Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 74–85

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 74–85

ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ ВЫПЛАТЫ СВИНГ ОПЦИОНА В БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

УДК 519.21

А. В. КУЛИКОВ И Н. О. МАЛЫХ

Аннотация. В этой работе мы показали, что при нахождении справедливой цены свинг опциона с помощью метода деревьев оптимальной стратегией при целом количестве долга по контракту является двухпозиционный режим — в каждый момент времени надо покупать максимально возможный объем базового актива, или оставить долг неизменным, если это возможно. Для нецелых значений долга функция выплаты в каждом узле дерева имеет аффинную структуру.

Анотація. У цій роботі ми показали, що при знаходженні справедливої ціни свінг опціону за допомогою методу дерев оптимальною стратегією при цілій кількості боргу за контрактом є двохпозиційний режим — в кожен момент часу треба купувати максимально можливий обсяг базового активу, або залишити борг незмінним, якщо це можливо. Для нецілих значень боргу функція виплати в кожному вузлі дерева має афінну структуру.

Abstract. We use lattice method to price swing option. We show that the payoff function at each node of the lattice is concave and piecewise affine. The conclusion of this result is that there exist a bang-bang control such that if the loan at the moment is integer then $[0,1]$-valued optimal purchased quantitity at this moment is equal to 0 or 1. If the loan at the moment isn't integer then the fair price is a convex combination of the nearest payoff values with integer loans.

1. Введение

Первая модель дерева ценообразования опционов была дана Cox et al. [1], которую принято теперь называть биномиальной моделью Кокса–Росса–Рубинштейна (КРР). Деревья остаются по-прежнему важным инструментом нахождения справедливых цен опционов — современный обзор моделей можно найти в Seydel [2]. Как правило, деревья требуют большого объема вычислений, и используются, когда надо принимать решения об исполнении опциона в зависимости от траектории случайного процесса, описывающего динамику цены базового актива. Примером такого контракта является свинг опцион, популярный на рынке энергетических опционов.

Определение и основные свойства свинг опциона можно найти в Breslin et al. [3]. Типичный газовый свинг контракт — это договор между поставщиком и покупателем на ежедневную поставку переменного количества газа, причем это количество должно лежать в заранее оговоренных пределах минимальной и максимальной ежедневных норм, в течение некоторого периода времени по оговоренному набору контрактных цен. Основное ограничение таких договоров, усложняющую их оценку, заключается в том, что существует минимальный объем газа, называемый take-or-pay (буквально — “бери-или-плати” [неустойку]), который взыщут с покупателя в конце периода действия контракта (или в штрафную дату).

Хотя свинг контракты используются в течение многих лет для управления свойственной рынку газа неопределенности спроса и предложения, лишь в последние

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91G20; Secondary 91-02.

Ключевые слова и фразы. Свинг опцион, метод деревьев, двухпозиционное управление, энергетические деривативы.

годы, с отменой регулирования энергетических рынков, появился интерес в понимании и оценке стоимости опциональности, заложенной в этих контрактах. Волатильность в модели Breslin et al. [3] является детерминированной функцией и по переменной, фиксирующей текущей момент времени, и по переменной, отвечающей за время, оставшееся до истечения контракта.

Однако существует ряд доказательств, иллюстрирующих, что волатильность на газовых рынках является стохастической, и в работе Chiarella et al. [4] утверждается, что модель с изменяющимися режимами (волатильности) точнее передает стохастическую природу функции волатильности на газовом рынке. За основу ими были взяты модели из Wahab, Lee [5] и Wahab et al. [6]. Все они берут за основу модель пентаномиального дерева с изменяющимися режимами из Bollen [7]. Если Wahab, Lee [5] и Wahab et al. [6] берут в качестве динамики процесса цены базового актива геометрическое броуновское движение и не учитывают “take-or-pay” объем при расчете цены опциона, то Chiarella et al. [4] в своей работе берут процесс возвратного к среднему в качестве динамики актива и учитывают “take-or-pay” объем при расчете цены опциона. В работах Wahab, Lee [5] и Wahab et al. [6] при расчете цены опциона в каждый момент времени с помощью принципа динамического программирования берется максимум из двух значений: стоимости опциона в случае покупки максимально возможного количества базового актива в текущий момент времени и стоимости опциона в случае неисполнения права в текущий момент времени. При этом количество долга в каждый момент равно целому значению. Такая стратегия называется “bang-bang” управлением (дословно - двухпозиционный режим). Однако в этих работах не показано, почему такая стратегия будет максимизировать прибыль владельца свинг опциона.

