Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 92, 2015, стор. 110–124

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 92, 2015, pp. 110–124

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЦІН ОПЦІОНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА І Є. Ю. МУНЧАК

Анотація. В даній роботі розглянуто послідовність фінансових ринків з дискретним часом в схемі серій. Досліджується швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека–Шоулса. Ця швидкість має порядок $O(n^{-1})$, де n – кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. Для отримання такої оцінки швидкості збіжності застосовується результат авторів, щодо швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів.

Abstract. In this paper, we consider the sequence of financial markets with discrete time in the scheme of series. We study the rate of convergence of put and call option prices for weak convergence of risky assets' prices in the discrete-time model to Black–Scholes model. This rate has the order $O(n^{-1})$, where n is the number of trading periods on a fixed time interval. To get this estimate of the rate of convergence, the authors' result is applied that concerns the rate of convergence in the central limit theorem for identically distributed random variables, obtained by the method of pseudomoments.

Аннотация. В данной работе рассмотрена последовательность финансовых рынков с дискретным временем в схеме серий. Исследуется скорость сходимости цен опционов покупки и продажи при слабой сходимости цен рисковых активов в модели с дискретным временем к модели Блека–Шоулса. Эта скорость имеет порядок $O(n^{-1})$, где n – количество периодов для проведения торгов на фиксированном интервале времени. Для получения такой оценки скорости сходимости применяется результат авторов, который касается скорости сходимости в центральной предельной теореме для одинаково распределенных случайных величин, полученной методом псевдомоментов.

1. Вступ

Велику кількість робіт у фінансовій математиці присвячено збіжності цін ризикових активів та цін відповідних опціонів, що моделюються в дискретному часі, до моделей з неперервним часом. Назвемо лише книгу [9], яка містить багато посилань на відповідні статті. Інтерес до цієї тематики викликано очевидними причинами: реальний час дискретний, але аналітичні і, як не дивно, чисельні дослідження, легше проводити в неперервному часі. При цьому природним чином постає питання щодо швидкості збіжності цін опціонів. Деяку кількість статей присвячено швидкості збіжності, але, при великій різноманітності можливостей вибору як граничної моделі, так і дограничних наближень, в основному, роботи з оцінки швидкості збіжності стосуються дограничної біноміальної та тріноміальної моделей та граничної моделі Блека–Шоулса [1, 2, 4, 10]. Це пояснюється наявністю досить тонких аналітичних результатів про швидкість збіжності біноміального розподілу до гауссівського, які дозволяють підвищити оцінку швидкості збіжності, скажімо, до $O(n^{-1})$, де n –

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60F15; 91B25; 91G20.

Ключові слова і фрази. Фінансові ринки в дискретному та неперервному часі, схема серій, псевдомоменти, швидкість збіжності, ціни опціонів, модель Блека–Шоулса.

кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в допграничній моделі. В статтях [5, 6, 7] розглянуто більш загальні схеми як для допграничних ринків, так і для цін активів на граничному ринку, але швидкість збіжності в усіх моделях не перевищує $O(n^{-1/2})$. Це. в свою чергу, пояснюється тим фактом, що при відході від біноміальної моделі треба шукати або одержувати результати щодо швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних випадкових величин до гауссівського розподілу. Один з таких результатів одержано в статті [8] методом псевдомоментів. Ми використовуємо цей результат в даній статті, поліпшуючи швидкість збіжності цін опціонів до $O(n^{-1})$ без припущення про біноміальний розподіл допграничних приростів, яке в багатьох випадках не може виконуватись.

Статтю побудовано наступним чином. В розділі 2 наводиться зображення і властивості фінансового ринку з дискретним часом та одним ризиковим активом, досліджуються умови безарбітражності фінансового ринку з дискретним часом у схемі серій. Розділ 3 містить умови безарбітражності ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами, в основному, коли їхній розподіл є неперервним. Доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об'єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри. В розділі 4 доводиться функціональна гранична теорема для ринку з дискретним часом в схемі Блека–Шоулса. В розділі 5 доводяться допоміжні результати про швидкість збіжності сум, пов'язаних з ціною ризикового активу, в центральній граничній теоремі, із застосуванням методу псевдомоментів. Ці результати необхідні для отримання оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом. Розділ 6 містить теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу. В розділі 7 наводиться приклад функції розподілу для незалежних однаково розподілених випадкових величин, до яких можна застосувати метод псевдомоментів.

