Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 89–102

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 89–102

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЙНОГО ТИПУ

УДК 519.21

Г. Л. КУЛІНІЧ, С. В. КУШНІРЕНКО І Ю. С. МІШУРА

Анотація. Досліджується асимптотична поведінка при $T \to \infty$ нормованих відповідним чином функціоналів $I(tT)$, де $I(t) = F(\xi(t)) + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \ge 0$, функція F неперервна, g локально інтегровна з квадратом, ξ — нестійкий розв'язок стохастичного диференціального рівняння Іто $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, функція a вимірна та обмежена. Для певних класів вказаних рівнянь знайдено нормуючий множник, що забезпечує слабку збіжність нормованих випадкових процесів $I(tT)$, $t \ge 0$, та явний вигляд граничних процесів.

Abstract. We study the asymptotic behavior as $T \to \infty$ of the functionals $I(tT)$ with an appropriate normalizing factor, where $I(t) = F(\xi(t)) + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \ge 0$, the function F is continuous, g is locally square integrable, ξ is an unstable solution of Itô stochastic differential equation $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, the function a is measurable and bounded. The normalizing factor for certain classes of these equations is established, which provides the weak convergence of the normalized random processes $I(tT)$, $t \ge 0$, and the explicit form of the limit processes.

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение при $T \to \infty$ нормированных соответствующим образом функционалов $I(tT)$, где $I(t) = F(\xi(t)) + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \ge 0$, функция F непрерывная, g локально интегрируемая с квадратом, ξ - неустойчивое решение стохастического дифференциального уравнения Ито $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, функция a измеримая и ограниченная. Для определенных классов указанных уравнений найдено нормирующий множитель, обеспечивающий слабую сходимость нормированных случайных процессов $I(tT)$, $t \ge 0$, и явный вид предельных процессов.

1. Вступ

Розглянемо одновимірне стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t), \qquad t \ge 0,\ \xi(0) = x_0, \tag{1}$$

де $a = a(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — вимірна, обмежена функція, $W = \{W(t), t \ge 0\}$ — стандартний вінерівський процес, заданий на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathsf{P})$.

У роботі [1] доведено, що рівняння (1) має сильний єдиний по траєкторіях розв'язок $\xi = \{X\xi(t), t \ge 0\}$, і цей розв'язок є однорідним строго марківським процесом (див. [2], §15).

Означення 1.1. Розв'язок ξ рівняння (1) називається нестійким, якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathsf{P}\{|\xi(s)| < N\}\,ds = 0$$

для довільної сталої $N > 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10; Secondary 60J60.
Ключові слова і фрази. Процеси дифузійного типу, гранична поведінка функціоналів, нестійкі розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь.

Відомо [2], що асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь тісно пов'язана з граничною при $|x| \to \infty$ поведінкою функції

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a(v)\,dv\right\} du. \tag{2}$$

У лемі 4.2 наведено достатню умову нестійкості розв'язку ξ рівняння (1), що пов'язана з поведінкою на нескінченності функції (2).

За характером поведінки розподілів при $t \to \infty$ нестійких розв'язків виділимо серед рівнянь вигляду (1) два класи K_1 і K_2 за умовами на коефіцієнт a:

$$K_1: \quad \left|\int_0^x a(u)\,du\right| \le C \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\int_0^x \frac{du}{f'(u)} - \frac{1}{\bar\sigma^2(x)}\right] = 0,$$

$$\text{де } \bar\sigma(x) = \begin{cases}\sigma_1, & x > 0,\\ \sigma_2, & x < 0,\end{cases} \qquad 0 < \sigma_i < \infty,$$

$$K_2: \quad |xa(x)| \le C \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x va(v)\,dv = c_0 > -\frac{1}{2}.$$

Якщо розв'язок ξ рівняння (1) знаходиться у класі K_1, то існують сталі δ, C такі, що для всіх x: $0 < \delta < f'(x) < C$. Отже, за лемою 4.2 розв'язок ξ рівняння (1) із класу K_1 нестійкий. Нестійкість розв'язків рівняння (1) із класу K_2 доведено у роботі [3].

Також відомо (див. [3]), що для розв'язку ξ рівняння з класу K_1 процес $\zeta_T(t) = \frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}$ (параметр $T > 0$) при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу $\zeta = \{\zeta(t), t \ge 0\}$, який є єдиним сильним розв'язком рівняння

$$\zeta(t) = \int_0^t \bar\sigma(\zeta(s))\,dW(s), \tag{3}$$

при цьому $\int_0^t P\{|\zeta(s)| = 0\}\,ds = 0$, а для розв'язку рівняння з класу K_2 процес $r_T(t) = \frac{|\xi(tT)|}{\sqrt{T}}$ при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу $r = \{r(t) \ge 0, t \ge 0\}$, який є єдиним сильним розв'язком рівняння Іто

$$r^2(t) = (2c_0 + 1)\,t + 2\int_0^t r(s)\,d\widehat{W}(s). \tag{4}$$

Більше того, перехідні щільності марківських процесів ζ та r відомі, і їх виписано у явному вигляді (див., наприклад, [9]).

Зауваження 1.1. Тут і надалі у статті слабка збіжність процесів означає слабку збіжність у рівномірній топології простору неперервних функцій.

У даній роботі розглядається асимптотична при $t \to \infty$ поведінка розподілів функціоналів вигляду

$$I(t) = F(\xi(t)) + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s), \tag{5}$$

де функція $F = F(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дійсна і неперервна, $g = g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально інтегровна з квадратом, процеси ξ і W пов'язані між собою через рівняння (1), і це рівняння належить до одного із класів K_1 або K_2.

