Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 55–63

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 55–63

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

УДК 519.21

О. В. ІВАНОВ І К. К. МОСКВИЧОВА

Анотація. В роботі досліджено асимптотичну поведінку корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. Доведено функціональну теорему у просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність цієї оцінки.

Abstract. In the paper the asymptotic behavior of the correlogram estimator of covariance function of random noise in nonlinear regression model is investigated. A functional theorem in the space of continuous functions on asymptotic normality of the estimator is proved.

Аннотация. В работе исследовано асимптотическое поведение коррелограмной оценки ковариационной функции случайного шума в нелинейной модели регрессии. Доказана функциональная теорема в пространстве непрерывных функций об асимптотической нормальности этой оценки.

1. Вступ

Припустимо, що спостереження мають вигляд

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0,\infty),$$

де $g\colon [0,\infty)\times\Theta_\gamma \to \mathbb{R}^1$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ — обмежена відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|<1}(\Theta+\gamma a)$, $\gamma > 0$ — деяке число; $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — випадковий шум, що задовольняє наступній умові.

A1. $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — дійсний неперервний в середньому квадратичному та майже напевно (м.н.) стаціонарний гаусівський процес, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, з нульовим середнім та абсолютно інтегровною коваріаційною функцією $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}(t), t \in \mathbb{R}^1\}$.

Очевидно, якщо $\mathbf{B} \in L_1(\mathbb{R}^1)$, то $\mathbf{B} \in L_2(\mathbb{R}^1)$ і процес ε має обмежену та неперервну спектральну щільність $f = \{f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^1\}$, тобто $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$. За тотожністю Планшереля

$$\|\mathbf{B}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}^2(t)\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\,d\lambda = 2\pi\|f\|_2^2.$$

Якщо $\mathbf{B}$ невідома, то виникає задача оцінювання коваріаційної функції за спостереженнями $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$, причому параметр θ набуває статус заважаючого.

Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ на інтервалі спостережень $[0,T]$ називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = \widehat{\theta}_T(X(t), t \in [0,T]) =$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

Ключові слова і фрази. Нелінійна модель регресії, стаціонарний гаусівський процес, коваріаційна функція, спектральна щільність, корелограмна оцінка, випадковий елемент, збіжність за розподілом, асимптотична нормальність.

$(\widehat{\theta}_{1T}, \dots \widehat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ (Θ^c — замикання Θ), для якого

$$L_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau), \qquad L_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t,\tau)]^2 \, dt.$$

У якості оцінки $\mathbf{B}$, прив'язаної до оцінки $\widehat{\theta}_T$, можна взяти корелограму, побудовану за відхиленнями спостережень $\widehat{X}(t) = X(t) - g(t, \widehat{\theta}_T)$, $t \in [0, T+H]$, а саме:

$$\mathbf{B}_T(z, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T \widehat{X}(t+z)\widehat{X}(t) \, dt, \qquad z \in [0, H], \tag{1}$$

$H > 0$ — фіксоване число.

Зауважимо, що $\mathbf{B}_T(0, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} L_T(\widehat{\theta}_T)$ є оцінкою найменших квадратів дисперсії $\sigma^2 = \mathbf{B}(0)$ випадкового процесу ε, в той час як

$$\mathbf{B}_T(z, \theta) = \mathbf{B}_T(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z)\varepsilon(t) \, dt, \qquad t \in [0, H], \tag{2}$$

є корелограмою процесу ε.

Стохастичний асимптотичний розклад та базований на ньому асимптотичний розклад моментів оцінки $\mathbf{B}_T(z, \widehat{\theta}_T)$ одержано в роботах [1, 2]. В даній роботі отримано асимптотичну нормальність корелограмної оцінки $\mathbf{B}_T(z, \widehat{\theta}_T)$.

За умови **A1** випливає, що інтеграли (1) і (2) можна розглядати як інтеграли Рімана, побудовані за траєкторіями відповідних процесів. Більш того, ці інтеграли за z є неперервними м.н. процесами на відрізку $[0, H]$ (див., наприклад [3]–[5]).

