Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 71–78

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 71–78

МУЛЬТИВАРІАНТНІ СТАТИСТИЧНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ З НАПОЛЕГЛИВОЮ ЛІНІЙНОЮ РЕГРЕСІЄЮ І ЕКВІЛІБРІУМОМ

УДК 519.21

Д. В. КОРОЛЮК

Анотація. Вивчається послідовність мультиваріантних статистичних експериментів з наполегливою нелінійною регресією, яка задається матрицею напрямної дії частот певних ознак. Вивчаються умови збіжності мультиваріантних статистичних експериментів до рівноважного стану, а також будується стохастична апроксимація процесом авторегресії з нормальними збуреннями в дискретному часі.

Abstract. The object of consideration is a sequence of multivariant statistical experiments with persistent nonlinear regression, given by a matrix of directing action of frequencies of certain attributes. Conditions for convergence of multivariant statistical experiments to the equilibrium state are investigated, and stochastic approximation is constructed as an autoregression process with normal perturbations in discrete time.

Аннотация. Изучается последовательность мультивариантных статистических экспериментов с настойчивой нелинейной регрессией, которая задается матрицей направляющего действия частот определенных признаков. Изучаются условия сходимости мультивариантных статистических экспериментов к равновесному состоянию, а также строится стохастическая аппроксимация процессом авторегрессии с нормальными возмущениями в дисретном времени.

1. Вступ

У попередніх роботах [1, 2] розглядаються *статистичні експерименти* (СЕ) з наполегливою регресією для двох альтернатив (ознак).

Основна проблема, розглянута в [1, 2], полягає в тому, щоб отримати достатньо переконливу апроксимацію (при зростанні кількості спостережень) вихідних СЕ зі стохастичною компонентою, що задається мартингал-різницями.

Основний результат в роботах [1, 2] полягає в апроксимації вихідних СЕ з лінійною (і нелінійною) регресією дискретним процесом дифузії (у термінології монографії [3]) з нормально розподіленою (гаусівською) стохастичною компонентою. Остання може бути інтерпретована як нормально розподілена адитивна помилка спостережень (див., напр., [4]). При цьому виявляється (див. [2]), що в процесі апроксимації (при зростанні обсягу спостережень) нелінійна регресія може бути замінена прийнятною лінійною регресією.

Природно виникає проблема вивчення СЕ з наполегливою регресією при наявності скінченного числа (більше 2) різних ознак. Вивчення СЕ лише з двома ознаками зводиться до аналізу одномірної динаміки. При аналізі мультиваріантних СЕ суттєво (і принципово) ускладнюється їх багатовимірна динаміка. Достатньо звернути увагу на визначення вектора еквілібріуму ρ (лема 1).

В остаточному підсумку ми використовуємо ідеї побудови моделей популяційної генетики Райта-Фішера (див., наприклад, [5]).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62F05, 60J70, 62M05.

Ключові слова і фрази. Мультиваріантні статистичні експерименти, функція регресії, еквілібріум, стохастична апроксимація.

У даній роботі пропонується завдання СЕ з наполегливою регресією приростів СЕ генеруючою матрицею (числових) параметрів впливу на результат СЕ на наступному етапі. Основна ідея побудови функції регресії приростів СЕ полягає в тому, що стимулюючий вплив генеруючих параметрів компенсується стримуванням впливу фіксованої ознаки.

Функція регресії приростів СЕ, що задається матрицею параметрів впливу у векторній формі (твердження 1), перетворюється у представлення функції регресії приростів за частотними компонентами (твердження 2). Введення флуктуацій частот СЕ відносно еквілібріуму дозволяє отримати функцію регресії приростів флуктуацій частот СЕ (твердження 3) у зручному для асимптотического аналізу вигляді (при зростанні кількості спостережень). У результаті встановлено існування рівноважного стану СЕ (теорема 1), а також отримано стохастичну апроксимацію СЕ дискретним нормальним процесом дифузії (теорема 2).

2. Постановка задачі

Мультиваріантні статистичні експерименти (МСЕ) породжуються вибірками фіксованого обсягу N випадкових величин $(\delta_r(k), 1 \le r \le N)$ незалежних у сукупності, однаково розподілених при кожному фіксованому k і приймаючих скінченне число M значень з множини $E = \{e_0, e_1, \dots, e_M\}$, $M \ge 0$.

МСЕ задаються сукупністю частот

$$S_N^{(m)}(k+1) := \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} I\{\delta_r(k) = e_m\}, 0 \le m \le M, k \ge 0. \tag{1}$$

Тут $I\{A\}$ - індикатор множини A.