Дана стаття є продовженням досліджень робіт [4]–[9]. У роботах [4]–[7] досліджено поведінку розподілів функціоналів

$$\beta^{(1)}(t) = \int_0^t g(\xi(s))\,ds, \qquad \beta^{(2)}(t) = \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$$

для рівнянь (1) із класу K_1, а в роботах [8], [9] досліджено поведінку розподілів функціоналів $\beta^{(1)}(t)$ і $\beta^{(2)}(t)$ для рівнянь (1) із класу K_2. Поведінка розподілів функціоналів $I(t)$ для вінерівського процесу $(\xi = W)$ вперше досліджувалась у роботі [10]. Більш детальний огляд робіт у цьому напрямку наведено в статтях [8], [9]. У лемі 4.1 доведено, що функціонали $I(t)$ включають, зокрема, функціонали $\beta^{(1)}(t)$ і $\beta^{(2)}(t)$, а також функціонал вигляду

$$\beta(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, d\xi(s).$$

Статтю побудовано таким чином. Наступний розділ містить формулювання основних результатів. У розділі 3 наводиться доведення результатів розділу 2 та приклади. У останньому розділі зібрано допоміжні результати.

У статті через Ψ позначається клас функцій $\psi = \psi(x) > 0$, $x \geq 0$ — неспадних, регулярно змінних на нескінченності порядку $\alpha \geq 0$, тобто $\lim_{T\to\infty} \frac{\psi(|x|T)}{\psi(T)} = |x|^\alpha$ для всіх $x \not\equiv 0$.

2. Формулювання основних результатів

Теорема 2.1. *Нехай ξ — розв'язок рівняння* (1) *із класу K_1. Нехай функції F і g у функціоналі $I(t)$ і функція $\psi \in \Psi$ порядку $\alpha \geq 0$ такі, що при певних сталих a_i, b_i, $i = 1, 2$ виконуються наступні умови:*

$$(A_1) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{F(x)}{f(x)\psi(|f(x)|)} - \bar{a}(x) \right] = 0, \qquad \bar{a}(x) = \begin{cases} a_1, & x > 0, \\ a_2, & x < 0; \end{cases}$$

$$(A_2) \qquad \left| \frac{g(x)}{f'(x)\psi(|f(x)|)} \right| \chi_{\{|x|\leq N\}} \leq K_N$$

для довільного $N > 0$ і

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{g(x)}{f'(x)\psi(|f(x)|)} - \bar{b}(x) \right] = 0, \quad \bar{b}(x) = \begin{cases} b_1, & x > 0, \\ b_2, & x < 0. \end{cases}$$

Тоді випадковий процес

$$I_T(t) = \frac{I(tT)}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}$$

при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу

$$I_0(t) = \bar{a}(\zeta(t))\zeta(t)|\zeta(t)|^\alpha + \int_0^t \bar{b}(\zeta(s))|\zeta(s)|^\alpha\, d\zeta(s),$$

де $\zeta = \zeta(t)$ — розв'язок рівняння (3).

Зауваження 2.1. 1) Якщо $\alpha = 0$, $\bar{a}(x) = a_0 \operatorname{sign} x$, $\bar{b}(x) = -a_0 \operatorname{sign} x$, то

$$I_0(t) = a_0 \left[|\zeta(t)| - \int_0^t \operatorname{sign} \zeta(s)\, d\zeta(s) \right] = a_0 L_\zeta(0, t),$$

де $L_\zeta(0,t)$ — локальний час процесу ζ у точці 0 на відрізку $[0, t]$ (див. [11]).

2) Якщо $\alpha = 1$, $\bar{a}(x) = a_0 \operatorname{sign} x$, $\bar{b}(x) = -2a_0 \operatorname{sign} x$, то використовуючи формулу Іто для процесу $\zeta^2(t)$, отримаємо

$$I_0(t) = a_0 \int_0^t \bar{\sigma}^2\left(\zeta(s)\right)\, ds,$$

і при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ маємо $I_0(t) = a_0\sigma_0^2 t$.

Теорема 2.2. *Нехай ξ — розв'язок рівняння* (1) *із класу K_1. Нехай функції F і g у функціоналі $I(t)$ і функції $\psi_i \in \Psi$ порядку $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2$ такі, що при певних сталих a_i, b_i, $i = 1,2$ виконуються наступні умови:*

$$(A_3) \quad \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{F(x)}{\sqrt{|f(x)|\,\psi_1(|f(x)|)}} - \bar{a}(x)\right] = 0, \qquad \bar{a}(x) = \begin{cases} a_1, & x > 0, \\ a_2, & x < 0; \end{cases}$$

$$(A_4) \quad \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{1}{\psi_1(|f(x)|)}\int_0^x \frac{g^2(|v|)}{f'(v)}\,dv - \bar{b}(x)\right] = 0,$$

$$\bar{b}(x) = \begin{cases} b_1, & x > 0, \\ b_2, & x < 0, \end{cases} \qquad b_1 \geq 0,\ b_2 \leq 0;$$

$$(A_5) \quad \left|\frac{1}{\psi_2(|f(x)|)}\int_0^x \frac{|g(v)|}{f'(v)}\,dv\right| \leq C, \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{\psi_2(\sqrt{T})}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = 0.$$

Тоді випадковий процес

$$I_T(t) = \frac{I(tT)}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}}$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу

$$I_0^*(t) = \bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)|^{\frac{1+\alpha_1}{2}} + W^*\left(\bar{\beta}^{(1)}(t)\right),$$

$$\bar{\beta}^{(1)}(t) = 2\left[\int_0^{\zeta(t)} \bar{b}(x)|x|^{\alpha_1}\,dx - \int_0^t \bar{b}(\zeta(s))|\zeta(s)|^{\alpha_1}\,d\zeta(s)\right],$$

де ζ — розв'язок рівняння (3), *$W^* = \{W^*(t), t \geq 0\}$ — вінерівський процес, процеси W^* і ζ — незалежні.*

Зауважимо, що з доведення теореми 2.2 (див. формулу (16)) випливає, що процес $\bar{\beta}^{(1)}(t)$ — невід'ємний.

Зауваження 2.2. 1) Якщо $\alpha_1 = 0$, $\bar{b}(x) = b_0 \operatorname{sign} x$, $b_0 \geq 0$, то

$$I_0^*(t) = \bar{a}(\zeta(t))\sqrt{|\zeta(t)|} + W^*\left(2b_0 L_\zeta(0,t)\right),$$

де $L_\zeta(0,t)$ — локальний час процесу ζ в точці 0 на відрізку $[0, t]$, W^* — вінерівський процес, процеси W^* і ζ — незалежні.

