\sum_{p=l+1}^{\infty}\xi_p + \eta_l(y)}{2\sum_{p=l+1}^{\infty} c_p + b_l(y)}.\end{aligned}$$

Як наслідок, з останньої нерівності маємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{G(\rho(t,s))}>x\right\} &\le \sum_{k=m+2}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_k}{c_k}>x\right\} \\
&+\sum_{l=m+1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{\varepsilon_{l+1}<v\le\varepsilon_l}\frac{\eta_l(v)}{b_l(v)}>x\right\}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Тепер маємо обмежити зверху вираз $2\sum_{k=m+2}^{\infty}c_k+b_m(\varepsilon)$. Для цього спочатку суму розділимо на 2 частини:

$$
\sum_{k=m+2}^{\infty}c_k=\sum_{k=m+2}^{\infty}\nu_{k-1}\cdot U(N(\varepsilon_k))=A_1+A_2,
$$

де

$$
A_1=\sum_{k\in D_1(m)}\nu_{k-1}\cdot U(N(\varepsilon_k)),\qquad A_2=\sum_{k\in D_2(m)}\nu_{k-1}\cdot U(N(\varepsilon_k)),
$$

$$
D_1(m)=\{k\ge m+2\colon \nu_k=r\nu_{k-1}\},\qquad D_2(m)=\{k\ge m+2\colon \nu_k=\delta_{k-1}\}.
$$

З нерівностей (10) та (11) маємо:

$$
\begin{aligned}
A_1&=\frac{1}{r}\sum_{k\in D_1(m)}\nu_k\cdot U\left(N(\sigma^{(-1)}(\nu_k))\right)\\
&\le\frac{1}{r(1-r)}\sum_{k=m+2}^{\infty}(\nu_k-\nu_{k+1})\cdot U\left(N(\sigma^{(-1)}(\nu_k))\right)\\
&\le\frac{1}{r(1-r)}\sum_{k=m+2}^{\infty}\int_{\nu_{k+1}}^{\nu_k}U\left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt\\
&=\frac{1}{r(1-r)}\int_0^{\nu_{m+2}}U\left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

З того, що $N\big(\sigma^{(-1)}(\delta_k)\big)<BN\big(\sigma^{(-1)}(\nu_k)\big)$, та з нерівностей (10) і (11), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
A_2&=\sum_{k\in D_2(m)}\nu_{k-1}\cdot U\left(N(\sigma^{(-1)}(\delta_{k-1}))\right)\le\sum_{k\in D_2(m)}\nu_{k-1}\cdot U\left(BN(\sigma^{(-1)}(\nu_{k-1}))\right)\\
&\le\frac{1}{1-r}\sum_{k=m+2}^{\infty}(\nu_{k-1}-\nu_k)\cdot U\left(BN(\sigma^{(-1)}(\nu_{k-1}))\right)\\
&\le\frac{1}{1-r}\int_0^{\nu_{m+1}}U\left(BN(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Оскільки $\nu_{m+2}<\nu_{m+1}<\sigma(\varepsilon)$, то з нерівностей (19) та (20) маємо:

$$
2\sum_{k=m+2}^{\infty}c_k\le\frac{2(1+r)}{r(1-r)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\left(BN(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.
$$

Тепер обмежимо зверху $b_m(\varepsilon)$. Оскільки $\nu_{m+1}=\min\{r\nu_m,\delta_m\}$, то розглянемо 2 випадки: $\nu_{m+1}=r\nu_m$ та $\nu_{m+1}=\delta_m$. Якщо $\nu_{m+1}=r\nu_m$, то для $\varepsilon_{m+1}<\varepsilon\le\varepsilon_m$

$(\nu_{m+1} < \sigma(\varepsilon) \le \nu_m)$:

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon)\cdot U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(\nu_{m+1}))\right) &= \sigma(\varepsilon)\cdot U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(r\nu_m))\right)\\ &\le \sigma(\varepsilon)\cdot U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(r\sigma(\varepsilon)))\right)\\ &\le \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(rv))\right)\,dv\\ &= \frac{1}{r}\int_0^{r\sigma(\varepsilon)} U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt\\ &\le \frac{1}{r}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.\end{aligned}$$

Якщо $\nu_{m+1} = \delta_m$, то з нерівності (9) випливає, що

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon)\cdot U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(\nu_{m+1}))\right) &= \sigma(\varepsilon)\cdot U\left(N^2(\sigma^{(-1)}(\delta_m))\right)\\ &\le \sigma(\varepsilon)\cdot U\left(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(\nu_m))\right)\\ &\le \sigma(\varepsilon)\cdot U\left(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(\sigma(\varepsilon)))\right)\\ &\le \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.\end{aligned}$$