Очевидна умова балансу:

$$\sum_{m=0}^{M} S_N^{(m)}(k) = 1, k \ge 0. \tag{2}$$

Для приростів частот

$$\Delta S_N^{(m)}(k+1) := S_N^{(m)}(k+1) - S_N^{(m)}(k), k \ge 0, \tag{3}$$

також має місце умова балансу

$$\sum_{m=0}^{M} \Delta S_N^{(m)}(k) = 0, k \ge 1. \tag{4}$$

МСЕ характеризується властивістю *наполегливої лінійної регресії*, яка виражає *універсальний принцип рівноваги реакцій* на наступному етапі СЕ.

Вплив напрямних параметрів, стимулюючих вибір альтернатив (ознак), *компенсується* стримуванням вибору заданої альтернативи (ознаки).

У найбільш загальній доступній формі цей принцип реалізується при побудові функції регресії приростів, яка задається умовним математичним сподіванням:

$$C_0^{(m)}(p) := E[\Delta S_N^{(m)}(k+1) \,|\, \overline{S}_N(k) = p], 0 \le m \le M, k \ge 0. \tag{5}$$

Тут $\overline{S}_N(k) := (S_N^{(m)}(k), 0 \le m \le M)$ – вектор станів СЕ на k-му кроці;
$\Delta\overline{S}_N(k+1) := \overline{S}_N(k+1) - \overline{S}_N(k)$, $k \ge 0$ – приріст стану СЕ на $(k+1)$-му кроці;
$p := (p_m, 0 \le m \le M)$ - вектор-стовпець частот (значень $S_N^m(k)$, $0 \le m \le M$).

Введемо додатно визначену матрицю напрямних дій

$$\mathbb{V} = [V_{mn}, 0 \le m, n \le M] = (\overline{V}_m, 0 \le m \le M) \tag{6}$$

де $\overline{V}_m$ - вектор-рядок матриці $\mathbb{V}$.

Твердження 1. *Функція регресії приростів частот* (5) *МСЕ у векторній формі задається співвідношенням*
$$\overline{C}_0(p) = G(p)\overline{1} - (M+1)\mathbb{V}p, G(p) := \overline{1}\mathbb{V}p, \tag{7}$$
де $\overline{1}$ *- вектор, що складається з одиниць (вектор-рядок, якщо він множиться зліва на матрицю, або вектор-стовпець в інших випадках).*

Числовий множник $G(p)$ у першому доданку (7) має наступне представлення:
$$G(p) = \overline{1}\mathbb{V}p = \sum_{m,n=0}^{M} V_{mn}p_n = \sum_{m=0}^{M} \overline{V}_m p,$$
де $\overline{V}_m p$ - скалярний добуток векторів:
$$\overline{V}_m p = \sum_{n=0}^{M} V_{mn}p_n, 0 \le m \le M.$$
Використовуючи вектори-рядки матриці (6), отримуємо частотний варіант представлення (7)
$$C_0^{(m)}(p) = \sum_{l=0}^{M} \overline{V}_l p - (M+1)\overline{V}_m p.$$

Твердження 2. *Функції регресії приростів частот* (5) *задаются співвідношенням:*
$$C_0^{(m)}(p) = -\sum_{l\neq m}[(\overline{V}_m - \overline{V}_l)p], 0 \le m \le M. \tag{8}$$
При цьому також очевидно виконується умова балансу
$$\overline{1}\,\overline{C}_0(p) = \sum_{m=0}^{M} C_0^{(m)}(p) = 0. \tag{9}$$

Співвідношення (8) виражає у явному вигляді *принцип рівноваги реакцій* (у середньому): функція регресії приростів частот стримує (зменшує) приріст m-ої частоти на величину $\overline{V}_m p$ і компенсує це зменшення доданком $\sum_{l\neq m} \overline{V}_l p$, що забезпечує стимуляцію (збільшення) інших частот згідно з умовою балансу (9).