2) Якщо $\alpha_1 = 1$, $\bar{b}(x) = b_0 \operatorname{sign} x$, $b_0 \geq 0$, то використовуючи формулу Іто, отримаємо

$$I_0^*(t) = \bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)| + W^*\left(b_0\int_0^t \bar{\sigma}^2\left(\zeta(s)\right)\,ds\right),$$

процеси W^* і ζ — незалежні, зокрема, якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$, то

$$I_0^*(t) = \bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)| + W^*\left(b_0\sigma_0^2 t\right).$$

3) Якщо $\bar{b}(x) \equiv 0$, то $I_0^*(t) = \bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)|^{\frac{1+\alpha_1}{2}}$, $\alpha_1 \geq 0$.

Теорема 2.3. *Нехай ξ — розв'язок рівняння* (1) *із класу K_2. Нехай функції F і g у функціоналі $I(t)$ і функція $\psi \in \Psi$ порядку $\alpha > 0$ такі, що виконуються наступні умови:*

$$(B_1) \quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{F(x)}{|x|\psi(|x|)} = a_0;$$

$$(B_2) \quad \text{функція } \frac{g(x)}{\psi(|x|)} \text{ обмежена і } \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{g(x)}{\psi(|x|)} - b_0 \operatorname{sign} x\right] = 0,$$

де a_0, b_0 — певні сталі.

Тоді випадковий процес

$$I_T(t) = \frac{I(tT)}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}$$

при $T \to \infty$ *слабко збігається до процесу*

$$I_0(t) = a_0 r^{\alpha+1}(t) + b_0 \int_0^t r^\alpha(s)\, d\widehat{W}(s),$$

де r *і вінерівський процес* $\widehat{W} = \{\widehat{W}(t), t \geq 0\}$ *пов'язані через рівняння* (4).

Зауваження 2.3. Якщо $\alpha = 1$, то $I_0(t) = \left(a_0 + \frac{b_0}{2}\right) r^2(t) - \frac{b_0}{2}\,(2c_0 + 1)\, t$, зокрема, при $a_0 = -\frac{b_0}{2}$ маємо $I_0(t) = a_0(2c_0 + 1)t$.

Теорема 2.4. *Нехай* ξ *— розв'язок рівняння* (1) *із класу* K_2. *Нехай функції* F *і* g *у функціоналі* $I(t)$ *такі, що існують функції* $\psi_i \in \Psi$ *порядку* $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$ *і непарна функція* $\hat{g} = \hat{g}(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *локально інтегровна з квадратом, такі, що при певних сталих* a_0, b_0 *виконуються наступні умови:*

$$(B_3) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{|x|\psi_1(|x|)}} = a_0,$$

$$(B_4) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{f'(x)}{\psi_1(|x|)} \int_0^x \frac{\hat{g}^2(u)}{f'(u)}\, du - b_0 \operatorname{sign} x\right] = 0,$$

$$(B_5) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{f'(x)}{\psi_1(|x|)} \int_0^x \frac{[g(u) - \hat{g}(u)]^2}{f'(u)}\, du\right] = 0,$$

$$(B_6) \qquad \left|\frac{f'(x)}{\psi_2(|x|)} \int_0^x \frac{|g(u)|}{f'(u)}\, du\right| \leq C, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\psi_2(\sqrt{T})}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = 0.$$

Тоді випадковий процес

$$I_T(t) = \frac{I(tT)}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}}$$

при $T \to \infty$ *слабко збігається до процесу*

$$I_0^*(t) = a_0\, [r(t)]^{\frac{1+\alpha_1}{2}} + W^*\left(\hat{\beta}^{(1)}(t)\right),$$

де

$$\hat{\beta}^{(1)}(t) = 2b_0 \left[\frac{r^{\alpha_1+1}(t)}{\alpha_1 + 1} - \int_0^t r^{\alpha_1}(s)\, d\widehat{W}(s)\right],$$

r *— розв'язок рівняння* (4), W^* *— вінерівський процес, процеси* W^* *і* $\widehat{W}$ *— незалежні.*

Зауваження 2.4. Умова (B_6) теореми 2.4 використовується тільки при доведенні незалежності W^* і $\widehat{W}$. Якщо $\alpha_1 = 1$, $a_0 = 0$, то умова (B_6) зайва і $I_0^*(t) = \sqrt{b_0\,(2c_0 + 1)}W^*(t)$.

3. Доведення основних результатів

Введемо параметр $T > 0$ і в подальшому будемо дотримуватись таких позначень:

$$\zeta_T(t) = \frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}, \qquad W_T(t) = \frac{W(tT)}{\sqrt{T}}, \qquad \widehat{W}_T(t) = \int_0^t \operatorname{sign}\xi(sT)\, dW_T(s),$$

$$r_T(t) = \frac{|\xi(tT)|}{\sqrt{T}}, \qquad t \geq 0,$$

де функція $f(x)$ визначена в (2), $\varphi(x)$ — функція, обернена до функції $f(x)$.

Зауважимо, що при кожному T процеси $W_T(t)$ і $\widehat{W}_T(t)$ також є вінерівськими (див. [8]).

Доведення Теореми 2.1. Очевидно, що функція $f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$ і має майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровну другу похідну $f''(x)$. Тому для процесу $f(\xi(t))$, де ξ — розв'язок рівняння (1), можна застосувати формулу Іто ([13], §10, гл. II) і, враховуючи рівність $f'(x)a(x)+\frac{1}{2}f''(x)=0$, яка має місце майже скрізь (за мірою Лебега), отримати рівняння

$$d\zeta_T(t)=f'(\xi(tT))\,dW_T(t).$$

Використовуючи рівність $\xi(tT)=\varphi(\zeta_T(t)\sqrt{T})$, легко встановити, що має місце представлення

$$I_T(t)=F_T(\zeta_T(t))+\int_0^t g_T(\zeta_T(s))\,d\zeta_T(s),$$

де

$$F_T(x)=\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})},\qquad g_T(x)=\frac{g(\varphi(x\sqrt{T}))}{\psi(\sqrt{T})f'(\varphi(x\sqrt{T}))}.$$

Покажемо, що за умов (A_1)–(A_2) у класі K_1 для довільного $N>0$ мають місце збіжності

$$\begin{gathered}\lim_{T\to\infty}\sup_{|x|\le N}|F_T(x)-F_0(x)|=0,\\ \lim_{T\to\infty}\int_{-N}^{N}|g_T(x)-g_0(x)|^2\,dx=0,\end{gathered}\tag{6}$$

де $F_0(x)=\bar{a}(x)x|x|^{\alpha}$, $g_0(x)=\bar{b}(x)|x|^{\alpha}$.