Отже,

$$b_m(\varepsilon) \le \frac{3-r}{r(1-r)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.$$

Тому справедливою буде нерівність:

$$\begin{aligned}2\sum_{k=m+2}^{\infty} c_k + b_m(\varepsilon) \le \frac{2(1+r)}{r(1-r)}&\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(BN(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt\\ &+\frac{3-r}{r(1-r)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\left(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\right)\,dt.\end{aligned}\tag{21}$$

Маємо в результаті:

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\frac{1}{r(1-r)}(2(1+r)f_B(\rho(t,s))+(3-r)g_B(\rho(t,s)))} > x\right\}\\ &\quad\le \sum_{k=m+2}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_k}{c_k} > x\right\} + \sum_{l=m+1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{\varepsilon_{l+1}<v\le\varepsilon_l}\frac{\eta_l(v)}{b_l(v)} > x\right\},\end{aligned}\tag{22}$$

де $f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\big(BN(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$, $g_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U\big(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$.
Знайдемо ймовірності з правої частини (22). Згідно з умовою A, для $\forall x > x_0$:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_k}{c_k} > x\right\} &= \mathsf{P}\left\{\max_{t\in V_{\varepsilon_k}}|X(t)-X(\alpha_{k-1}(t))| > x\sigma(\varepsilon_{k-1})U(N(\varepsilon_k))\right\}\\ &\le \frac{\exp\{-z(x)\}}{N(\varepsilon_k)};\end{aligned}\tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{\varepsilon_{l+1}<v\le\varepsilon_l}\frac{\eta_l(v)}{b_l(v)}>x\right\}\\
&\quad=\mathsf{P}\left\{\sup_{\varepsilon_{l+1}<v\le\varepsilon_l}\frac{\max\limits_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{l+1}}:\\ \|X(v)-X(w)\|_\psi\le\sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}}|X(v)-X(w)|}{\frac{3-r}{1-r}\sigma(\varepsilon)\cdot U(N^2(\varepsilon_{l+1}))}>x\right\}\\
&\quad=\mathsf{P}\left\{\max_{\substack{v,w\in V_{\varepsilon_{l+1}}:\\ \|X(v)-X(w)\|_\psi\le\sigma(\varepsilon)\frac{3-r}{1-r}}}|X(v)-X(w)|>x\cdot\frac{3-r}{1-r}\sigma(\varepsilon)\cdot U(N^2(\varepsilon_{l+1}))\right\}\\
&\quad\le\frac{\exp\{-z(x)\}}{N^2(\varepsilon_{l+1})}.
\end{aligned}\tag{24}
$$

В результаті отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\frac{1}{r(1-r)}(2(1+r)f_B(\rho(t,s))+(3-r)g_B(\rho(t,s)))}>x\right\}\\
&\quad\le\sum_{k=m+2}^{\infty}\frac{1}{N(\varepsilon_k)}\cdot\exp\{-z(x)\}+\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{1}{N^2(\varepsilon_{l+1})}\cdot\exp\{-z(x)\}\\
&\quad:=R(m)\cdot\exp\{-z(x)\},
\end{aligned}
$$

де $f_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(BN(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$, $g_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$.

З нерівності (12) випливає, що

$$
\begin{aligned}
R(m)&=\sum_{k=m+2}^{\infty}\frac{1}{N(\varepsilon_k)}+\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{1}{N^2(\varepsilon_{l+1})}\le\frac{1}{N(\varepsilon_{m+2})}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{B^p}+\frac{1}{N^2(\varepsilon_{m+2})}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{B^{2p}}\\
&=\frac{B}{(B-1)N(\varepsilon_{m+2})}+\frac{B^2}{(B^2-1)N^2(\varepsilon_{m+2})}\le\frac{1}{N(\varepsilon)}\cdot\left(\frac{B}{B-1}+\frac{B^2}{B^2-1}\right)\\
&=\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $\inf_{0<r<1}\frac{2(1+r)}{r(1-r)}=6+4\sqrt{2}$ та $\inf_{0<r<1}\frac{3-r}{r(1-r)}=5+2\sqrt{6}$, то для $x>x_0$:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f_B(\rho(t,s))+(5+2\sqrt{6})g_B(\rho(t,s))}>x\right\}\\
&\quad\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\{-z(x)\}. \qquad\square
\end{aligned}
$$

Означення 3.1. Простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові Б, якщо він задовольняє умові А з функціями $z(x)$ та $U(n)$ при $x>x_0$, та якщо існує така константа $b_0>1$, що $\forall n\ge1$:

$$U(n^2)\le b_0U(n).$$

Таким чином, дістаємо такий наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай виконуються усі припущення теореми 3.1 та простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові Б. Тоді для $x>x_0$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ та $B>1$ виконується наступна* *нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2}+b_0(5+2\sqrt{6}))f_B(\rho(t,s))}>x\right\}\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\{-z(x)\},\tag{25}$$

де $f_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(BN(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$, $\varepsilon>0$.