2. Умови та результати

Розглянемо процес

$$X_T(z) = T^{1/2} \Big(\mathbf{B}_T(z, \widehat{\theta}_T) - \mathbf{B}(z) \Big) = Y_T(z) + R_T(z), \qquad z \in [0, H],$$

де

$$Y_T(z) = T^{1/2} \left(\mathbf{B}_T(z) - \mathbf{B}(z) \right);$$

$$R_T(z) = T^{-1/2} I_{2T}(z) + T^{-1/2} I_{3T}(z) + T^{-1/2} I_{4T}(z),$$

$$I_{2T}(z) = \int_0^T \left(g(t+z, \widehat{\theta}_T) - g(t+z, \theta) \right) \big(g(t, \widehat{\theta}_T) - g(t, \theta) \big) \, dt,$$

$$I_{3T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t+z) \big(g(t, \widehat{\theta}_T) - g(t, \theta) \big) \, dt,$$

$$I_{4T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t) \big(g(t+z, \widehat{\theta}_T) - g(t+z, \theta) \big) \, dt.$$

Процеси Y_T, I_{2T}, I_{3T}, I_{4T}, а з ними X_T та R_T, будемо розглядати як випадкові елементи у вимірному просторі $(C[0,H], \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин простору неперервних функцій $C[0,H]$. Нехай Z — будь-який із введених вище випадкових елементів. Розподіл Z є ймовірнісною мірою $P = PZ^{-1}$ на $(C[0,H], \mathfrak{B})$.

Сім'я $\{U_T\}$ випадкових елементів збігається за розподілом при $T \to \infty$ до випадкового елемента U в просторі $C[0,H]$ (пишемо $U_T \xrightarrow{\mathcal{D}} U$), якщо розподіли P_T елементів U_T слабко збігаються при $T \to \infty$ до розподілу P елемента U [6]. Для збіжності за розподілом випадкових величин будемо використовувати те ж саме позначення.

Введемо псевдометрики [5]

$$\rho(z_1, z_2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{2} \, d\lambda \right)^{1/2},$$
$$\sqrt{\rho}(z_1, z_2) = \sqrt{\rho(z_1, z_2)}, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Нехай $H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, — метрична ентропія множини $[0, 1]$ відносно псевдометрики $\sqrt{\rho}$.

A2. $\int_{0+} H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) \, d\varepsilon < \infty$.

Якщо $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$, то при $T \to \infty$ для всіх $z_1, z_2 \geq 0$

$$\mathsf{E}\, Y_T(z_1) Y_T(z_2) \to b(z_1, z_2) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \cos \lambda z_1 \cos \lambda z_2 \; d\lambda \; .$$

Нехай $Y = \{Y(z), z \in [0, H]\}$ — дійсний центрований гаусівський процес з коваріаційною функцією $b(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in [0, H]$. Тоді всі скінченномірні розподіли процесів Y_T слабко збігаються при $T \to \infty$ до відповідних скінченномірних розподілів гаусівського процесу Y [7].

Наступний результат отримано в [5, теорема 6.4.1]

Теорема 2.1. *Нехай виконано умови* **A1**, **A2**. *Тоді для будь-якого* $H > 0$

(i) $Y \in C[0, H]$ *м.н.;*
(ii) $Y_T \in C[0, H]$ *м.н.,* $T > 0$*;*
(iii) $Y_T \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$.

Збіжність за розподілом в просторі $C[0, H]$ нормованих корелограм випадкових полів вивчалась в [4].

Враховуючи теорему 2.1, сформулюємо важливий для нас факт, який є перефразованою для $C[0, H]$ теоремою 4.1 ([6, стор. 40]). Для функцій $a(z)$, $z \in [0, H]$, будемо писати $\|a\| = \sup_{z \in [0,H]} |a(z)|$.