Зрозуміло, що $F_T(x)-\alpha_T^{(1)}(x)=\alpha_T^{(2)}(x)$, де

$$\alpha_T^{(1)}(x)=\bar{a}(x\sqrt{T})\,x\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})},$$

$$\alpha_T^{(2)}(x)=\left[\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}-\bar{a}(x\sqrt{T})\,x\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})}\right].$$

За умовою (A_1) для довільного $\varepsilon>0$ існує таке C_ε, що при $|x\sqrt{T}|>C_\varepsilon$ виконується нерівність

$$\left|\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{x\sqrt{T}\psi(|x|\sqrt{T})}-\bar{a}(x\sqrt{T})\right|<\varepsilon,$$

тому

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\le N}\left|\alpha_T^{(2)}(x)\right|&\le\sup_{|x|\le N}\left|\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}-\bar{a}(x\sqrt{T})x\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})}\right|\chi_{\{|x\sqrt{T}|\le C_\varepsilon\}}\\&\quad+\sup_{|x|\le N}\left|\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{x\sqrt{T}\psi(|x|\sqrt{T})}-\bar{a}(x\sqrt{T})\right||x|\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})}\chi_{\{|x\sqrt{T}|>C_\varepsilon\}}\\&\le\frac{K_\varepsilon}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}+\frac{CNC_N}{\sqrt{T}}+\varepsilon NC_N,\end{aligned}\tag{7}$$

(тут у другому доданку $\frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}$ домножили і поділили на $x\psi(|x|\sqrt{T})$, а потім винесли спільний множник), де сталі K_ε і C обмежують відповідно функції

$$\left|F(\varphi(x\sqrt{T}))\right|\chi_{\{|x\sqrt{T}|\le C_\varepsilon\}}\le K_\varepsilon,\qquad|\bar{a}(x\sqrt{T})|\le C,$$

а стала C_N пов'язана з властивістю функцій із класу Ψ: $\sup_{|x|\le N} \frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} \le C_N$ (див. [8], лема 3.1).

З оцінки (7) одержимо:

$$\varlimsup_{T\to\infty} \sup_{|x|\le N} \left|\alpha_T^{(2)}(x)\right| \le \varepsilon N C_N.$$

Із довільності $\varepsilon > 0$ маємо, що

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|x|\le N} \left|\alpha_T^{(2)}(x)\right| = 0.$$

Крім того, із оцінки

$$\begin{aligned}
&\sup_{|x|\le N} \left|\alpha_T^{(1)}(x) - \bar{a}(x)x|x|^\alpha\right| \\
&\quad\le \max\left(|a_1|, |a_2|\right) \sup_{|x|\le N} |x| \left|\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} - |x|^\alpha\right| \\
&\quad\le \max\left(|a_1|, |a_2|\right) \left\{\delta \sup_{|x|\le\delta} \left|\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} - |x|^\alpha\right| + N \sup_{0<\delta\le|x|\le N} \left|\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} - |x|^\alpha\right|\right\}
\end{aligned}$$

маємо, що і $\sup_{|x|\le N}\left|\alpha_T^{(1)}(x) - \bar{a}(x)x|x|^\alpha\right| \to 0$ при $T \to \infty$.

Отже, із нерівності

$$\sup_{|x|\le N} |F_T(x) - \bar{a}(x)x|x|^\alpha| \le \left|\alpha_T^{(2)}(x)\right| + \left|\alpha_T^{(1)}(x) - \bar{a}(x)x|x|^\alpha\right|$$

маємо

$$\sup_{|x|\le N} |F_T(x) - \bar{a}(x)x|x|^\alpha| \to 0 \tag{8}$$

при $T \to \infty$.

Крім того, із нерівності

$$\begin{aligned}
\int_{-N}^{N} |g_T(x) - g_0(x)|^2\, dx &\le 2\int_{-N}^{N} \left|\frac{g(\varphi(x\sqrt{T}))}{\psi(|x|\sqrt{T})f'(\varphi(x\sqrt{T}))} - \bar{b}(x)\right|^2 \left(\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})}\right)^2 dx \\
&\quad + 2C^2 \int_{-N}^{N} \left[\frac{\psi(|x|\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} - |x|^\alpha\right]^2 dx,
\end{aligned}$$

де $C = \max|\bar{b}(x)|$, і умови (A_2) маємо і другу збіжність в (6).

Із збіжностей (6) випливає (див. [7]), що процес $I_T(t)$ при $T \to \infty$ слабко збігається у рівномірній топології простору неперервних функцій до процесу $I_0(t)$, де

$$I_0(t) = F_0(\zeta(t)) + \int_0^t g_0(\zeta(s))\, d\zeta(s).$$

Зауважимо, що в роботі [7] показано, що умови (6) є і необхідними умовами слабкої збіжності $I_T(t)$ до $I_0(t)$. □

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння (1) з $a(x) = \frac{x}{1+x^4}$. У цьому випадку розв'язок рівняння (3) $\zeta(t) = \sigma_0 W(t)$, де $\sigma_0 = \exp\left\{-2\int_0^\infty a(v)\, dv\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

I) Нехай $g(x) \to g_0$ при $|x| \to \infty$, тоді використовуючи зв'язок функціонала $\beta(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, d\xi(s)$ із функціоналом $I(t)$ (див. лему 4.1), легко показати, що для цього функціонала виконуються умови теореми 2.1 при $\psi(|x|) = 1$, $\bar{a}(x) = 2\bar{\alpha}(x)$, $\bar{b}(x) = \frac{g_0}{\sigma_0} - 2\bar{\alpha}(x)$, де

$$\bar{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha_1, & x > 0, \\ \alpha_2, & x < 0, \end{cases} \qquad \alpha_1 = \int_0^{\infty} \frac{g(v)a(v)}{f'(v)}\,dv, \qquad \alpha_2 = \int_0^{-\infty} \frac{g(v)a(v)}{f'(v)}\,dv.$$

Отже, $\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{tT} g(\xi(s))\,d\xi(s)$ при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу

$$\begin{aligned} I_0(t) &= 2\left[\bar{\alpha}(\zeta(t))\zeta(t) - \int_0^t \bar{\alpha}(\zeta(s))\,d\zeta(s)\right] + \frac{g_0}{\sigma_0}\zeta(t) \\ &= 2\sigma_0\left[\bar{\alpha}(W(t))W(t) - \int_0^t \bar{\alpha}(W(s))\,dW(s)\right] + g_0 W(t). \end{aligned}$$

Зокрема, 1) якщо $\alpha_0 = \alpha_1 = -\alpha_2$, то $I_0(t) = 2\sigma_0\alpha_0 L_W(0,t) + g_0 W(t)$;

2) якщо $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$, то $I_0(t) = g_0 W(t)$.