Мы взяли модель биномиального дерева, и показали, что при определенных условиях на глобальные границы покупки базового актива по контракту оптимальная стратегия, когда долг по контракту равен целому числу, в самом деле отвечает “bang-bang” режиму. При этом было показано, что функция выплаты по опциону в каждом узле дерева имеет вогнутую, кусочно-линейную структуру.

Более общие результаты о существовании “bang-bang” режима можно найти в Bardou et al. [8]. Мы же стремились показать свойства функции выплаты свинг опциона в более практической оболочке. В частности, говоря о вогнутости функции выплаты свинг опциона, мы дадим наглядный интуитивно понятный финансовый смысл этого свойства.

2. Оптимальная стратегия владельца свинг опциона

Рассмотрим биномиальную модель Кокса–Росса–Рубинштейна на временном промежутке от 0 до N. Пусть $S_j(n)$ — спотовая цена базового актива в момент времени n, когда к этому моменту цена сделала j шагов вверх, стартовав в $S_0(0)$. Поскольку мы работаем в условиях КРР-модели изменения спотовой цены базового актива, то имеет место равенство

$$S_j(n) = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}S_{j+1}(n+1) + \tilde{q}S_j(n+1)),$$

где r — фиксированная безрисковая процентная ставка, $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — риск-нейтральные вероятности, соответственно, роста и падения цены базового актива на каждом шаге. Для $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ выполнено равенство

$$\tilde{p}u + \tilde{q}d = 1 + r,$$

где u и d — соответственно, коэффициенты роста и падения на каждом шаге. Для того, чтобы величины $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ были положительны и давали в сумме единицу, необходимо и достаточно выполнение условия безарбитражности

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Пусть V_N является $\mathcal{F}_N$-измеримой случайной величиной и обозначает выплату по опциону в момент времени V_N. Здесь $\mathcal{F}_N$ — сигма-алгебра событий, которые могут наблюдаться вплоть до момента времени N, при этом для любых $0 \le n \le m \le N$ выполнено $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_N$. Тогда для любого n, такого что $0 \le n \le N$, цена производной ценной бумаги в момент времени n задается следующей *риск-нейтральной формулой ценообразования:*

$$V_n = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right],$$

где $\widetilde{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_n]$ — условное математическое ожидание относительно риск-нейтральных вероятностей.

Более того, дисконтированная цена производного финансового инструмента является мартингалом относительно риск-нейтральной меры:

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right].$$

Определим свинг опцион в КРР-модели. Мы будем рассматривать так называемый *нормализованный свинг опцион*: в каждый момент времени мы можем купить не более 1 единицы базового актива, то есть объем покупки базового актива в каждый момент времени может варьироваться лишь от нуля до единицы.

Суммарные ограничения на потребляемый актив следующие: если контракт заключается в нулевой момент времени, а истекает в момент времени N, то владелец контракта не может выкупить более $N+1$ единиц актива за весь период действия свинг опциона. Пусть m — количество базового актива, которое осталось выкупить к моменту времени $N-l$, тогда в начальный момент времени выполнено ограничение $0 \le m \le N+1$, а в момент времени $N-l$ должно выполняться $0 \le m \le l+1$. Причем, если в момент времени $N-l$ выполнено $m = l+1$, то стратегия владельца контракта единственна: в каждый момент времени, начиная с $N-l$, он обязан покупать 1 единицу базового актива. Пусть K — оговоренная заранее цена единицы базового актива по свинг опциону, то есть цена страйк.

Определим $V(j,m,l)$ как цену свинг опциона в момент времени $N-l$, когда спотовая цена базового актива сделала j шагов вверх к моменту времени $N-l$, а m — количество базового актива, которое осталось выкупить к моменту времени $N-l$. Тогда граничные условия будут иметь следующий вид:

$$V(j,0,0) = (S_j(N) - K)^+, \qquad V(j,1,0) = S_j(N) - K,$$

а в случае $\alpha \in (0,1)$ имеет место

$$V(j,\alpha,0) = \alpha(S_j(N) - K) + (1-\alpha)(S_j(N) - K)^+ = \alpha V(j,1,0) + (1-\alpha)V(j,0,0).$$