Лема 2.1. *Якщо* $Y_T \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ *і*

$$\|R_T\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty. \tag{3}$$

то і $X_T \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$.

Таким чином, для отримання функціональної теореми про асимптотичну нормальність процесу X_T треба довести співвідношення (3).

Введемо декілька потрібних для цього умов. Припустимо, що функція регресії $g(t, \tau)$ двічі неперервно диференційовна за $\tau \in \Theta_\gamma$ при кожному $t \geq 0$, причому ці похідні неперервні за сукупністю змінних. Позначимо

$$g_j(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j} g(t, \tau), \qquad g_{ij}(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} g(t, \tau),$$
$$d_{iT}^2(\tau) = \int_0^T g_i^2(t, \tau) \, dt, \qquad d_{ij,T}^2(\tau) = \int_0^T g_{ij}^2(t, \tau) \, dt,$$
$$d_T(\tau) = \operatorname{diag}\left(d_{iT}(\tau), i = 1, \ldots, q\right).$$

Будемо вважити, що $\varliminf_{T \to \infty} T^{-1/2} d_{iT}(\tau) > 0$, $\tau \in \Theta$, $i = 1, \ldots, q$.

AB. $d_T(\theta)\big(\widehat{\theta}_T - \theta\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \sim N(0, K)$.

Достатні умови асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів містяться в [2, 8].

B1.(i) $\sup_{\tau\in\Theta^c}|g_j(t,\tau)|\le G_j(t)$ для деяких неперервних функцій $G_j(t)$, $t\ge 0$, причому $\frac{D_{jT}}{d_{jT}(\tau)}\le c_j(\tau)<\infty$, $\tau\in\Theta$, де $D_{jT}^2=\int_0^T G_j^2(t)\,dt$, $j=1,\dots,q$;

(ii) $\frac{d_{j,T+H}(\tau)}{d_{jT}(\tau)}\to 1$, $T\to\infty$, для $\tau\in\Theta$ і будь-якого фіксованого $H>0$.

B2. $\sup_{\tau\in\Theta^c}|g_{ij}(t,\tau)|\le G_{ij}(t)$ для деяких неперервних функцій $G_{ij}(t)$, $t\ge 0$, та $\frac{D_{ij,T}}{d_{iT}(\tau)d_{jT}(\tau)}\le c_{ij}(\tau)T^{-1/2}$, $\tau\in\Theta$, де $D_{ij,T}^2=\int_0^T G_{ij}^2(t)\,dt$, $i,j=1,\dots,q$.

Позначимо $g_{jT}(\lambda,\tau)=\int_0^T e^{i\lambda t}g_j(t,\tau)\,dt$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$. За тотожністю Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_{jT}(\lambda,\tau)|^2\,d\lambda=2\pi d_{jT}^2(\theta).$$

Введемо сім'ю мір на $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}^1\right)$

$$\mu_{jT}(d\lambda,\tau)=\frac{|g_{jT}(\lambda,\tau)|^2\,d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty}|g_{jT}(\lambda,\tau)|^2\,d\lambda},\qquad T>0.$$

B3. Сім'я мір $\mu_{jT}(\tau)$ слабко збігається при $T\to\infty$ до міри $\mu_j(\tau)$, $\tau\in\Theta$, $j=1,\dots,q$.

Міра $\mu_j(\tau)=\mu_j(d\lambda,\tau)$ називається спектральною мірою функції $g_j(t,\tau)$ (див., наприклад, [9, 4]).

A3. $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^1}|\lambda|^{1+\delta}f(\lambda)\le c(\delta)<\infty$ для деякого $\delta\in(0,1]$.

Умова **A3** є достатньою для виконання умови **A2** ([5, стор. 212]).