II) Нехай $I(t) = L_\xi(0,t) = |\xi(t)| - \int_0^t \operatorname{sign}\xi(s)\,d\xi(s)$ — локальний час розв'язку ξ у точці 0 на відрізку $[0, t]$. Тоді за лемою 4.1 $g(x) = -\operatorname{sign} x + \Phi'(x)$, $F(x) = |x| - \Phi(x) + \Phi(x_0)$, де

$$\Phi(x) = 2\int_0^x f'(u)\left(\int_0^u \frac{a(v)\operatorname{sign} v}{f'(v)}\,dv\right)du.$$

Для цього функціонала умови теореми 2.1 виконуються при $\psi(|x|) = 1$, $\bar{a}(x) = \operatorname{sign} x$, $\bar{b}(x) = -\operatorname{sign} x$.

Отже, $\frac{1}{\sqrt{T}} L_\xi(0, tT)$ при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу $I_0(t) = L_\zeta(0,t) = \sigma_0 L_W(0,t)$.

Доведення теореми 2.2. Скористаємось представленням

$$\begin{aligned} I_T(t) &= \frac{I(tT)}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = \frac{F\left(\xi(tT)\right)}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} \int_0^{tT} g(\xi(s))\,dW(s) \\ &= F_T\left(\zeta_T(t)\right) + \int_0^t g_T\left(\zeta_T(t)\right)\,dW_T(s), \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$F_T(x) = \frac{F(\varphi(x\sqrt{T}))}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}}, \qquad g_T(x) = \frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T})}} g(\varphi(x\sqrt{T})).$$

Відомо [3], що для довільних сталих $L > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le t\le L} \mathsf{P}\left\{|\zeta_T(t)| > N\right\} = 0, \\ \lim_{h\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{|t_1 - t_2|\le h;\, t_i\le L} \mathsf{P}\left\{|\zeta_T(t_2) - \zeta_T(t_1)| > \varepsilon\right\} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Зрозуміло, що аналогічні співвідношення виконуються і для $W_T(t)$. Тому ([12], гл. I, §6) для процесів $\zeta_T(t)$, $W_T(t)$ має місце принцип А.В. Скорохода вибору збіжної підпослідовності. Отже, для будь-якої послідовності $T_n' \to \infty$ можна вибрати підпослідовність $T_n \to \infty$, ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Im}, \tilde{P})$ і випадкові процеси $\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(t), \tilde{W}_{T_n}(t)\right)$, $\left(\tilde{\zeta}(t), \tilde{W}(t)\right)$ на цьому просторі так, що всі скінченновимірні розподіли процесів $\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(t), \tilde{W}_{T_n}(t)\right)$ співпадають із відповідними скінченновимірними розподілами процесів $(\zeta_{T_n}(t), W_{T_n}(t))$, при цьому мають місце збіжності $\tilde{\zeta}_{T_n}(t) \xrightarrow{\tilde{P}} \tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\tilde{P}} \tilde{W}(t)$ для кожного $t \ge 0$. Аналогічними міркуваннями (див. [13], гл. II §6) показується, що скінченновимірні розподіли процесу $I_{T_n}(t)$ співпадають із відповідними скінченновимірними розподілами процесу

$$\tilde{I}_{T_n}(t)=\frac{F\left(\varphi\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(t)\sqrt{T_n}\right)\right)}{\sqrt{\sqrt{T_n}\psi_1(\sqrt{T_n})}}+\frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}}\int_0^t g\left(\varphi\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right)d\tilde{W}_{T_n}(s). \tag{11}$$

Тому, не обмежуючи загальності, у рівності (9) будемо вважати, що для довільної послідовності $T_n\to\infty$ маємо $\xi_{T_n}(t)\xrightarrow{\mathsf{P}}\xi(t)$, $W_{T_n}(t)\xrightarrow{\mathsf{P}}W(t)$ для кожного $t\ge 0$.

Повністю аналогічними міркуваннями доведення збіжності (8) доводиться, що для будь-якого $N>0$

$$\sup_{|x|\le N}\left|\frac{F\left(\varphi\left(x\sqrt{T_n}\right)\right)}{\sqrt{\sqrt{T_n}\psi_1(\sqrt{T_n})}}-\bar{a}(x)|x|^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\right|\to 0 \tag{12}$$

при $T_n\to\infty$.

Більше того, (див.[3]) для довільної сталої $L>0$

$$\sup_{0\le t\le L}|\zeta_{T_n}(t)-\zeta(t)|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$

при $T_n\to\infty$; $\int_0^t\mathsf{P}\{|\zeta(s)|=0\}\,ds=0$ для кожного $t\ge 0$ і

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\zeta_T(t)|>N\right\}=0.$$

Отже, із збіжності (12) і нерівності

$$\begin{aligned}\mathsf{P}&\left\{\sup_{0\le t\le L}\left|F_T\left(\zeta_T(t)\right)-\bar{a}(\zeta_T(t))\left|\zeta_T(t)\right|^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\right|>\varepsilon\right\}\\&\le\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\zeta_T(t)|>N\right\}\\&\quad+\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}\left|F_T\left(\zeta_T(t)\right)-\bar{a}(\zeta_T(t))\left|\zeta_T(t)\right|^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\right|\chi_{\{|\zeta_T(t)|\le N\}}>\frac{\varepsilon}{2}\right\},\end{aligned}$$

де $F_T(x)$ визначена у (9), яка виконується для довільних $\varepsilon>0$, $L>0$, $N>0$, маємо, що

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\frac{F\left(\varphi\left(\zeta_{T_n}(t)\sqrt{T_n}\right)\right)}{\sqrt{\sqrt{T_n}\psi_1(\sqrt{T_n})}}-\bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)|^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\right|\xrightarrow{\mathsf{P}}0 \tag{13}$$

при $T_n\to\infty$.