4. Умови Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин

Результати цього розділу є важливими та випливають з теореми 3.1.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються усі припущення теореми 3.1. Тоді з ймовірністю 1:*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Delta(X;\varepsilon)}{(6+4\sqrt{2})f_B(\varepsilon)+(5+2\sqrt{6})g_B(\varepsilon)}\le 1,\tag{26}$$

де

$$\Delta(X;\varepsilon)=\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<\rho(t,s)\le\varepsilon}}|X(t)-X(s)|,$$

$f_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(BN(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt$, $g_B(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}U\big(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))\big)\,dt<\infty$, $\varepsilon>0$.

Доведення. З нерівності (17) випливає, що з ймовірністю 1:

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)<v\\t,s\in\mathbb{T}}}|X(t)-X(s)|\le 2\sum_{l=m+2}^{\infty}\xi_l+\eta_m(v).\tag{27}$$

З нерівності (23) маємо, що $\xi_l\le xc_l$ з ймовірністю 1 для достатньо великих l та при $x>x_0$. З (24) маємо, що $\eta_m(v)\le xb_m(v)$ з ймовірністю 1 для достатньо великих m та при $x>x_0$. Тому для достатньо великих l (або ж для достатньо малого v) та при $x>x_0$ маємо:

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)<v\\t,s\in\mathbb{T}}}|X(t)-X(s)|\le x\left(2\sum_{l=m+2}^{\infty}c_l+b_m(v)\right)\tag{28}$$

з ймовірністю 1.

Використовуючи нерівність (21), отримуємо, що для достатньо малих v:

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le v\\t,s\in\mathbb{T}}}|X(t)-X(s)|\le(6+4\sqrt{2})f_B(v)+(5+2\sqrt{6})g_B(v)$$

з ймовірністю 1. □

Наслідок 4.1. *За виконання умов теореми 4.1 для достатньо малих v:*

$$\sup_{\rho(t,s)\le v}|X(t)-X(s)|\le(6+4\sqrt{2})f_B(v)+(5+2\sqrt{6})g_B(v)$$

з ймовірністю 1.

5. Приклади

Наведемо кілька прикладів застосування доведених теорем до конкретних функцій $\psi(u)$ та $\sigma(h)$.

Приклад 5.1. *Нехай функція $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\alpha > 0$ та функція $\sigma(h) = dh^c$, $h, c, d > 0$.*

Оберненою функцією до функції $\sigma(h)$ є $\sigma^{(-1)}(h) = \sqrt[c]{h/d}$. Згідно з теоремою 2.2, простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові А з функціями $z(x) = \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}$, $U(n) = (\ln(n+2))^{\alpha}$ та
$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{(\ln 3)^{\alpha}}, \left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3 - 1)}\right)^{\alpha}\right\}.$$
Тому функції $f_B(\varepsilon)$ та $g_B(\varepsilon)$ набувають наступного вигляду:
$$f_B(\varepsilon) = \int_0^{d\varepsilon^c} U\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)\right)dt = \int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt;$$
$$g_B(\varepsilon) = \int_0^{d\varepsilon^c} U\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)\right)dt = \int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt.$$
Оскільки справедливою є наступна нерівність
$$\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right) \le \ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)^2 = 2\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right),$$
то
$$\begin{aligned}g_B(\varepsilon) &= \int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt\\ &\le \int_0^{d\varepsilon^c}\left(2\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt = 2^{\alpha}f_B(\varepsilon).\end{aligned}$$
Тому у цьому випадку простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові Б з $b_0 = 2^{\alpha}$. Згідно з наслідком 3.1, для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)\right)$,
$$\forall x > \max\left\{\frac{1}{(\ln 3)^{\alpha}}, \left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3 - 1)}\right)^{\alpha}\right\},$$
$B > 1$ та $\forall N(\varepsilon) \ge 2$ має місце наступна нерівність:
$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le \frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right\},$$
де
$$\gamma_B(\varepsilon) = \left(6+4\sqrt{2}+(5+2\sqrt{6})\cdot 2^{\alpha}\right)\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt.$$
Більше того, відповідно до теореми 4.1, з ймовірністю 1:
$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|}{\left(6+4\sqrt{2}+(5+2\sqrt{6})\cdot 2^{\alpha}\right)\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\alpha}dt} \le 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T]$. Оскільки метрична масивність $N(u)$ — це найменша кількість елементів в u–покритті простору $\mathbb{T}$ (у даному випадку, відрізку $[0, T]$), то $\frac{T}{2u} \le N(u) \le \frac{T}{2u}+1$. Або ж, для функції $\sigma^{(-1)}(u)$:
$$N\left(\sqrt[c]{\frac{u}{d}}\right) = N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) \le \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1 = \frac{T}{2\sqrt[c]{\frac{u}{d}}}+1 = \frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{u}}+1.$$