Позначимо

$$\Psi_{jT}\left(z_1,z_2;\tau\right)=\int_0^T\left(g_j(t+z_1,\tau)-g_j(t+z_2,\tau)\right)^2\,dt,$$

B4. $d_{jT}^{-2}\Psi_{jT}\left(z_1,z_2;\tau\right)\le\overline{c}_j(\tau)\left|z_1-z_2\right|^2$, $z_1,z_2\in[0,H]$; $\overline{c}_j(\tau)<\infty$, $\tau\in\Theta$, $j=1,\dots,q$.

Будемо вимагати, щоб умови **B1(i)**, **B2**, **B4** виконувались для достатньо великих T, $T>T_0$.

Теорема 2.2. *Якщо виконано умови* **A1**, **A3**, **AB**, **B1** $-$ **B4**, *то*

$$X_T(\cdot)=T^{1/2}\left(\mathbf{B}_T\left(\cdot,\widehat{\theta}_T\right)-\mathbf{B}(\cdot)\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}Y.$$

З урахуванням леми 2.1, доведення теореми складається з доведення трьох лем.

Лема 2.2. *За умов* **AB**, **B1**

$$T^{-1/2}\left\|I_{2T}\right\|\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\qquad T\to\infty.$$

Доведення. Використовуючи позначення

$$\Phi_T(\tau_1,\tau_2)=\int_0^T\left(g(t,\tau_1)-g(t,\tau_2)\right)^2\,dt,$$

маємо

$$T^{-1/2}\left\|I_{2T}\right\|\le T^{-1/2}\Phi_T^{1/2}\big(\widehat{\theta}_T,\theta\big)\Phi_{T+H}^{1/2}\big(\widehat{\theta}_T,\theta\big),$$

$$T^{-1/2}\Phi_T^{1/2}\big(\widehat{\theta}_T,\theta\big)\le T^{-1/2}\left(\sum_{i,j=1}^{q}\int_0^T G_i(t)G_j(t)\,dt\big|\widehat{\theta}_{iT}-\theta_i\big|\big|\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j\big|\right)^{1/2}$$

$$\le\sum_{j=1}^{q}\frac{D_{jT}}{d_{jT}(\theta)}\left(T^{-1/2}d_{jT}(\theta)\big|\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j\big|\right)\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\qquad T\to\infty.$$

З іншого боку, для будь-якого $\Delta > 0$ і $T > T_0(\Delta)$

$$\Phi_{T+H}^{1/2}\big(\widehat{\theta}_T, \theta\big) \le \sum_{j=1}^{q} \frac{D_{j,T+H}}{d_{j,T+H}(\theta)} \cdot \frac{d_{j,T+H}(\theta)}{d_{jT}(\theta)} \left| d_{jT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{jT} - \theta_j\big) \right|$$
$$\le (1+\Delta)\|c(\theta)\| \left\| d_T\big(\widehat{\theta}_T - \theta\big) \right\|,$$

де $c(\theta) = (c_j(\theta))_{j=1}^q$. □

Лема 2.3. *За умов* **A1**, **A3**, **AB**, **B1** $-$ **B3**

$$T^{-1/2}\,\|I_{3T}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty.$$

Доведення. Умови **B1(i)**, **B2(i)** дозволяють застосувати формулу Тейлора до інтеграла $T^{-1/2} I_{3T}(z)$ і записати

$$\begin{aligned} T^{-1/2} I_{3T}(z) &= \sum_{j=1}^{q} d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z) g_j(t,\theta)\,dt \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{jT} - \theta_j\big) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{q} d_{iT}^{-1}(\theta) d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z) g_{ij}(t,\theta_T^*)\,dt \\ &\qquad\qquad \times d_{iT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{iT} - \theta_i\big) \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{jT} - \theta_j\big) \right) \\ &= \sum_{1T}(z) + \sum_{2T}(z), \qquad \|\theta_T^* - \theta\| \le \|\widehat{\theta}_T - \theta\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Розглянемо м.н. неперервні випадкові процеси

$$\xi_{jT}(z) = d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z) g_j(t,\theta)\,dt, \qquad z \in [0,H],\ T > 0,\ j = 1,\dots,q.$$