Далі у стохастичному інтегралі з рівності (9) при $T=T_n$ скористаємося випадковою заміною часу (див. [2], §4), використавши при цьому лему 4.3 і отримаємо рівність

$$\frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}}\int_0^t g\left(\varphi\left(\zeta_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right)dW_{T_n}(s)=W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}_{T_n}(t)\right),$$

де $W^*_{T_n}(t)$ — сімейство вінерівських процесів,

$$\beta^{(1)}_{T_n}(t)=\frac{\sqrt{T_n}}{\psi_1(\sqrt{T_n})}\int_0^t g^2\left(\varphi\left(\zeta_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right)ds.$$

Отже, маємо

$$I_{T_n}(t)=\bar{a}(\zeta(t))|\zeta(t)|^{\frac{\alpha_1+1}{2}}+W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}_{T_n}(t)\right)+\alpha_{T_n}(t), \tag{14}$$

де

$$\alpha_{T_n}(t) = \left[\frac{F\left(\varphi\left(\zeta_{T_n}(t)\sqrt{T_n}\right)\right)}{\sqrt{|\zeta_{T_n}(t)|\sqrt{T_n}\;\psi_1\left(|\zeta_{T_n}(t)|\sqrt{T_n}\right)}} - \bar a(\zeta_{T_n}(t)) \right] \sqrt{|\zeta_{T_n}(t)|} \sqrt{\frac{\psi_1\left(|\zeta_{T_n}(t)|\sqrt{T_n}\right)}{\psi_1\left(\sqrt{T_n}\right)}}$$
$$+ \bar a(\zeta_{T_n}(t)) \left[\sqrt{|\zeta_{T_n}(t)|} \sqrt{\frac{\psi_1\left(|\zeta_{T_n}(t)|\sqrt{T_n}\right)}{\psi_1\left(\sqrt{T_n}\right)}} - |\zeta(t)|^{\frac{\alpha_1+1}{2}} \right]$$
$$+ |\zeta(t)|^{\frac{\alpha_1+1}{2}} \left[\bar a(\zeta_{T_n}(t)) - \bar a(\zeta(t))\right].$$

Враховуючи збіжність (13), властивості регулярно змінних на нескінченності функцій і властивості процесу ζ легко показати, що

$$\sup_{0\le t\le L} |\alpha_{T_n}(t)| \xrightarrow{\mathsf P} 0 \tag{15}$$

при $T_n \to \infty$. Із доведення теореми 1 роботи [9] випливає, що при виконанні умови (A_4)

$$\beta^{(1)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf P} \bar\beta^{(1)}(t) \tag{16}$$

при $T_n \to \infty$, де

$$\bar\beta^{(1)}(t) = 2\left[\int_0^{\zeta(t)} \bar b(x)|x|^{\alpha_1}\,dx - \int_0^t \bar b(\zeta(s))|\zeta(s)|^{\alpha_1}\,d\zeta(s)\right],$$

де ζ — розв'язок рівняння (3), при цьому для довільних $L>0$, $\varepsilon>0$

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathsf P\left\{\sup_{|t_1-t_2|\le h;\, t_i\le L}\left|\bar\beta^{(1)}_{T_n}(t_2) - \bar\beta^{(1)}_{T_n}(t_1)\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{17}$$

Далі, враховуючи збіжність (16), доведення проводиться майже дослівно доведенню теореми 2.1 роботи [9], з тією лише різницею, що при встановленні незалежності процесів $W^*(t)$ і $\bar\beta^{(1)}(t)$ використовується умова (A_5). □

Доведення теореми 2.3. Скористаємось представленням

$$\begin{aligned} I_T(t) &= \frac{I(tT)}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})} \\ &= \frac{F(\xi(tT))}{|\xi(tT)|\,\psi(|\xi(tT)|)} \frac{|\xi(tT)|\,\psi(|\xi(tT)|)}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})} + \int_0^t \frac{g(\xi(sT))}{\psi(|\xi(tT)|)} \frac{\psi(|\xi(tT)|)}{\psi(\sqrt{T})}\,dW_T(s) \\ &= a_0 r_T(t)\frac{\psi(r_T(t)\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})} + b_0\int_0^t \frac{\psi(r_T(s)\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})}\,d\widehat W_T(s) + \alpha_T^{(1)}(t) + \alpha_T^{(2)}(t), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\alpha_T^{(1)}(t) = \left[\frac{F(\xi(tT))}{|\xi(tT)|\,\psi(|\xi(tT)|)} - a_0\right] r_T(t)\frac{\psi(r_T(t)\sqrt{T})}{\psi(\sqrt{T})},$$
$$\alpha_T^{(2)}(t) = \int_0^t \left[\frac{g(\xi(sT))}{\psi(|\xi(tT)|)} - b_0\,\operatorname{sign}\xi(sT)\right] \frac{\psi(|\xi(tT)|)}{\psi(\sqrt{T})}\,dW_T(s).$$

Аналогічно доведенню збіжності (13) легко показати, що при виконанні умов (B_1) і (B_2) теореми 2.3 для довільної сталої $L>0$

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\alpha_T^{(i)}(t)\right| \xrightarrow{\mathsf P} 0, \qquad i=1,2 \tag{19}$$

при $T\to\infty$. Крім того, (див. [3]) для процесів $r_T(t)$, $\widehat W_T(t)$ виконуються збіжності (10), а із збіжностей (19) випливає виконання збіжностей (10) і для $\alpha_T^{(i)}(t)$, $i=1,2$.

Отже, для процесу $\left(r_T(t),\, \widehat{W}_T(t),\, \alpha_T^{(1)}(t),\, \alpha_T^{(2)}(t)\right)$ має місце принцип А.В. Скорохода вибору збіжної підпослідовності.