Тогда $V(j,0,0) = (S_j(N) - K)^+$ — случай, когда к моменту времени N владелец контракта уже выкупил весь газ, и может действовать следующим образом: если $S_j(N) - K > 0$, то владелец контракта может купить 1 единицу газа по цене K согласно опциону, а затем тут же продать на спотовом рынке по цене $S_j(N)$, получив, таким образом, прибыль $S_j(N) - K$; если же $S_j(N) \le K$, то владелец контракта, поскольку $m = 0$, не обязан выкупать ничего, и проводить аналогичную стратегию, как при $S_j(N) > K$, не имеет смысла, поскольку теперь владелец опциона уйдет в минус. Оба этих случая можно заключить в выражении

$$(S_j(N) - K)^+ = \max(S_j(N) - K, 0)$$

при $m = 0$. Если же $m = 1$, то выплата по контракту в момент времени N равна $V(j,1,0) = S_j(N) - K$. Владелец контракта обязан выкупить 1 единицу газа в момент времени N, а выплата по контракту соответственно равна $S_j(N) - K$ — аналогичные рассуждения были проведены выше.

Для того, чтобы оценить этот инструмент, мы сделаем ключевое предположение о том, что решения о покупке газа принимаются исключительно в соответствии с эволюцией спотовой цены базового актива, а не реальной потребности в газе владельцем опциона. Тогда в силу рациональности владельца свинг опциона цена производного финансового инструмента в каждый момент времени $N - l$ представляет собой решение оптимизационной задачи о максимизации прибыли:

$$\begin{aligned} V(j,m,l) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \Bigg[\alpha(S_j(N-l) - K) + \frac{1}{1+r} (\tilde{p}V(j+1, (m-\alpha)^+, l-1) \\ + \tilde{q}V(j, (m-\alpha)^+, l-1) \Bigg]. \end{aligned}$$

Покажем ряд свойств функции $V(j,m,l)$, которые позволят обосновать оптимальную стратегию владельца свинг опциона в модели КРР, при условии, что он стремится максимизировать свою прибыль.

Далее, для упрощения выкладок положим $r = 0$.

Теорема 2.1. *Функция цены свинг опциона $V(j,m,l)$ не возрастает с ростом m для произвольных l и j.*

Доказательство. Доказательство проведем прямой индукцией по l для всех j.

I. *База индукции* $l = 0$. Ясно, что по $V(j,\alpha,0) \le V(j,\beta,0)$, если $0 \le \beta \le \alpha \le 1$, поскольку в $V(j,\beta,0)$ заложена большая опциональность в силу того, что количество базового актива, необходимое купить в момент времени N в этом случае меньше.

II. *Шаг индукции.* Пусть для $l_0 = l - 1$ наше утверждение верно. Предположим, что

$$V(j,m_1,l) = \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q}V(j, (m_1-\alpha)^+, l-1).$$

Возьмем m_2, такое что $0 \le m_2 \le m_1 \le l + 1$. Для любых $\alpha \in [0,1]$ в силу определения функции V будет выполнено

$$V(j,m_2,l) \ge \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q}V(j, (m_2-\alpha)^+, l-1).$$

Так как $m_2 \le m_1$, то по предположению индукции

$$V(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) \ge V(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1),$$
$$V(j, (m_2-\alpha)^+, l-1) \ge V(j, (m_1-\alpha)^+, l-1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(j,m_2,l) &\ge \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q}V(j, (m_2-\alpha)^+, l-1) \\ &\ge \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q}V(j, (m_1-\alpha)^+, l-1) \\ &= V(j,m_1,l). \end{aligned}$$

Это и завершает доказательство в силу произвольности выбранного α. □

Теорема 2.2. *Для любых l и j выполнены следующие свойства функции цены свинг опциона $V(j,m,l)$:*

- *для любого целого m, такого что $0 \le m \le l$, $V(j,m,l)$ имеет следующий вид:*

$$V(j,m,l) = \max\Big[S_j(N-l)-K+\tilde{p}V\left(j+1,(m-1)^+,l-1\right)+\tilde{q}V\left(j,(m-1)^+,l-1\right); \\ \tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1)\Big];$$

- *$V(j,m,l)$ является вогнутой по m, где $m \in \mathbb{Z}_+$;*
- *функция $V(j,m,l)$ кусочно-линейна, то есть для всех $\alpha \in [0,1]$ и $m \in \mathbb{Z}_+$, такого что $0 \le m \le l$, выполнено*

$$V(j,m+\alpha,l) = \alpha V(j,m+1,l) + (1-\alpha)V(j,m,l).$$

Доказательство. Следующее доказательство проведем прямой индукцией по l для всех j. Ключевым фактом является доказательство всех утверждений одновременно, так как при доказательстве каждого из свойств используются все утверждения из базы индукции: по отдельности пункты теоремы не доказываются, так как являются взаимосвязанными.