За умови **B3** при $T \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{jT}(z_1 - z_2) &= \mathsf{E}\,\xi_{jT}(z_1)\xi_{jT}(z_2) \\ &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T \mathbf{B}(t - s + z_1 - z_2) g_j(t,\theta) g_j(s,\theta)\,dt\,ds \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(z_1 - z_2)} f(\lambda)\,\mu_{jT}(d\lambda,\theta) \\ &\to 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda(z_1 - z_2) f(\lambda)\,\mu_j(d\lambda,\theta) = \mathbf{B}_j(z_1 - z_2), \qquad z_1, z_2 \in [0,H]. \end{aligned}$$

Таким чином, всі скінченномірні розподіли стаціонарного гаусівського процесу ξ_{jT} збігаються до відповідних скінченномірних розподілів стаціонарного гаусівського процесу $\xi_j = \{\xi_j(z), z \in [0,H]\}$ з коваріаційною функцією $\mathbf{B}_j(z)$. Ми припускаємо, що процеси ξ_j, $j = 1,\dots,q$, є сепарабельними.

Оскільки за умови **A3** для $j = 1,\dots,q$

$$\mathsf{E}\,(\xi_j(z_1) - \xi_j(z_2))^2 = 2\,(\mathbf{B}_j(0) - \mathbf{B}_j(z_1 - z_2)) \le 2^{1-\delta}\pi c(\delta)|z_1 - z_2|^{1+\delta},$$
$$z_1, z_2 \in [0,H],$$

то процеси ξ_j є неперервними м.н. за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [10]).

З іншого боку, для $\delta \in (0,1]$ за умов леми для $T > T_0$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,(\xi_{jT}(z_1) - \xi_{jT}(z_2))^2 &= 2\,(\mathbf{B}_{jT}(0) - \mathbf{B}_{jT}(z_1 - z_2)) \\ &\le 2^{2-\delta}\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda)\,\mu_j(d\lambda,\theta) + 1 \right) |z_1 - z_2|^{1+\delta}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\xi_{jT} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi_j$, $j = 1, \dots, q$, в просторі $C[0, H]$, і для всіх неперервних на $C[0, H]$ функціоналів φ розподіл $\varphi(\xi_{jT})$ буде збігатися до розподілу $\varphi(\xi_j)$. Зокрема, $\|\xi_{jT}\| \xrightarrow{\mathcal{D}} \|\xi_j\|$, $j = 1, \dots, q$, і (див. (4))

$$\|\Sigma_{1T}\| \le \sum_{j=1}^{q} \|\xi_{jT}\| \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left| \widehat{\theta}_{jT} - \theta_{jT} \right| \right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{5}$$

Окремий доданок суми $\sum_{2T}(z)$, $z \in [0, H]$, мажорується величиною

$$\sqrt{2} \frac{T^{1/2} D_{ij,T}}{d_{iT}(\theta) d_{jT}(\theta)} \left((2T)^{-1} \int_0^{2T} \varepsilon^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left| d_{iT}(\theta) \left(\widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \right| \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left| \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right| \right),$$

де за умови **B2**

$$\frac{T^{1/2} D_{ij,T}}{d_{iT}(\theta) d_{jT}(\theta)} \le c_{ij}(\theta).$$

Крім цього,

$$(2T)^{-1} \int_0^{2T} \varepsilon^2(t)\, dt \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathbf{B}(0), \qquad T \to \infty,$$

тому що

$$\mathsf{E} \left(T^{-1} \int_0^T \left(\varepsilon^2(t) - \mathbf{B}(0) \right) dt \right)^2 = 2T^{-2} \int_0^T \int_0^T \mathbf{B}^2(t - s)\, dt\, ds = O\left(T^{-1} \right).$$

Отже,

$$\|\Sigma_{2T}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty, \tag{6}$$

і результат леми випливає з (4)–(6).