3. Еквілібріум і перетворення функції регресії

Введемо рівноважний стан лінійної функції регресії (еквілібріум), що задається розв'язками системи лінійних рівнянь
$$\overline{C}_0(\rho) = 0.$$
Використовуючи розклад (8) лінійної функції регресії, отримуємо задання еквілібріуму $\rho = (\rho_m, 1 \le m \le M)$ співвідношеннями:
$$\overline{V}_l\rho = \overline{V}_m\rho, 0 \le l, m \le M,$$
які записуються у вигляді системи лінійних рівнянь (див. (8))
$$\mathbb{V}\rho = C\overline{1} \tag{10}$$
При цьому має місце очевидне співвідношення
$$\overline{1}\mathbb{V}\rho = \sum_{m=0}^{M} \overline{V}_m\rho = (M+1)\cdot C, C = \text{const}. \tag{11}$$
Введемо позначення
$$\mathbb{V}^{-1} := [\overline{V}_{mn}] - \text{ обернена матриця з елементами } \overline{V}_{mn}, 0 \le m, n \le M,$$
для вихідної матриці напрямних дій (6).

Лема 1. *Рівноважний стан (еквілібріум) лінійної функції регресії* (8) *задається формулами:*

$$\rho = (\rho_m = \overline{V}_m/\overline{V}, 0 \le m \le M), \tag{12}$$

де $\overline{V}_m = \sum_{l=0}^{M} \overline{V}_{ml}$ *– сума елементів рядка матриці* $\mathbb{V}^{-1} = [\overline{V}_{mn}]$, $\overline{V} =: \sum_{m=0}^{M} \overline{V}_m = \sum_{m,n=0}^{M} \overline{V}_{mn}$ *– сума всіх елементів матриці* $[\overline{V}_{mn}]$.

Доведення. З формули (10) випливає, що

$$\rho = \mathbb{V}^{-1} C \overline{1} = C \mathbb{V}^{-1} \overline{1}. \tag{13}$$

За визначенням

$$\mathbb{V}^{-1} \overline{1} = (\overline{V}_m, 0 \le m \le M), \tag{14}$$

так що формулу (13), з урахуванням (14), можна переписати як

$$\rho = (\rho_m = C\overline{V}_m, 0 \le m \le M). \tag{15}$$

Скористаємося тепер нормуванням для еквілібріуму

$$\sum_{m=1}^{M} \rho_m = 1.$$

Звідси знаходимо константу

$$C \sum_{m=1}^{M} \overline{V}_m = 1; C = 1/\overline{V}. \tag{16}$$

Твердження (11) леми 1 випливає зі співвідношень (15) і (16). □

Введемо флуктуації частот відносно еквілібріуму

$$\widehat{p} := p - \rho = (\widehat{p}_m = p_m - \rho_m, 0 \le m \le M). \tag{17}$$

Зауваження 1. Функція регресії приростів МСЕ (7) залежить тільки від флуктуацій частот (17):

$$\overline{C}_0(p) = \overline{C}_0(\widehat{p}) = (\overline{1}\mathbb{V}\widehat{p})\overline{1} - (M+1)\overline{V}_m \widehat{p}, 0 \le m \le M, \tag{18}$$

внаслідок лінійності і властивості еквілібріуму (10).

У покомпонентому вигляді, (18) має наступний вигляд:

$$\overline{C}_0(\widehat{p}) = \left(C_0^{(m)}(\widehat{p}) = \sum_{l \ne m} [(\overline{V}_l - \overline{V}_m)\widehat{p}], 0 \le m \le M \right).$$

Твердження 3. *Функції регресії приростів флуктуацій частот* (18) *задаються співвідношенням:*

$$\begin{aligned} &\overline{C}_0(\widehat{p}) = -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p}, \\ &\widehat{\mathbb{V}} := \left(\widehat{\overline{V}}_m = \sum_{l \ne m} [\overline{V}_m - \overline{V}_l], 0 \le m \le M \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Або

$$\widehat{\overline{V}}_m := \left(\widehat{V}_{mn} = \sum_{l \ne m} [V_{ln} - V_{mn}], 0 \le n \le M \right).$$

Тут

$$\overline{V}_m := (V_{mn}, 0 \le n \le M).$$

4. Приклади

Найбільш доступні для сприйняття приклади побудови матриці, яка задає функції регресії приростів (19), виникають для вихідних діагональних матриць напрямних дій (6). Нехай задана діагональна матриця напрямний дій:

$$\mathbb{V} = [V_m \delta_{mn}; 0 \leq m, n \leq M], \tag{20}$$

де δ_{mn} – символ Кронекера:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Приклад 1. (M=1). Вихідна матриця напрямних дій задається двома параметрами V_m, $m = 1, 2$. Обчислимо, згідно з формулою (19):

$$C_0^{(m)}(\widehat{p}) = -(V_m - V_l)\widehat{p}, l, m = 1, 2, l \neq m.$$

Отже

$$C_0^{(1)}(\widehat{p}) = -V_1\widehat{P}_1 + V_2\widehat{P}_2,\ C_0^{(2)}(\widehat{p}) = V_1\widehat{P}_1 - V_2\widehat{P}_2.$$

Введемо позначення для двох альтернатив: (+)-перша альтернатива; (-)-друга альтернатива. Крім того, позначимо $V_+ := V_1$; $V_- := V_2$.