I. *База индукции* очевидна из граничных условий. В самом деле, при $l = 0$ рассматриваем возможные цены свинг опциона в момент времени N. Так как $0 \le m \le l+1$ в каждый момент времени, то при $l = 0$ целые значения m могут быть равны либо 0, либо 1:

$$V(j,0,0) = (S_j(N)-K)^+, \qquad V(j,1,0) = S_j(N)-K.$$

Если $\alpha \in [0,1]$, то

$$V(j,\alpha,0) = \alpha(S_j(N)-K) + (1-\alpha)(S_j(N)-K)^+ = \alpha V(j,1,0) + (1-\alpha)V(j,0,0),$$

В итоге мы видим, что при $l = 0$ $V(j,m,l)$ представляет собой линейную функцию на отрезке $[0,1]$.

II. *Шаг индукции.* Пусть для всех $l < l_0$ имеют место все 3 свойства функции $V(j,m,l)$. Рассмотрим случай, когда $l = l_0$.

1. Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ и всех $\alpha \in [0,1]$

$$V(j,m,l) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \big\{\alpha(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1,m-\alpha,l-1) + \tilde{q}V(j,m-\alpha,l-1)\big\}.$$

В силу предположения индукции

$$V(j,m-\alpha,l-1) = (1-\alpha)V(j,m,l-1) + \alpha V(j,m-1,l-1).$$

Тогда

$$V(j,m,l) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \Big\{\alpha(S_j(N-l)-K) \\ + (1-\alpha)\big[\tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1)\big] \\ + \alpha\big[\tilde{p}V(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m-1,l-1)\big]\Big\}.$$

Но $\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha a + (1-\alpha)b\} = \max\{a,b\}$, следовательно,

$$V(j,m,l) = \max\Big[S_j(N-l)-K+\tilde{p}V(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m-1,l-1); \\ \tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1)\Big].$$

2. Вогнутость по $m \in \mathbb{Z}_+$. При $0 \le m \le l-1$ из пункта 1 шага индукции определены следующие функции:

$$\begin{aligned} V(j,m,l) = \max\big[&S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1);\\ &\tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\big],\\ V(j,m+1,l) = \max\big[&S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1);\\ &\tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)\big],\\ V(j,m-1,l) = \max\big[&S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}V(j,m-2,l-1);\\ &\tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1)\big]. \end{aligned}$$

Если $m = l$, то

$$V(j,m+1,l) = S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1).$$

Рассмотрим 4 ситуации при $0 \le m \le l-1$:

a. Пусть

$$\begin{aligned} S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)&\\ \ge \tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)& \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}V(j,m-2,l-1)&\\ \ge \tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1).& \end{aligned}$$

В силу предположения индукции $V(j,m,l-1)$ выпукла вверх, тогда

$$\begin{aligned} V(j,m,l) &\ge S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1)\\ &\ge \frac{1}{2}\Big(S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\\ &\quad + S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}V(j,m-2,l-1)\Big)\\ &= \frac{V(j,m+1,l) + V(j,m-1,l)}{2}. \end{aligned}$$

b. Пусть теперь

$$\begin{aligned} S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)&\\ < \tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)& \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}V(j,m-2,l-1)&\\ < \tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1).& \end{aligned}$$

В силу предположения индукции

$$\begin{aligned} V(j,m,l) &\ge \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\\ &\ge \frac{1}{2}\Big(\tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)\\ &\qquad + \tilde{p}V(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}V(j,m-1,l-1)\Big)\\ &= \frac{V(j,m+1,l) + V(j,m-1,l)}{2}. \end{aligned}$$

c. Рассмотрим случай, когда

$$\begin{aligned} S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)&\\ \ge \tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)& \end{aligned}$$

и

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1, m-2, l-1) + \tilde{q}V(j, m-2, l-1)$$
$$< \tilde{p}V(j+1, m-1, l-1) + \tilde{q}V(j, m-1, l-1).$$

Получаем, что

$$\begin{aligned}2V(j,m,l) &\geq S_j(N-l) - K \\ &\quad + \big(\tilde{p}V(j+1, m-1, l) + \tilde{q}V(j, m-1, l) + \tilde{p}V(j+1, m, l) + \tilde{q}V(j, m, l)\big) \\ &= V(j, m-1, l) + V(j, m+1, l).\end{aligned}$$

При $m = l$ случаи a. и c. полностью исчерпывают ситуацию, поскольку

$$V(j, m+1, l) = S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1, m, l-1) + \tilde{q}V(j, m, l-1).$$

d. Пусть $A_1 = \max\{a, b\}$, $A_2 = \max\{c, d\}$. Предположим, что выполнено $a - b \geq c - d$. Если $A_2 = c$, то $c - d > 0$ и $a > b$, а значит, $A_1 = a$. Таким образом, не может быть случая, когда $A_1 = b$, а $A_2 = c$, если выполнено $a - b \geq c - d$.