Таким чином, можемо обмежити зверху функцію $f_B(\varepsilon)$:

$$f_B(\varepsilon)=\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^\alpha dt\le\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(B\cdot\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\right)+2\right)\right)^\alpha dt.$$

Отже, згідно з наслідком 3.1, для

$$\forall x>\max\left\{\frac{1}{(\ln 3)^\alpha},\left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3-1)}\right)^\alpha\right\},$$

$B>1$ та $\forall\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\varepsilon_0,\frac{T}{2}\right\}\right)$ виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t,s))}>x\right\}\le\frac{2\varepsilon(2B^2+B)}{T(B^2-1)}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right\},$$

де

$$\gamma_{1,B}(\varepsilon)=\left(6+4\sqrt{2}+(5+2\sqrt{6})\cdot 2^\alpha\right)\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(B\cdot\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\right)+2\right)\right)^\alpha dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 4.1, з ймовірністю 1 має місце:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|}{\left(6+4\sqrt{2}+(5+2\sqrt{6})\cdot 2^\alpha\right)\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(B\cdot\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\right)+2\right)\right)^\alpha dt}\le 1.$$

Приклад 5.2. *Нехай функція* $\psi(u)=(\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda>0$ *та функція*

$$\sigma(h)=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)},\qquad h>0.$$

Оберненою функцією до функції $\sigma(h)$ є $\sigma^{(-1)}(h)=\left(e^{1/h}-1\right)^{-1}$. Згідно з теоремою 2.3, простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняє умові A з функціями

$$z(x)=\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right),\qquad U(n)=\left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda$$

та

$$x_0=\left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^\lambda.$$

Тому функції $f_B(\varepsilon)$ та $g_B(\varepsilon)$ набувають наступного вигляду:

$$f_B(\varepsilon)=\int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}}\left(\ln\ln\left(BN\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right)+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda dt;$$

$$g_B(\varepsilon)=\int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}}\left(\ln\ln\left(B^2N^2\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right)+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda dt.$$

Згідно з теоремою 3.1,

$$\forall x>\left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^\lambda,$$

$B>1$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=\sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)\right)$ та $\forall N(\varepsilon)\ge 2$ має місце наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\rho(t,s))}>x\right\}\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right)\right\},$$

де

$$\gamma_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(BN\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right) + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(B^2N^2\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right) + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 4.1, з ймовірністю 1:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\varepsilon)} \le 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T}=[0,T]$. Тоді:

$$N\left(\frac{1}{e^{1/u}-1}\right) = N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) \le \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T(e^{1/u}-1)}{2} + 1.$$

Таким чином, можемо обмежити зверху функції $f_B(\varepsilon)$ та $g_B(\varepsilon)$:

$$f_B(\varepsilon) = \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(BN\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right) + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt$$

$$\le \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(B\cdot\left(\frac{T(e^{1/t}-1)}{2}+1\right) + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt;$$

$$g_B(\varepsilon) \le \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(B^2\left(\frac{T(e^{1/t}-1)}{2}+1\right)^2 + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt.$$

Отже, згідно з теоремою 3.1, для

$$x > \left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)} \cdot \left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{\lambda},$$

$B>1$ та $\forall\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\varepsilon_0,\frac{T}{2}\right\}\right)$ виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t,s))} > x\right\} \le \frac{2\varepsilon(2B^2+B)}{T(B^2-1)}\cdot\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right)\right\},$$

де

$$\gamma_{1,B}(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(B\cdot\left(\frac{T(e^{1/t}-1)}{2}+1\right) + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \left(\ln\ln \left(B^2\left(\frac{T(e^{1/t}-1)}{2}+1\right)^2 + 1 + e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^{\lambda} dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 4.1, з ймовірністю 1 має місце:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\varepsilon)} \le 1.$$