Тому, не обмежуючи загальності, у рівності (18) будемо вважати, що для довільної підпослідовності $T_n \to \infty$ для кожного $t \geq 0$ мають місце збіжності $r_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} r(t)$, $\widehat{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \widehat{W}(t)$.

Далі перейдемо в (18) до границі при $T_n \to \infty$ і отримаємо збіжність $I_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} I_0(t)$, де $I_0(t) = a_0 r^{\alpha+1}(t) + b_0 \int_0^t r^\alpha(s)\, d\widehat{W}(s)$, де $r(t)$ і $\widehat{W}(t)$ пов'язані через рівняння (4). Із єдиності сильного розв'язку рівняння (4) маємо збіжність скінченновимірних розподілів процесу $I_T(t)$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу $I_0(t)$. Зрозуміло, що процеси $I_T(t)$ і $I_0(t)$ неперервні з ймовірністю 1. Аналогічно доведенню збіжності (16) у статті [8], використовуючи при цьому збіжності (19), отримаємо збіжності вигляду (17) і для процесу $I_T(t)$ у даному випадку.

Тому (див. [14], гл. IX, §2) процес $I_T(t)$ при $T \to \infty$ слабко збігається у рівномірній топології простору неперервних функцій до процесу $I_0(t)$. □

Доведення теореми 2.4. Скористаємось представленням

$$I_T(t) = \frac{I(tT)}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = \hat{I}_T(t) + \alpha_T^{(3)}(t) + \alpha_T^{(4)}(t), \tag{20}$$

де

$$\hat{I}_T(t) = a_0 \sqrt{r_T(t)} \sqrt{\frac{\psi_1\left(r_T(t)\sqrt{T}\right)}{\psi_1(\sqrt{T})}} + \frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T})}} \int_0^t \hat{g}\left(r_T(s)\sqrt{T}\right) d\widehat{W}_T(s),$$

$$\alpha_T^{(3)}(t) = \left[\frac{F\left(\xi(tT)\right)}{\sqrt{|\xi(tT)|\, \psi_1\left(|\xi(tT)|\right)}} - a_0\right] \sqrt{r_T(t)} \sqrt{\frac{\psi_1\left(r_T(t)\sqrt{T}\right)}{\psi_1(\sqrt{T})}},$$

$$\alpha_T^{(4)}(t) = \frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T})}} \int_0^t \left[g\left(\xi(sT)\right) - \hat{g}\left(\xi(sT)\right)\right] dW_T(s).$$

Аналогічно доведенню збіжності (13) отримаємо, що для довільної сталої $L > 0$ при $T \to \infty$ має місце збіжність (19) для $i = 3$, а використовуючи теорему 1 роботи [5], отримаємо, що збіжність (19) має місце і для $i = 4$.

У роботі [3] показано, що процеси $r_T(t)$, $\widehat{W}_T(t)$ задовольняють співвідношення (10). Оскільки для $\alpha_T^{(i)}(t)$ при $i = 3, 4$ має місце (19), то ці процеси задовольняють співвідношення (10).

Отже, для процесу $\left(r_T(t),\, \widehat{W}_T(t),\, \alpha_T^{(3)}(t),\, \alpha_T^{(4)}(t)\right)$ виконується принцип вибору збіжної підпослідовності А.В. Скорохода . Тому, не обмежуючи загальності, припустимо, що у рівності (20) для довільної підпослідовності $T_n \to \infty$ для кожного $t \geq 0$ мають місце збіжності $r_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} r(t)$, $\widehat{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \widehat{W}(t)$, $\alpha_{T_n}^{(i)}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \alpha^{(i)}(t)$, $i = 3, 4$. Більше того, у даному випадку процеси $r(t)$ і $\widehat{W}(t)$ пов'язані через рівняння (4) (див. [3]) і при $T_n \to \infty$ для $\alpha_{T_n}^{(i)}(t)$, $i = 3, 4$ має місце збіжність (19). Далі, аналогічно доведенню теореми 2.2 статті [9], у стохастичному інтегралі функціоналу $I_{T_n}(t)$ робимо випадкову заміну часу і отримаємо, що

$$\frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}} \int_0^t \hat{g}\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right) d\widehat{W}_{T_n}(s) = W_{T_n}^*\left(\hat{\beta}_{T_n}^{(1)}(t)\right),$$

де

$$\hat{\beta}^{(1)}_{T_n}(t) = \frac{\sqrt{T_n}}{\psi_1(\sqrt{T_n})} \int_0^t \hat{g}^2\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right) ds,$$

$W^*_{T_n}(t)$ — сімейство вінерівських процесів.

Із доведення теореми 2.2 статті [9] маємо, що

$$\hat{\beta}^{(1)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \hat{\beta}^{(1)}(t) = 2b_0\left[\frac{r^{\alpha_1+1}(t)}{\alpha_1+1} - \int_0^t r^{\alpha_1}(s)\, d\widehat{W}(s)\right].$$

Таким чином, для повного доведення теореми 2.4 потрібно провести майже дослівні міркування доведення теореми 2.2 роботи [9], враховуючи при цьому збіжності (19) для $i = 3, 4$. □

Приклад 3.2. Розглянемо рівняння (1) з $a(x) = \frac{x}{1+x^2}$, звідки $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Нехай $g(x) = \sin x$, тоді для функціонала $\beta(t) = \int_0^t \sin(\xi(s))\, d\xi(s)$, використовуючи зв'язок функціонала $\beta(t)$ із функціоналом $I(t)$ (див. лему 4.1), легко показати, що виконуються умови (B_3) — (B_5) теореми 2.4 при $\psi_1(|x|) = |x|$, $a_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\hat{g}(x) = \sin x$, $b_0 = \frac{1}{6}$, $c_0 = 1$. Згідно із зауваженням 2.4 функціонал $\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{tT} \sin(\xi(s))\, d\xi(s)$ при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу $I^*_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} W^*(t)$.

4. Допоміжні результати

Доведемо леми 4.1 і 4.2 та сформулюємо лему 4.3, що використовується при доведенні основних результатів роботи.