Возьмем в качестве $A_1 = V(j, m+1, l)$, $A_2 = V(j, m-1, l)$, тогда

$$\begin{aligned}a &= S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1, m, l-1) + \tilde{q}V(j, m, l-1), \\ b &= \tilde{p}V(j+1, m+1, l-1) + \tilde{q}V(j, m+1, l-1), \\ c &= S_j(N-l) - K + \tilde{p}V(j+1, m-2, l-1) + \tilde{q}V(j, m-2, l-1), \\ d &= \tilde{p}V(j+1, m-1, l-1) + \tilde{q}V(j, m-1, l-1).\end{aligned}$$

Хотим показать, что $a - b \geq c - d$.

$$\begin{aligned}a - b &= S_j(N-l) - K + \tilde{p}(V(j+1, m, l-1) - V(j+1, m+1, l-1)) \\ &\quad + \tilde{q}(V(j, m, l-1) - V(j+1, m+1, l-1)), \\ c - d &= S_j(N-l) - K + \tilde{p}(V(j+1, m-2, l-1) - V(j, m-1, l-1)) \\ &\quad + \tilde{q}(V(j, m-2, l-1) - V(j, m-1, l-1)).\end{aligned}$$

В силу индуктивного предположения для любого целого m, такого что $0 \leq m \leq l-1$, где l фиксировано, выполнено

$$V(j, m-1, l-1) \geq \frac{V(j, m-2, l-1) + V(j, m, l-1)}{2},$$

то есть

$$V(j, m-2, l-1) - V(j, m-1, l-1) \leq V(j, m-1, l-1) - V(j, m, l-1).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\begin{aligned}V(j, m-2, l-1) - V(j, m-1, l-1) &\leq V(j, m-1, l-1) - V(j, m, l-1) \\ &\leq V(j, m, l-1) - V(j, m+1, l-1).\end{aligned}$$

Отсюда легко видно, что $a - b \geq c - d$, а значит, если $A_2 = c$, то $A_1 = a$, и случая $A_2 = c$, $A_1 = b$ не существует.

Таким образом, доказана вогнутость функции $V(j, m, l)$ по $m \in \mathbb{Z}_+$ для произвольных l и j, так что выполнено условие $0 \leq m \leq l + 1$.

3. Покажем, что если при $0 \leq m \leq l$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, и вещественном $0 \leq \alpha \leq 1$ выполнено

$$V(j, m+\alpha, l) = \alpha V(j, m+1, l) + (1-\alpha) V(j, m, l),$$

то такой вид $V(j,m+\alpha,l)$ действительно дает справедливую цену свинг опциона, то есть

$$V(j,m+\alpha,l)=\sup_{\beta\in[0,1]}\big[\beta(S_j(N-l)-K)+\tilde{p}V(j+1,(m+\alpha-\beta)^+,l-1)\\ +\tilde{q}V(j,(m+\alpha-\beta)^+,l-1)\big].$$

Напомним, что интересен случай, когда $S_j(N-l)-K<0$, поскольку при

$$S_j(N-l)-K\geq 0$$

супремум достигается при $\beta=1$. Поэтому, далее будем предполагать, что

$$S_j(N-l)-K<0.$$

Будем далее предполагать, что в момент времени $N-l$ выполнено $1\leq m\leq l-1$. Случаи $m=0$ и $m=l$ аналогичны.

В силу предположения индукции для целых m цены свинг опциона имеют следующий вид:

$$V(j,m,l)=\max\Big[S_j(N-l)-K+\tilde{p}V(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m-1,l-1);\\ \tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1)\Big],$$

$$V(j,m+1,l)=\max\Big[S_j(N-l)-K+\tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1);\\ \tilde{p}V(j+1,m+1,l-1)+\tilde{q}V(j,m+1,l-1)\Big].$$

Из вогнутости функции $V(j,m,l-1)$ по m следует, что

$$V(j,m,l-1)-V(j,m+1,l-1)\geq V(j,m-1,l-1)-V(j,m,l-1),$$
$$V(j,m,l-1)-V(j,m-1,l-1)\geq V(j,m+1,l-1)-V(j,m,l-1).$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$x=S_j(N-l)-K,$$
$$V(j,m,l)=\max\{a;b\},$$
$$V(j,m+1,l)=\max\{c;d\}.$$