2. Зображення та властивості фінансового ринку з дискретним часом та одним ризиковим активом

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – ймовірнісний простір. Розглянемо в схемі серій послідовність фінансових ринків з дискретним часом, з одним ризиковим та одним безризиковим активом, задану на цьому просторі. А саме, нехай $T > 0$ задано, параметр n приймає значення з $\mathbb{N}$, при кожному $n \geq 1$ маємо розбиття інтервалу часу $[0, T]$ виду $\pi(n) = \{0 = t_n^0 < t_n^1, \ldots < t_n^n = T\}$, і точки розбиття будемо вважати моментами торгів на фінансовому ринку. Тепер, нехай $\{r_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ –сукупність невід'ємних чисел, яку будемо трактувати як послідовні відсоткові ставки, так що ціна безризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$B_n^k = \prod_{i=1}^{k} (1 + r_n^i). \tag{1}$$

Тепер, нехай на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ при кожному $n \geq 1$ задано сукупність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leq k \leq n\}$, щодо якої завжди будемо припускати виконаною умову обмеженості: існує $0 < c < 1$ таке, що всі $|R_n^k| \leq c$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$. Введемо потік σ-алгебр $\mathcal{F}_n^k = \sigma\{R_n^i, i = 1, \cdots, k\}$, породжений цими випадковими величинами. Будемо вважати, що ціна ризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$S_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \left(1 + R_n^i\right). \tag{2}$$

Тоді дисконтований ризиковий актив в момент t_n^k має вигляд

$$X_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \frac{1+R_n^i}{1+r_n^i}.$$

Позначимо $\{\mathsf{P}_n, n \geq 1\}$ послідовність об'єктивних (фізичних) мір, що відповідає ризиковому ціновому процесу $\{S_n^k, 1 \leq k \leq n\}$. З'ясуємо умови безарбітражності фінансового ринку з дискретним часом в схемі серій. Як відомо, ринок в n-й серії буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна еквівалентна до P_n ймовірнісна міра P_n^*, відносно якої $\{X_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ буде $\{\mathcal{F}_n^k, 1 \leq k \leq n\}$-мартингалом, або скорочено $\mathcal{F}_n$-мартингалом. Далі, згідно, наприклад, з [3], всі можливі мартингальні міри P_n^* в n–й серії мають похідну Радона-Никодима вигляду

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right), \tag{3}$$

де $\left\{M_n^k, 1 \leq k \leq n\right\}$ – деякий $\mathcal{F}_n$-мартингал, $\Delta M_n^k := M_n^k - M_n^{k-1} > -1$. Наведемо одну просту достатню умову безарбітражності фінансового ринку в n-й серії.

Лема 2.1. *Фінансовий ринок* (1)–(2) *буде безарбітражним в n–й серії, якщо існує сукупність вимірних функцій $\{\varphi_n^k(x), x \in \mathbb{R}^k, 1 \leq k \leq n\}$ така, що $|\varphi_n^k(x)| < \frac{1}{2}$, і для $1 \leq k \leq n$ мають місце рівності*

$$\mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}) + \mathsf{E}(\varphi_n^k(R_n^1,\dots,R_n^k)R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}) - \mathsf{E}(\varphi_n^k(R_n^1,\dots,R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1})\,\mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}) = r_n^k. \tag{4}$$

Доведення. Запишемо три умови, які в сукупності еквівалентні тому, що міра P_n^* справді є ймовірнісною, $\mathsf{P}_n^* \sim \mathsf{P}_n$ і P_n^* є мартингальною мірою. Умова еквівалентності має вигляд

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right) > 0 \tag{5}$$

м.н., умова мартингальності записується як

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}\left(X_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}\right) = X_n^{k-1}, 1 \leq k \leq n,$$