Лема 4.1. *Клас функціоналів $I(t)$ включає, зокрема, функціонали вигляду*

$$\beta(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, d\xi(s), \qquad \beta^{(1)}(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, ds, \qquad \beta^{(2)}(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, dW(s).$$

Доведення. Зрозуміло, що $\beta^{(2)}(t) = I(t)$ при $F(x) \equiv 0$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = 2\int_0^x f'(u)\left(\int_0^u \frac{g(v)}{f'(v)}\, dv\right) du,$$

де $f(x)$ визначена в (2). Ця функція має неперервну похідну $\Phi'(x)$ і має майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровну другу похідну $\Phi''(x)$. Тому для процесу $\Phi(\xi(t))$ можна застосувати формулу Іто ([13], §10, гл. II) і отримати з ймовірністю 1 для всіх $t > 0$

$$\Phi(\xi(t)) - \Phi(x_0) = \int_0^t \left[\Phi'(\xi(s))a(\xi(s)) + \frac{1}{2}\,\Phi''(\xi(s))\right] ds + \int_0^t \Phi'(\xi(s))\, dW(s).$$

Далі, враховуючи рівність

$$\Phi'(x)a(x) + \frac{1}{2}\,\Phi''(x) = g(x),$$

яка має місце майже скрізь (за мірою Лебега), отримаємо

$$\beta^{(1)}(t) = \Phi(\xi(t)) - \Phi(x_0) - \int_0^t \Phi'(\xi(s))\, dW(s),$$

тому $\beta^{(1)}(t) = I(t)$ при $F(x) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$, $g(x) = \Phi'(x)$.

Крім того, із очевидної рівності

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \int_0^t g(\xi(s))a(\xi(s))\,ds + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)\\ &= \widehat{\Phi}(\xi(t)) - \widehat{\Phi}(x_0) - \int_0^t \widehat{\Phi}'(\xi(s))\,dW(s) + \int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)\\ &= \widehat{\Phi}(\xi(t)) - \widehat{\Phi}(x_0) + \int_0^t \left[g(\xi(s)) - \widehat{\Phi}'(\xi(s))\right] dW(s),\end{aligned}$$

де

$$\widehat{\Phi}(x) = 2\int_0^x f'(u)\left(\int_0^u \frac{g(v)a(v)}{f'(v)}\,dv\right) du,$$

маємо, що і $\beta(t)$ зводиться до функціоналу вигляду $I(t)$. □

Лема 4.2. *Нехай ξ — розв'язок рівняння* (1) *і*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int_0^t \mathsf{E}\left(f'(\xi(s))\right)^2 ds = 0.$$

Тоді ξ — нестійкий розв'язок.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\bar{\Phi}(x) = 2\int_0^x f'(u)\left(\int_0^u \frac{\chi_{\{|v|<N\}}}{f'(v)}\,dv\right) du.$$

Застосувавши формулу Іто для функції $\Phi(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{P}\{|\xi(s)| < N\}\,ds &= \frac{1}{t}\,\mathsf{E}\left[\bar{\Phi}(\xi(t)) - \bar{\Phi}(x_0)\right] \le C_N \frac{1}{t}\,\mathsf{E}\left|f(\xi(t)) - f(x_0)\right|\\ &\le C_N\left(\frac{1}{t^2}\,\mathsf{E}\left(f(\xi(t)) - f(x_0)\right)^2\right)^{\frac12} = C_N\left(\frac{1}{t^2}\int_0^t \mathsf{E}\left(f'(\xi(s))\right)^2 ds\right)^{\frac12},\end{aligned}$$

де у останній рівності скористались формулою Іто для $f(\xi(t))$.

Отже, враховуючи умову леми і отриману нерівність, маємо справедливість твердження леми. □

Лема 4.3. *Нехай ξ — однорідний строго марківський процес, тоді для локально інтегровної з квадратом дійсної функції $g \not\equiv 0$*

$$\int_0^\infty g^2\left(\xi(s)\right)\,ds = \infty$$

з ймовірністю 1.

Доведення. Доведення леми співпадає з доведенням леми 3.1 роботи [9]. □

Література

1. А. Ю. Веретенников, *О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений*, Теория вероятностей и ее применения **XXIV**, (1979), № 2, 348–360.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, "Наукова думка", Киев, 1968.
3. Г. Л. Кулініч, *Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник*, "Київський університет", Київ, 2003.
4. Г. Л. Кулинич, *Об ассимптотическом поведении распределений функционалов типа $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$ от диффузионных процессов*, Теория вероятн. матем. статист. **8** (1973), 99–105.
5. Г. Л. Кулинич, *Предельные распределения для функционалов интегрального типа от неустойчивых диффузионных процессов*, Теория вероятн. матем. статист. **11** (1974), 81–85.

6. G. L. Kulinich, *On the asymptotik behavior of the solution of one dimentional stochastic diffusion equation*, Lecture Notes in Control and Information Sciencs, Springer-Verlag **25** (1980), 334–343.
7. G. L. Kulinich, *On necessary and sufficient conditions for convergence of homogeneous additive functionals of diffusion processes*, Proceedings of the Second Ukrainian–Hungarian Conference: New Trends in Probability and Mathematical Statistics (M. Arato and M. Yadrenko, eds.), vol. 2, "TViMS", Kyiv, 1995, pp. 381–390.
8. G. L. Kulinich, S. V. Kushnirenko, and Y. S. Mishura, *Asymptotic behavior of the integral functionals for unstable solutions of one-dimensional Itô stochastic differential equations*, Theory Probab. Math. Statist. **89** (2013), 93–105.
9. Г. Л. Кулініч, С. В. Кушніренко, Ю. С. Мішура, *Асимптотична поведінка інтегральних функціоналів мартингального типу від нестійких розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь*, Теорія ймовір. та матем. статист. **90** (2014), 102–112.
10. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, *Предельные теоремы для случайных блужданий*, "Наукова думка", Киев, 1970.
11. А. М. Кулик, *Локальные времена случайных процессов*, Математика сьогодні (2008), 31–65.
12. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Издательство Киевского университета, Киев, 1961.
13. Н. В. Крылов, *Управляемые процессы диффузионного типа*, "Наука", Москва, 1977.
14. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1965.

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра загальної математики
Адреса електронної пошти: zag_mat@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра загальної математики
Адреса електронної пошти: bksv@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики
Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Надійшла 24/02/2015