Если взять, $\max\{a;b\}=a$, то из утверждения выше о вогнутости следует, что и $\max\{c;d\}=c$. Это означает, что если нам выгодно делать покупку в текущий момент времени при долге в m единиц, то при большем долге в $m+1$ единицу нам тем более стоит покупать единицу базового актива. Тогда по предположению индукции

$$V(j,m+\alpha,l)=\alpha\, c+(1-\alpha)\, a=\alpha\left(x+\tilde{p}V(j+1,m,l-1)+\tilde{q}V(j,m,l-1)\right)\\ +(1-\alpha)\big(x+\tilde{p}V(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m-1,l-1)\big)\\ =x+\tilde{p}V(j+1,m+\alpha-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m+\alpha-1,l-1).$$

Введем обозначение

$$f=x+\tilde{p}V(j+1,m+\alpha-1,l-1)+\tilde{q}V(j,m+\alpha-1,l-1).$$

Пусть теперь $\max\{c;d\}=d$, тогда из вогнутости следует, что $\max\{a;b\}=b$. Это означает, что если в текущий момент времени при долге в $m+1$ единиц нам выгоднее не покупать базовый актив, то и при меньшем количестве долга по контракту в m

единиц нам выгодно не покупать базовый актив в этот момент времени. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} V(j,m+\alpha,l) &= \alpha d + (1-\alpha)\,b = \alpha\left(\tilde{p}V(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}V(j,m+1,l-1)\right) \\ &\quad + (1-\alpha)\big(\tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\big) \\ &= \tilde{p}V(j+1,m+\alpha,l-1) + \tilde{q}V(j,m+\alpha,l-1). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$g = \tilde{p}V(j+1,m+\alpha,l-1) + \tilde{q}V(j,m+\alpha,l-1).$$

Случая $a > b$, $c < d$ при условии, что всегда $c - d \geq a - b$, не может быть, как и аналогичного случая при доказательстве вогнутости. Финансовый смысл здесь таков: если долг по свинг опциону в текущий момент времени составляет m единиц, и нам следует приобрести базовый актив, то не может быть такого, что при большем долге в $m+1$ единиц в этот же момент времени нам выгоднее было бы не покупать единицу базового актива.

Остается случай, когда в момент времени $N-l$ выгодно покупать базовый актив при $m+1$ единицах долга, но не выгодно при m единицах долга, т.е. $a < b$, $c > d$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} V(j,m+\alpha,l) &= \alpha c + (1-\alpha)\,b = \alpha\left(x + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\right) \\ &\quad + (1-\alpha)\big(\tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1)\big) \\ &= \alpha\,x + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$h = \alpha\,x + \tilde{p}V(j+1,m,l-1) + \tilde{q}V(j,m,l-1).$$

Итак, мы получили, что если

$$V(j,m+\alpha,l) = \alpha\,V(j,m+1,l) + (1-\alpha)V(j,m,l),$$

то

$$V(j,m+\alpha,l) \in \big\{f,g,h\big\}.$$

Покажем, что для произвольного $\alpha \in [0,1]$, имеет место следующее:

$$\begin{aligned} V(j,m+\alpha,l) &= \max\big\{f,g,h\big\} \\ &= \sup_{\beta\in[0,1]}\big[\beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1,(m+\alpha-\beta)^+,l-1) \\ &\qquad\qquad + \tilde{q}V(j,(m+\alpha-\beta)^+,l-1)\big]. \end{aligned}$$

Для этого достаточно показать, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено:

$$V(j,m+\alpha,l) \geq \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1,m+\alpha-\beta,l-1) + \tilde{q}V(j,m+\alpha-\beta,l-1).$$

Рассматривая $\max\big\{f,g,h\big\}$, возможны всего 2 варианта: или $f \geq g$, или $g \geq f$.

I. $f - g \geq 0$, где

$$\begin{aligned} f - g &= x + \alpha\Big(\tilde{p}\big(V(j+1,m,l-1) - V(j+1,m+1,l-1)\big) \\ &\qquad + \tilde{q}\big(V(j,m,l-1) - V(j,m+1,l-1)\big)\Big) \\ &\quad + (1-\alpha)\Big(\tilde{p}\big(V(j+1,m-1,l-1) - V(j+1,m,l-1)\big) \\ &\qquad + \tilde{q}\big(V(j,m-1,l-1) - V(j,m,l-1)\big)\Big). \end{aligned}$$

Тогда в силу вогнутости имеет место следующая оценка сверху:

$$x + \tilde{p}\big(V(j+1,m,l-1) - V(j+1,m+1,l-1)\big) + \tilde{q}\big(\ldots\big) \geq f - g \geq 0.$$