м.н., і нарешті умова того, що P_n^* є ймовірнісною мірою, має вигляд

$$\mathsf{E}\,\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \mathsf{E}\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right) = 1. \tag{6}$$

Умову мартингальності перепишемо у вигляді

$$\frac{\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left(\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} X_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}\right)}{\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left(\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n}|\mathcal{F}_n^{k-1}\right)} = X_n^{k-1},$$

і з урахуванням (3) вона зводиться до співвідношень

$$\mathsf{E}\left(\left(1+\Delta M_n^k\right)\left(1+R_n^k\right)|\mathcal{F}_n^{k-1}\right) = 1 + r_n^k,$$

або, що те саме,

$$\mathsf{E}\left(\Delta M_n^k + \left(1+\Delta M_n^k\right)R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}\right) = r_n^k.$$

Нарешті, з урахуванням того, що M_n є мартингалом, умову мартингальності можна спростити до рівнянь

$$\mathsf{E}\left(\left(1+\Delta M_n^k\right)R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}\right) = r_n^k, 1 \leq k \leq n. \tag{7}$$

Тепер, оскільки випадкова величина ΔM_n^k є вимірною відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_n^k$, то ΔM_n^k подається у вигляді $\Delta M_n^k = \psi(R_n^i, i = 1, \cdots, k)$, де ψ – деяка вимірна функція. Але з урахуванням мартингальної властивості будемо шукати ΔM_k^n у вигляді:

$$\Delta M_k^n = \varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k) - \mathsf{E}(\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1}). \tag{8}$$

Якщо при цьому припустити, що $|\varphi_n^k(x)| < \frac{1}{2}$, то одночасно будуть виконані властивості $(1 + \Delta M_n^k) > 0$, тобто буде виконано умову (5), а тоді і умова (6), очевидно, має місце, а рівності (7) і (4) є еквівалентними. Лему доведено. □

Зауваження 2.1. Очевидно, в загальному випадку перевірка умови (4) є досить нетривіальною задачею. В деяких випадках її можна спростити. Наприклад, спробуємо шукати ΔM_n^k у вигляді $\Delta M_n^k = \nu_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^{k-1})(R_n^k - \mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}))$, де $\nu_n^k = \nu_n^k(x) : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$–вимірна функція, обмежена сталою $1/2c$. Тоді умови (5) і (6), очевидно, виконуються. Позначимо умовну дисперсію $\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k) := \mathsf{E}((R_n^k)^2|\mathcal{F}_n^{k-1}) - (\mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}))^2$. Тоді рівність (4) зводиться до наступної:

$$\mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}) + \nu_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^{k-1})\,\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k) = r_n^k.$$

Отже, за виконання умови

$$\left|\frac{r_n^k - \mathsf{E}(R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1})}{\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k)}\right| \le \frac{1}{2c}$$

ринок буде безарбітражним.

3. Безарбітражність ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами

Нехай тепер в кожній серії випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ незалежні в сукупності і обмежені як і раніше: $|R_n^k| \le c < 1$. Будемо шукати ΔM_n^k у вигляді (8), причому тепер $\mathsf{E}(\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1}) = \mathsf{E}_k\,\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k)|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}}$, де математичне сподівання E_k береться відносно останньої випадкової величини, а потім підставляються попередні. Введемо наступне позначення для випадкової величини, що є коваріацією виду

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_k(\varphi_n^k, R_n^k) &:= \mathsf{E}_k(\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k)R_n^k)|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}} \\ &\quad - \mathsf{E}_k(\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k)|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}}\,\mathsf{E}\,R_n^k.\end{aligned}$$