Тоді функції регресії приростів бінарних альтернатив задаються матрицею

$$C_0(\widehat{p}) = -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p},\ \widehat{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} V_+ & -V_- \\ -V_+ & V_- \end{bmatrix}.$$

Так що

$$C_0^+(\widehat{p}) = V_-\widehat{P}_- - V_+\widehat{P}_+,\ C_0^-(\widehat{p}) = V_+\widehat{P}_+ - V_-\widehat{P}_.$$

Еквілібріум функції регресії приростів задається співвідношенням (12):

$$\rho_\pm = V_\pm^{-1}/\overline{V},\ \overline{V} := V_+^{-1} + V_-^{-1}.$$

Так що еквілібріум бінарних СЕ задається співвідношенням

$$\rho_\pm = V_\mp/V, V := V_+ + V_-.$$

Приклад 2 (M=2). За наявності трьох ознак у СЕ, вихідна матриця напрямних дій (6) задається трьома параметрами V_m, $m = 0, 1, 2$. Тоді матриця напрямних дій, що задає функцію регресії приростів флуктуацій частот (19), має вигляд:

$$\widehat{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} 2V_0 & -V_1 & -V_2 \\ -V_0 & 2V_1 & -V_2 \\ -V_0 & -V_1 & 2V_2 \end{bmatrix}.$$

Так що

$$\begin{aligned} C_0(\widehat{p}) &= -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p} = \left(C_0^0(\widehat{p}), C_0^1(\widehat{p}), C_0^2(\widehat{p})\right) = \\ &= (V_1\widehat{P}_1 + V_2\widehat{P}_2 - 2V_0\widehat{P}_0, V_0\widehat{P}_0 + V_2\widehat{P}_2 - 2V_1\widehat{P}_1, V_0\widehat{P}_0 + V_1\widehat{P}_1 - 2V_2\widehat{P}_2), \\ &\quad \widehat{P}_0 + \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = 0. \end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає матричне представлення функції регресії приростів (19) у прикладі 2:

$$\begin{aligned} &C_0(\widehat{p}) = -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p}, \widehat{\mathbb{V}} := [\widehat{V}_{mn};\ 0 \leq m, n \leq 2], \\ &\widehat{V}_{mn} = -V_n, n \neq m, \widehat{V}_{mm} = 2V_m. \end{aligned}$$

Еквілібріум СЕ у прикладі 2 обчислюється за формулами (12) - (13) леми 1:

$$\overline{\rho} = \Big(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}\Big);$$
$$\rho^{(0)} = V_1V_2/(V_0V_1 + V_0V_2 + V_1V_2),\ \rho^{(1)} = V_0V_2/(V_0V_1 + V_0V_2 + V_1V_2),$$
$$\rho^{(2)} = V_0V_1/(V_0V_1 + V_0V_2 + V_1V_2);\ \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} = 1.$$

Приклад 3 (M>2). Матриця напрямних дій (20) діагональна і задається параметрами V_m, $0 \le m \le M$.

Матриця напрямних дій для флуктуацій (19) має наступний вигляд:

$$\widehat{V}_{mn} = \begin{cases} MV_m & \text{при } m = n, \\ -V_n & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Розклад функції регресії приростів (19) перетворюється наступним чином:

$$C_0^{(m)}(\widehat{p}) = -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p} = -\sum_{l\neq m}[(V_m - V_l)]\widehat{p}$$
$$= \sum_{l\neq m} V_l\widehat{P}_l - MV_m\widehat{P}_m, 0 \le m \le M.$$

Звідси безпосередньо випливає матричне подання функції регресії приростів (19) у прикладі 3:

$$C_0(\widehat{p}) = -\widehat{\mathbb{V}}\widehat{p}, \widehat{\mathbb{V}} := [\widehat{V}_{mn};\ 0 \le m, n \le M],$$
$$\widehat{V}_{mn} = \begin{cases} MV_m & \text{при } m = n, \\ -V_n & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Еквілібріум CE у прикладі 3 обчислюється за формулою (12) леми 1:

$$\overline{\rho} = \Big(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(M)}\Big) : \rho^{(m)} = \prod_{l\neq m} V_l \Big/ \sum_{l=0}^{M}\prod_{l\neq m} V_l, 0 \le m \le M.$$

5. Рівноважний стан МСЕ

Важливою властивістю МСЕ з наполегливим регресією служить наявність рівноважного стану (еквілібріуму) для функції регресії приростів $\rho = (\rho_m, 1 \le m \le M)$, який задається співвідношеннями (12) (див. лему 1).