Также видно, что

$$h - g = \alpha x + \alpha\big(\tilde{p}(V(j+1,m,l-1) - V(j+1,m+1,l-1)) + \tilde{q}(\ldots)\big) \geq 0.$$

В итоге мы получили, что $\max\big\{f, g, h\big\} = \max\{f, h\}$. Рассмотрим далее 2 возможных варианта:

I.1. Пусть $\max\{f, h\} = f$, тогда имеют место следующие соотношения $f \geq h \geq g$. Хотим показать, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$, выполнено следующее:

$$\begin{aligned}\max\{f,g,h\} = f &\geq s\\ &:= \beta(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &\quad + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1).\end{aligned}$$

I.1.1. Рассмотрим вначале случай, когда $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Тогда имеет место неравенство $m - 1 \leq m - (\beta - \alpha) \leq m$. По предположению индукции верно следующее преобразование:

$$\begin{aligned}s &= \beta(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &= \beta x + (\beta-\alpha)\tilde{p}V(j+1, m-1, l-1) + \big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{p}V(j+1, m, l-1)\\ &\quad + (\beta-\alpha)\tilde{q}V(j, m-1, l-1) + \big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{q}V(j, m, l-1).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}f - s = (1-\beta)x + (1-\beta)\tilde{p}\big[V(j+1, m-1, l-1) - V(j+1, m, l-1)\big]\\ + (1-\beta)\tilde{q}\big[V(j, m-1, l-1) - V(j, m, l-1)\big].\end{aligned}$$

Но поскольку

$$\begin{aligned}f - h = (1-\alpha)x + (1-\alpha)\tilde{p}\big[V(j+1, m-1, l-1) - V(j+1, m, l-1)\big]\\ + (1-\alpha)\tilde{q}\big[V(j, m-1, l-1) - V(j, m, l-1)\big] \geq 0,\end{aligned}$$

то $f - s \geq 0$.

I.1.2. Рассмотрим теперь случай, когда $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$. Тогда выполнено следующее неравенство $m \leq m + (\alpha - \beta) \leq m + 1$. Из предположения индукции имеем, что:

$$\begin{aligned}s &= \beta(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &= \beta x + (\alpha-\beta)\tilde{p}V(j+1, m+1, l-1) + (1-\alpha+\beta)\tilde{p}V(j+1, m, l-1)\\ &\quad + (\alpha-\beta)\tilde{q}V(j, m+1, l-1) + (1-\alpha+\beta)\tilde{q}V(j, m, l-1).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}h - s = (\alpha-\beta)x + (\alpha-\beta)\tilde{p}\big[V(j+1, m, l-1) - V(j+1, m+1, l-1)\big]\\ + (\alpha-\beta)\tilde{q}\big[V(j, m, l-1) - V(j, m+1, l-1)\big].\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}h - g &= \alpha x + \alpha\tilde{p}\big[V(j+1, m, l-1) - V(j+1, m+1, l-1)\big]\\ &\quad + \alpha\tilde{q}\big[V(j, m, l-1) - V(j, m+1, l-1)\big]\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

поэтому $h \geq s$, и $f \geq h \geq s$.

Таким образом, для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного, $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$\begin{aligned}\max\{f,g,h\} = f \geq s\\ &:= \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &\quad + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1).\end{aligned}$$

I.2. Пусть теперь $\max\{f,h\} = h$, тогда выполнены следующие неравенства $h \geq f \geq g$. Мы хотим убедиться, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного, $\alpha \in [0,1]$, имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\max\{f,g,h\} = h \geq s\\ &:= \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &\quad + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1).\end{aligned}$$

I.2.1. Для начала проверим, что $h \geq s$, когда $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. В этом случае

$$\begin{aligned}s = \beta x + (\beta-\alpha)\tilde{p}V(j+1, m-1, l-1) + \bigl(1-(\beta-\alpha)\bigr)\tilde{p}V(j+1, m, l-1)\\ + (\beta-\alpha)\tilde{q}V(j, m-1, l-1) + \bigl(1-(\beta-\alpha)\bigr)\tilde{q}V(j, m, l-1).\end{aligned}$$

$h \geq f$, поэтому

$$\begin{aligned}h - f &= -(1-\alpha)x + (1-\alpha)\tilde{p}\bigl[V(j+1, m, l-1) - V(j+1, m-1, l-1)\bigr]\\ &\quad + (1-\alpha)\tilde{q}[V(j, m, l-1) - V(j, m-1, l-1)]\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