Тоді умова (4) зводиться до наступної:

$$\mathsf{E}\,R_n^k + \mathrm{Cov}_k(\varphi_n^k, R_n^k) = r_n^k. \tag{9}$$

Знайти загальний вигляд функцій φ_n^k, для яких виконуються рівності (9), є досить складною задачею. Як добре відомо ситуація суттєво спрощується, якщо ринок є біноміальним. Нехай випадкова величина R_n^k приймає лише два значення a_n^k і b_n^k, $a_n^k < b_n^k$, з імовірностями $p_n^k > 0$ і $q_n^k > 0$, відповідно. В цьому випадку в n-й серії ринок буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли $a_n^k < r_n^k < b_n^k$, і при цьому єдина мартингальна міра визначається співвідношенням (3), в якому

$$\Delta M_n^k = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}(R_n^k - \mu_n^k), \tag{10}$$

де $\mu_n^k = \mathsf{E}\,R_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = \mathrm{Var}\,R_n^k$, тобто ринок є і повним. Тепер розглянемо випадок, коли випадкові величини R_n^k мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$. Збережемо позначення $\mu_n^k = \mathsf{E}\,R_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = \mathrm{Var}\,R_n^k$.

Лема 3.1. *За умови, що випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$, фінансовий ринок в n-й серії буде безарбітражним, якщо виконується одна з трьох умов: або $r_n^k = \mu_n^k$, або $\mu_n^k - \frac{(\sigma_n^k)^2}{b_n^k - \mu_n^k} < r_n^k < \mu_n^k$, або $\mu_n^k < r_n^k < \mu_n^k + \frac{(\sigma_n^k)^2}{\mu_n^k - a_n^k}$, $1 \le k \le n$.*

Доведення. Будемо шукати ΔM_n^k у вигляді

$$\Delta M_n^k = \varphi_n^{k-1}\left(R_n^k - \mu_n^k\right),$$

де випадкова величина φ_n^{k-1} буде $\mathcal{F}_n^{k-1}$-вимірною. Оскільки φ_n^{k-1} і R_n^k при цьому будуть незалежними, співвідношення (9) зведеться до наступного:

$$\mu_n^k + \varphi_n^{k-1}(\sigma_n^k)^2 = r_n^k,$$

звідки дістаємо, що φ_n^{k-1} є невипадковою і дорівнює

$$\varphi_n^{k-1} = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2},$$

тобто ΔM_n^k має вигляд (10). Безарбітражність ринку еквівалентна співвідношенню $\Delta M_n^k > -1$ м.н., або

$$(r_n^k - \mu_n^k)(R_n^k - \mu_n^k) + (\sigma_n^k)^2 > 0 \text{ м.н.} \tag{11}$$

Розглянемо три випадки.

(*a*) Якщо $r_n^k = \mu_n^k$, то співвідношення (11) виконується.

(*b*) Нехай $r_n^k > \mu_n^k$. Тоді (11) виконано м.н., якщо

$$(r_n^k - \mu_n^k)(a_n^k - \mu_n^k) + (\sigma_n^k)^2 > 0, \tag{12}$$

при чому $a_n^k < \mu_n^k$, оскільки розподіл R_n^k за припущенням неперервний і зосереджений на $[a_n^k, b_n^k]$. Тому нерівність (12) еквівалентна нерівності

$$r_n^k < \mu_n^k + \frac{(\sigma_n^k)^2}{\mu_n^k - a_n^k}.$$

(*c*) Випадок $r_n^k < \mu_n^k$ розглядається аналогічно.

Лему доведено. □

Неповноту ринку, породженого незалежними в сукупності випадковими величинами $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ з неперервним розподілом доведемо за додаткових умов, що спрощують ситуацію з технічної точки зору. Зауважимо, що наступні припущення є природними для моделі ринку в схемі серій.

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови леми 3.1, а також умови: існують сталі $0 < \alpha < \beta$ такі, що для всіх $1 \le k \le n$*

$$\alpha < |a_n^k \sqrt{n}| < \beta,\ \alpha < |b_n^k \sqrt{n}| < \beta,\ \alpha < |\mu_n^k n| < \beta \text{ та } \alpha < |r_n^k n| < \beta.$$

Тоді фінансовий ринок в n–й серії буде безарбітражним і неповним, якщо $n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}$.