Наявність еквілібріуму ρ забезпечує сталий режим МСЕ.

Теорема 1. *При умові збіжності (з імовірністю 1) початкових значень частот*

$$S_N^{(m)}(0) \xrightarrow{P1} \rho_m, N \to \infty, 1 \le m \le M,$$

має місце збіжність статистичних експериментів:

$$S_N^{(m)}(k) \xrightarrow{P1} \rho_m, N \to \infty, 1 \le m \le M, \tag{21}$$

при кожному скінченному $k > 0$.

Доведення . Введемо мартингал-різниці:

$$\begin{aligned} \Delta\mu_N^{(m)}(k+1) :&= \Delta S_N^{(m)}(k+1) - E[\Delta S_N^{(m)}(k+1) \,|\, \overline{S}_N(k)] \\ &= S_N^{(m)}(k+1) - E[S_N^{(m)}(k+1) \,|\, \overline{S}_N(k)] \\ &= S_N^{(m)}(k+1) - C^{(m)}(\overline{S}_N(k)), k \ge 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Тут за визначенням

$$C^{(m)}(\overline{p}) := p + C_0^{(m)}(\overline{p}).$$

Квадратична характеристика мартингал-різниці (22) легко обчислюється:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\mu_N^{(m)}\rangle(k+1) :&= \mathsf{E}\left[[S_N^{(m)}(k+1) - E[S_N^{(m)}(k+1) \mid \overline{S}_N(k)]]^2 \mid \overline{S}_N(k)\right] \\ &= C^{(m)}(\overline{S}_N(k))[1 - C^{(m)}(\overline{S}_N(k))]/N =: \sigma_m^2(\overline{S}_N(k)).\end{aligned} \tag{23}$$

Розглянемо суму мартингал-різниць (22)

$$\Delta M_N^{(m)}(n) := \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_N^{(m)}(k+1), n \ge 0. \tag{24}$$

Квадратична характеристика мартингала (24) з урахуванням (22) задається виразом:

$$\begin{gathered}\langle M_N^{(m)}\rangle(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} \sigma_m^2(\overline{S}_N(k)), n \ge 0, \\ \sigma_m^2(\overline{p}) := C^{(m)}(\overline{p})[1 - C^{(m)}(\overline{p})].\end{gathered} \tag{25}$$

Отже, при кожному фіксованому $n \ge 0$ має місце збіжність

$$\langle M_N\rangle_n^{(m)} \xrightarrow{P1} 0, , N \to \infty, 0 \le m \le M.$$

Звідси випливає збіжність мартингалів (23) при кожному скінченному $n \ge 0$:

$$\Delta\mu_N^{(m)}(n) \xrightarrow{P1} 0, , N \to \infty, 0 \le m \le M.$$

Зокрема при $n = 0$ маємо

$$\Delta\mu_N^{(m)}(0) = S_N^{(m)}(1) - C(S_N^{(m)}(0)) = S_N^{(m)}(1) - S_N^{(m)}(0) - C_0^{(m)}(S_N^{(m)}(0)).$$

При цьому за умовою теореми 1

$$C_0^{(m)}(S_N^{(m)}(0)) \xrightarrow{P1} C_0^{(m)}(\rho_m) = 0, N \to \infty, 0 \le m \le M.$$

Отже має місце збіжність

$$S_N^{(m)}(1) - \rho_m \xrightarrow{P1} 0, N \to \infty, 0 \le m \le M.$$

За індукцією виводимо, що при кожному $k \ge 1$ має місце збіжність (21). □

6. Стохастична апроксимація МСЕ

Сталий режим, сформульований у теоремі 1, не містить характеризації, яка може бути використана у реальному аналізі МСЕ. Істотним результатом асимптотичного аналізу (при $N \to \infty$) служить апроксимація МСЕ процесом нормальної авторегресії (в дискретному часі), обгрунтуванням якої служить наступне твердження.