□

Лема 2.4. *За умов* **A1**, **AB**, **B1**, **B2**, **B4**

$$T^{-1/2} \|I_{4T}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty.$$

Доведення. Запишемо

$$\begin{aligned} T^{-1/2} I_{4T}(z) &= \sum_{j=1}^{q} d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_j(t + z, \theta)\, dt \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left(\widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{q} d_{iT}^{-1}(\theta) d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_{ij}(t + z, \theta_T^*)\, dt \\ &\qquad \times \left(d_{iT}(\theta) \left(\widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \right) \left(T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left(\widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) \\ &= \Sigma_{3T}(z) + \Sigma_{4T}(z). \end{aligned}$$

Розглянемо м.н. неперервні гаусівські процеси

$$\eta_{jT}(z) = d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_j(t + z, \theta)\, dt, \qquad z \in [0, H],\ T > 0,\ j = 1, \dots, q.$$

Маємо для $z_1, z_2 \in [0, H]$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, \eta_{jT}(z_1) \eta_{jT}(z_2) &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T \mathbf{B}(t - s) g_j(t + z_1, \theta) g_j(s + z_2, \theta)\, dt\, ds \\ &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_{z_1}^{T + z_1} \int_{z_2}^{T + z_2} \mathbf{B}(t - s + z_2 - z_1) g_j(t, \theta) g_j(s, \theta)\, dt\, ds, \end{aligned}$$

причому

$$\int_{z_1}^{T+z_1}\int_{z_2}^{T+z_2} = \left(\int_0^T + \int_T^{T+z_1} - \int_0^{z_1}\right)\left(\int_0^T + \int_T^{T+z_2} - \int_0^{z_2}\right).$$

Оцінимо інтеграл

$$\begin{aligned}\left|d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^T\int_T^{T+z_2}\right| &\le \left(\int_T^{T+z_2}\int_0^T \mathbf{B}^2(t-s+z_2-z_1)\,dt\,ds\right)^{1/2}\\ &\quad\times\left(d_{jT}^{-2}(\theta)\int_T^{T+z_2} g_j^2(s,\theta)\,ds\right)^{1/2}\\ &\le H^{1/2}\|\mathbf{B}\|_2\left(d_{jT}^{-2}(\theta)\left(d_{j,T+H}^2(\theta)-d_{jT}^2(\theta)\right)\right)^{1/2}\to 0\end{aligned}$$

за умови **B1**(**ii**).

Так само $d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^{T+z_1}\int_0^T \to 0$. Аналогічно

$$\left|d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^T\int_0^{z_2}\right| \le H^{1/2}\|\mathbf{B}\|_2 d_{jH}(\theta)d_{jT}^{-1}(\theta)\to 0, \qquad d_{jT}^{-2}\int_0^{z_1}\int_0^T \to 0.$$

Далі отримуємо

$$\left|d_{jT}^{-2}(\theta)\int_T^{T+z_1}\int_T^{T+z_2}\right| \le H\mathbf{B}(0)d_{jT}^{-2}(\theta)\int_T^{T+H} g_j^2(t,\theta)\,dt\to 0,$$

$$\left|d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^{z_1}\int_T^{T+z_2}\right| \le H\mathbf{B}(0)d_{jH}(\theta)d_{jT}^{-1}(\theta)\left(d_{jT}^{-2}(\theta)\int_T^{T+H} g_j^2(s,\theta)\,ds\right)^{1/2}\to 0,$$

$$d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^{T+z_1}\int_0^{z_2}\to 0, \qquad d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^{z_1}\int_0^{z_2}\to 0.$$

Таким чином,

$$\mathsf{E}\,\eta_{jT}(z_1)\eta_{jT}(z_2) = \mathbf{B}_{jT}(z_1,z_2)+o_{jT}(1), \qquad o_{jT}(1)\to 0,\ z_1,z_2\in[0,H],$$

і всі скінченномірні розподіли процесів η_{jT} збігаються до відповідних скінченномірних розподілів м.н. неперервних процесів ξ_j, $j=1,\dots,q$ (див. доведення леми 2.3).