но тогда и

$$\begin{aligned}h - s &= -(\beta-\alpha)x + (\beta-\alpha)\tilde{p}\bigl[V(j+1, m, l-1) - V(j+1, m-1, l-1)\bigr]\\ &\quad + (\beta-\alpha)\tilde{q}\bigl[V(j, m, l-1) - V(j, m-1, l-1)\bigr]\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

I.2.2. В пункте I.1.2 мы уже показали, что для $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, если $h \geq g$, то $h \geq s$.
Таким образом, для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$\begin{aligned}\max\{f,g,h\} = h \geq s\\ &:= \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1)\\ &\quad + \tilde{q}V(j, m+\alpha-\beta, l-1).\end{aligned}$$

II. Аналогичным образом можно показать, что, если $g \geq f$, то и $h \geq f$. Тогда $\max\{f,g,h\} = \max\{g,h\}$. Затем можно показать, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$, выполнено следующее:

$$\max\{g,h\} \geq \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \tilde{q}(\ldots),$$

рассмотрев случаи $g \geq h \geq f$ и $h \geq g \geq f$.

Итак, мы показали, что для любого $\alpha \in [0,1]$, имеет место следующее:

$$\begin{aligned}V(j, m+\alpha, l) &= \sup_{\beta\in[0,1]} \bigl[\beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}V(j+1, (m+\alpha-\beta)^+, l-1)\\ &\qquad\qquad + \tilde{q}V(j, (m+\alpha-\beta)^+, l-1)\bigr]\\ &= \max\bigl\{f,g,h\bigr\},\end{aligned}$$

и, если для $0 \leq m \leq l$, $0 \leq \alpha \leq 1$

$$V(j, m+\alpha, l) = \alpha V(j, m+1, l) + (1-\alpha)V(j, m, l),$$

то

$$V(j, m+\alpha, l) \in \{f,g,h\},$$

а значит, действительно, $\max\{f, g, h\}$ можно представить как

$$V(j, m+\alpha, l) = \max\{f, g, h\} = \alpha V(j, m+1, l) + (1-\alpha)V(j, m, l). \qquad \square$$

3. Выводы

При нахождении справедливой цены свинг опциона с помощью метода деревьев оптимальной стратегией при целом количестве долга по контракту является двухпозиционный режим — в каждый момент времени надо покупать максимально возможный объем базового актива или оставить долг неизменным, если это возможно. Для нецелых значений долга функция выплаты по опциону в зависимости от количества долга к текущему моменту времени в каждом узле дерева имеет аффинную структуру.

В дальнейшем можно попытаться обосновать “bang-bang” режим, когда вводится функция штрафа на локальную покупку в каждый момент времени, как это предложено в Fusai, Roncorini [9].

Список литературы

1. J. C. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics **7** (1979), no. 3, 229–264.
2. M. R. Seydel, *Lattice Approach and Implied Trees*, Handbook of Computational Finance, Second Edition, (J.-C. Duan et al., eds.), Springer, New York, 2012, pp. 551–577.
3. J. Breslin, L. Clewlow, C. Strickland, and D. van der Zee, *Swing contracts: take it or leave it?*, Energy Risk (2008), no. 2, 64–68.
4. C. Chiarella, L. Clewlow, and B. Kang, *The Evaluation of Gas Swing Contracts with Regime Switching*, Topics in Numerical Methods for Finance (M. Cummins et al., eds), Springer, New York, 2012, pp. 155–176.
5. M. I. M. Wahab and C.-G. Lee, *Pricing swing options with regime switching*, Annals of Operations Research **185** (2011), no. 1, 139–160.
6. M. I. M. Wahab, Z. Yin, and N. C. Edirsinghe, *Pricing swing options in the electricity markets under regime-switching uncertainty*, Quantitative Finance **10** (2010), no. 9, 975–994.
7. N. Bollen, *Valuing options in regime-switching models*, Journal of Derivatives **6** (1998), no. 1, 38–49.
8. O. Bardou, S. Bouthemy, and G. Pages, *When are swing options bang-bang?*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **13** (2010), no. 7, 867–899.
9. G. Fusai and A. Roncoroni, *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Кафедра высшей математики, факультет инноваций и высоких технологий, Москвский физико-технический институт (ГУ), Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700, Россия

Адрес электронной почты: kulikov_av@pochta.ru

Кафедра инновационной экономики, факультет инноваций и высоких технологий, Москвский физико-технический институт (ГУ), Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700, Россия

Адрес электронной почты: malykh@phystech.edu

Поступила 19/05/2013