Теорема 2. *При виконанні умов теореми 1 має місце збіжність за розподілом нормованих флуктуацій:*

$$\sqrt{N}[\Delta\widehat{S}_N^{(m)}(k+1) + \mathbb{V}\widehat{S}_N^{(m)}(k)] \xrightarrow{D} \sigma_m W(k+1), N \to \infty, k \ge 0 \tag{26}$$

при кожному скінченному $k \ge 0$. *Тут* $\{W(k), k \ge 1\}$ *– послідовність незалежних по* k*, нормально розподілених стандартних випадкових величин.*

При цьому

$$\sigma_m^2 := \rho_m(1 - \rho_m), 0 \le m \le M.$$

Твердження 4. *Нормальний процес авторегресії, аппроксимуючий МСЕ* (1) – (7)*, задається співвідношенням:*

$$\Delta\widetilde{S}_N^{(m)}(k+1) + \mathbb{V}\widetilde{S}_N^{(m)}(k) = \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} W(k+1), k \ge 0. \tag{27}$$

Зауваження 2. Стохастична апроксимація (27) вихідної моделі МСЕ (2) - (5) *зберігає умову наполегливої лінійної регресії*:

$$E[\Delta\widetilde{S}_N^{(m)}(k+1) \,|\, \widetilde{\widetilde{S}}_N(k)] = -\mathbb{V}\, \widetilde{S}_N^{(m)}(k), k \geq 0.$$

Доведення теореми 2. Введемо нормований мартингал (24) :

$$\Delta\overline{M}_N^{(m)}(n) := \sqrt{N}\Delta M_N^{(m)}(n) = \sqrt{N}\sum_{k=0}^{n}\Delta\mu_N^{(m)}(k+1), n \geq 0. \tag{28}$$

З урахуванням співвідношення (25), квадратична характеристика нормованого мартингала (28) має вигляд:

$$\langle\Delta\overline{M}_N^{(m)}\rangle(n) = \sum_{k=0}^{n}\sigma_m^2(S_N^{(m)}(k)), n \geq 0. \tag{29}$$

Згідно з теоремою 1, має місце збіжність :

$$\sigma_m^2(S_N^{(m)}(k)) \xrightarrow{P1} \sigma_m^2 := \rho_m(1-\rho_m), N \to \infty, k \geq 0.$$

Так що квадратична характеристика нормованого мартингала (29) збігається :

$$\langle\Delta\overline{M}_N^{(m)}\rangle(n) \xrightarrow{P1} (n+1)\sigma_m^2, N \to \infty, n \geq 0. \tag{30}$$

Разом з тим, згідно Ц.Г.Т. (напр. [6, теорема 5.3]), передбачувана частина нормованого мартингала (29) збігається за розподілом до суми нормально розподілених випадкових величин:

$$\sqrt{N}[\Delta S_N^{(m)}(k+1) + \mathbb{V}S_N^{(m)}(k)] \xrightarrow{D} W_{\sigma_m}(k+1), N \to \infty, k \geq 0. \tag{31}$$

Крім того, збіжність квадратичних характеристик нормованих мартингалів (30) означає, що

$$W_{\sigma_m}(k) = \sigma_m W(k), k \geq 0, \tag{32}$$

а послідовність $W(k)$, $k \geq 0$, задається незалежними, стандартними нормально розподіленими випадковими величинами. При цьому враховано, що гранична дисперсія нормованого мартингала дорівнює сумі дисперсій мартингал-різниць.

Збіжність (31)–(32) означає, що має місце збіжність (26) при кожному скінченному $k \geq 0$. Теорему 2 доведено. □

Література

1. Д. В. Королюк, *Бинарные повторяющиеся статистические эксперименты с настойчивой линейной регрессией*, Укр. мат. вестник **10** (2013), no. 4, 497–506.
2. Д. В. Королюк, *Двокомпонентні бінарні статистичні експерименти з наполегливою лінійною регресією* Теорія ймовір. та матем. статист. **90** (2014), 91–101.
3. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский *Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание*, "Наука", Москва, 1972.
4. D. S. Pupashenko, S. V. Shklyar, and A. G. Kukush, *Asymptotic properties of corrected score estimator in autoregressive model with measurement errors*, Theory Probab. Math. Statist. (2013) **89**, 156–166.
5. S. N. Ethier and T. G. Kurtz *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley, New York, 1986.
6. Yu. V. Borovskikh and V. S. Koroliyuk, *Martingale Approximation*, VSP, Utrecht, 1997.

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, Чоколовский бульвар, 13, Київ 03110, Україна
Адреса електронної пошти: dimitri.koroliouk@ukr.net

Надійшла 22/09/2014