Крім цього, за умов **A1**, **B4**

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left(\eta_{jT}(z_1)-\eta_{jT}(z_2)\right)^2\\ &\quad= d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^T\int_0^T \mathbf{B}(t-s)\left(g_j(t+z_1,\theta)-g_j(t+z_2,\theta)\right)\\ &\qquad\qquad\times\left(g_j(s+z_1,\theta)-g_j(s+z_2,\theta)\right)\,dt\,ds\\ &\quad\le d_{jT}^{-2}(\theta)\int_0^T\int_0^T |\mathbf{B}(t-s)|\left(g_j(t+z_1,\theta)-g_j(t+z_2,\theta)\right)^2\,dt\,ds\\ &\quad\le \|\mathbf{B}\|_1 d_{jT}^{-2}(\theta)\Psi_{jT}(z_1,z_2;\theta)\le \overline{c}_j(\theta)\|\mathbf{B}\|_1|z_1-z_2|^2,\end{aligned}$$

$z_1,z_2\in[0,H]$, $j=1,\dots,q$, $\|\mathbf{B}\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{B}(t)|\,dt<\infty$.

Ми довели, що $\|\eta_{jT}\|\xrightarrow{\mathcal{D}}\|\xi_j\|$, $j=1,\dots,q$, і з умови **AB** випливає, що $\|\sum_{3T}\|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $T\to\infty$.

Окремий доданок суми $\Sigma_{4T}(z)$, $z \in [0,H]$, оцінюємо зверху величиною

$$\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2} \frac{D_{ij,T+H}(T+H)^{1/2}}{d_{i,T+H}(\theta)d_{j,T+H}(\theta)} \frac{T^{1/2}}{(T+H)^{1/2}} \left(\frac{d_{i,T+H}(\theta)}{d_{iT}(\theta)}\right)\left(\frac{d_{j,T+H}(\theta)}{d_{jT}(\theta)}\right)$$
$$\times \left|d_{iT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{iT}-\theta_i\big)\right| \left|T^{-1/2}d_{jT}(\theta)\big(\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j\big)\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T\to\infty,$$

завдяки умовам **A1**, **AB**, **B1**, **B2**. Таким чином, $\|\sum_{4T}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, і лему доведено. □

3. Приклад

Нехай $g(t,\theta) = A\cos\varphi t + B\sin\varphi t$, $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (A,B,\varphi) \in \Theta$, причому Θ^c — компактна підмножина множини $(0,\infty)^3$. Маємо $d_{1T}^2(\theta)$, $d_{2T}^2(\theta) = \frac{T}{2} + O(1)$, $d_{3T}^2(\theta) = \frac{A^2+B^2}{6}T^3 + O(T^2)$.

В умові **B1**(**i**) можна взяти $G_1(t) = G_2(t) = 1$, $G_3(t) = (\overline{A}+\overline{B})t$, де $\overline{A}$ і $\overline{B}$ — верхні границі значень параметрів A і B. Тоді $D_{1T}^2 = D_{2T}^2 = T$, $D_{3T}^2 = \frac{(\overline{A}+\overline{B})^2}{3}T^3$, і ми бачимо, що умову **B1**(**i**) виконано. Виконання **B1**(**ii**) очевидно.

Також очевидно, що $g_{11} = g_{22} = g_{12} = 0$, $g_{13} = -t\sin\varphi t$, $g_{23} = t\cos\varphi t$, $g_{33} = -At^2\cos\varphi t - Bt^2\sin\varphi t$, $G_{13}(t) = G_{23}(t) = t$, $G_{33}(t) = \big(\overline{A}+\overline{B}\big)t^2$, $D_{13,T}^2 = D_{23,T}^2 = \frac{T^3}{3}$, $D_{33,T}^2 = \frac{(\overline{A}+\overline{B})^2}{5}T^5$, і тому

$$\frac{D_{j3,T}^2}{d_{jT}(\theta)d_{3T}(\theta)} = O(T^{-1/2}), \qquad j = 1,2,3,$$

тобто виконано умову **B2**.