Теорема 5.1. *Нехай $X=(X(t),t\in\mathbb{T})$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення теореми 3.1. Якщо $(6+4\sqrt{2})f_B(\varepsilon)+(5+2\sqrt{6})g_B(\varepsilon)\le q_B(\varepsilon)$ в* *околі нуля, де q_B — деякий модуль неперервності, то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda_q(\mathbb{T},\rho)$ і виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{q_B(\rho(t,s))}>x\right\}\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\{-z(x)\}. \tag{29}$$

Якщо ж $(6+4\sqrt{2})f_B(\varepsilon)+(5+2\sqrt{6})g_B(\varepsilon)=o(q_B(\varepsilon))$, то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda^0_q(\mathbb{T},\rho)$ та для достатньо малих ε має місце нерівність (29).

Ця теорема випливає з теореми 3.1.

Приклад 5.3. *Нехай функції $\psi(u)$ та $\sigma(h)$ такі ж, як і у прикладі 5.1. Також нехай $X=(X(t),t\in\mathbb{T})$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення теореми 3.1, q_B — модуль неперервності. Якщо*

$$\int_0^{d\varepsilon_0^c}\frac{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^\alpha}{q_B(t)}\,dt<\infty,$$

то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda^0_q(\mathbb{T},\rho)$.

У цьому випадку

$$f_B(\varepsilon)=\int_0^{d\varepsilon^c}\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^\alpha dt=\int_0^{d\varepsilon^c}q_B(t)\cdot\frac{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^\alpha}{q_B(t)}\,dt$$
$$\le q_B(\varepsilon)\cdot\int_0^{d\varepsilon^c}\frac{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^\alpha}{q_B(t)}\,dt=o(q_B(\varepsilon)),\qquad\varepsilon\to0.$$

Аналогічно $g_B(\varepsilon)=o(q_B(\varepsilon))$, $\varepsilon\to0$ і твердження цього прикладу випливає з теореми 5.1.

6. Висновки

У цій роботі знайдено умови, за яких траєкторії випадкового процесу

$$X=(X(t),t\in\mathbb{T})$$

з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин задовольняють умовам Ліпшиця, та отримано оцінки розподілів норм траєкторій випадкових процесів у просторі Ліпшиця. Наведено також кілька прикладів застосування доведених теорем. У подальшому планується розглянути модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ на нескінченних інтервалах.

Література

1. M. Braverman and G. Samorodnitsky, *Symmetric infinitely divisible processes with sample paths in Orlicz spaces and absolute continuity of infinitely divisible processes*, Stochastic Processes and their Applications **78** (1998), no. 1, 1–26.
2. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
3. R. M. Dudley, *Sample functions of the Gaussian processes*, Annal. of Probability **1** (1973), no. 1, 3–68.
4. Antonini R. Giuliano, T.-C. Hu, Yu. Kozachenko, and A. Volodin, *An application of φ-subgaussian technique to Fourier analysis*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 114–124.
5. Antonini R. Giuliano, Yu. Kozachenko, and A. Volodin, *Convergence of series of dependent phi-subgaussian random variables*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 1188–1203.
6. С. В. Ермаков, Е. И. Островский, *Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей*, Деп. в ВИНИТИ, №3752-В.86.0, 1986.

7. Yu. V. Kozachenko, *Random processes in Orlicz spaces. I*, Theory Probab. Math. Stat. **30** (1985), 103–117.
8. Yu. V. Kozachenko, *Random processes in Orlicz spaces. II*, Theory Probab. Math. Stat. **31** (1985), 51–58.
9. Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець, *Простори Банаха випадкових величин* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 92–107.
10. Yu. V. Kozachenko and I. V. Rozora, *Accuracy and reliability of models of stochastic processes of the space* $Sub_\varphi(\Omega)$, Theor. Probability and Math. Statist. **71** (2005), 105–117.
11. Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk, *Lipschitz conditions for* $Sub_\varphi(\Omega)$*-processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments*, Theor. Probability and Math. Statist. **82** (2011), 57–73.
12. A. C. Krinik and R. J. Swift, *Stochastic Processes and Functional Analysis: A Volume of Recent Advances in Honor of M. M. Rao*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, CRC Press, New York, 2004.
13. M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications Of Orlicz Spaces*, Pure and Applied Mathematics, CRC Press, New York, 2002.
14. M. Weber, *Stochastic processes with value in exponential type Orlicz spaces*, The Annals of Probability **16** (1988), no. 3, 1365–1371.
15. D. V. Zatula, *Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics (2013), no. 2, 23–28.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: dm_zatula@mail.ru

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: yvk@univ.kiev.ua

Надійшла 23/06/2014