Неважко зрозуміти (див., наприклад, [9, 11]), що функції g_1, g_2, g_3 мають одну й ту саму атомну спектральну міру $\mu(d\lambda)$ таку, що $\mu(\{\pm\varphi\}) = 1/2$. Таким чином, умову **B3** виконано.

Зауважимо, що в цьому прикладі при $f(\varphi) \neq 0$

$$\mathbf{B}_j(z) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda z f(\lambda)\,\mu(d\lambda) = 2\pi f(\varphi)\cos\varphi z, \qquad j = 1,2,3.$$

Це означає, що граничні процеси $\xi_j(z)$, $z \in [0,H]$, є випадковими гармонічними коливаннями, а саме: $\xi_j(z) = \eta_j\cos\varphi z + \zeta_j\sin\varphi z$, де η_j, ζ_j — незалежні $N(0,2\pi f(\varphi))$ випадкові величини.

Перевіримо виконання умови **B4**. Для $j = 1,2$ це очевидно. Нехай $z_2 > z_1$, тоді

$$|g_3(t+z_1,\theta) - g_3(t+z_2,\theta)| = |g_3'(t^*,\theta)|\cdot|z_1-z_2|,$$

де $t^* = t + z_1 + \nu(z_2-z_1) \le t+H$, $\nu \in (0,1)$, — деяке число. Маємо

$$g_3(t,\theta) = -At\sin\varphi t + Bt\cos\varphi t,$$
$$c|g_3'(t^*,\theta)|^2 = |-A\sin\varphi t^* - A\varphi t^*\cos\varphi t^* + B\cos\varphi t^* - B\varphi t^*\sin\varphi t^*|^2$$
$$\le (A+B)^2(1+\varphi H+\varphi t)^2,$$

і тому

$$d_{3T}^{-2}(\theta)\Psi_{3T}(z_1,z_2;\theta) \le \left(1+O\left(T^{-1}\right)\right)^{-1}\left(\frac{2\varphi^2(A+B)^2}{A^2+B^2} + O\left(T^{-1}\right)\right)|z_1-z_2|^2.$$

Щодо умови **AB**, то асимптотичну нормальність нормованої оцінки найменших квадратів $d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T-\theta)$ для тригонометричної функції регресії отримано, наприклад, в роботах [11, 12].

4. Висновки

Розглянуто нелінійну модель регресії з неперервним часом і неперервним в середньому квадратичному та м.н. гаусівським стаціонарним випадковим шумом з нульовим середнім та абсолютно інтегровною коваріаційною функцією. Доведено функціональну теорему у просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність цієї оцінки, яка дозволить будувати асимптотичні надійні інтервали для невідомої коваріаційної функції випадкового шуму.

Література

1. О. В. Іванов, К. К. Москвичова, *Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії*, Теорія ймовір. та матем. статист. **90** (2014), 78–91.
2. О. В. Іванов, К. К. Москвичова, *Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії*, Укр. мат. журн. **66** (2014), №6, 787–805.
3. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, "Мир", Москва, 1969.
4. А. В. Иванов, Н. Н. Леоненко, *Статистический анализ случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1986.
5. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998.
6. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
7. В. В. Булдыгин, *О свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью*, Укр. мат. журн. **7** (1995), №7, 876–889.
8. A. V. Ivanov, *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht–Boston–London, 1997.
9. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские случайные процессы*, "Наука", Москва, 1970.
10. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1965.
11. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, and B. M. Zhurakovsky, *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics (2014), DOI: 10.1080/02331888.2013.864656.
12. A. V. Ivanov, *A solution of the problem of detecting hidden periodicities*, Theor. Probability and Math. Statist. **20** (1980), 51–68.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: kamok@ua.fm