Доведення. Будемо шукати ΔM_n^k двома способами: так, як у лемі 3.1, і у вигляді

$$\Delta M_{n,1}^k = \psi_n^{k-1}\left((R_n^k)^3 - \mathsf{E}(R_n^k)^3\right),$$

де випадкова величина ψ_n^{k-1} повинна бути $\mathcal{F}_n^{k-1}$–вимірною.

Позначимо $\operatorname{Var}_{(2)} R_n^k := \mathsf{E}(R_n^k)^4 - \mu_n^k\,\mathsf{E}(R_n^k)^3$. За припущень на розподіл R_n^k $\operatorname{Var}_{(2)} R_n^k > 0$ і $\psi_n^{k-1} = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{\operatorname{Var}_{(2)} R_n^k}$. При цьому

$$\operatorname{Var}_{(2)} R_n^k > \frac{\alpha^4}{n^2} - \frac{\beta}{n}\frac{\beta^3}{n\sqrt{n}} > \frac{\alpha^4}{2n^2}, \text{ якщо } \frac{\beta^4}{n^2\sqrt{n}} < \frac{\alpha^4}{2n^2}, \text{ тобто для всіх } n > \frac{4\beta^8}{\alpha^8},$$

і

$$\left|\Delta M_{n,1}^k\right| = \frac{|r_n^k - \mu_n^k|}{\operatorname{Var}_{(2)} R_n^k}\left|(R_n^k)^3 - \mathsf{E}(R_n^k)^3\right| \le \frac{2\beta}{n}\frac{2\beta^3}{n\sqrt{n}}\frac{2n^2}{\alpha^2} < \frac{8\beta^4}{\alpha^4\sqrt{n}} < 1,$$

якщо $n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}$.

Отже, при $n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}$ ринок буде як безарбітражним, так і неповним, тому що існують принаймні дві мартингальні міри P_n^* та $P_n^{*,1}$, що задаються співвідношеннями

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^n (1+\Delta M_n^k) \text{ та } \frac{d\,\mathsf{P}_n^{*,1}}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^n (1+\Delta M_{n,1}^k),$$

відповідно. □

Переформулюємо лему 3.1 для випадку однаково розподілених $\left\{R_n^k, 1 \le k \le n\right\}$.

Лема 3.3. *За умови, що випадкові величини* $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ *однаково розподілені з* $\mathsf{E}\,R_n^k = \mu_n$, $\operatorname{Var} R_n^k = \sigma_n^2$, *незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі* $[a_n, b_n]$, *фінансовий ринок в* n*-й серії буде безарбітражним, якщо виконується одна з трьох умов: або* $r_n = \mu_n$, *або* $\mu_n - \frac{(\sigma_n)^2}{b_n - \mu_n} < r_n < \mu_n$, *або* $\mu_n < r_n < \mu_n + \frac{(\sigma_n)^2}{\mu_n - a_n}$.

Лема 3.4. *Якщо ринок задовольняє умови леми 3.1, то при виборі* P_n^* *згідно з (10) випадкові величини* $\left\{R_n^k, 1 \le k \le n\right\}$ *будуть незалежні в сукупності і відносно міри* P_n^*.

Доведення. Справді для будь-яких борелевих множин $A_1, \dots, A_n$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k, 1 \le k \le n\right\} &= \mathsf{E}\,\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{dP_n}\prod_{k=1}^n \mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\} \\ &= \mathsf{E}\prod_{k=1}^n\left[\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\}\right] \qquad (13) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathsf{E}\left[\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\}\right].\end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k\right\} = \mathsf{E}\,\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{dP_n}\mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\} \\ &= \prod_{i=1, i\ne k}^n \mathsf{E}\left(1 + \frac{r_n^i - \mu_n^i}{(\sigma_n^i)^2}\left(R_n^i - \mu_n^i\right)\right)\mathsf{E}\left[\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\}\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{I}\left\{R_n^k \in A_k\right\}\right].\end{aligned} \qquad (14)$$

Із (13) та (14) випливає, що

$$\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k, 1 \le k \le n\right\} = \prod_{k=1}^n \mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k\right\},$$

тобто справді $\left\{R_n^k, 1 \le k \le n\right\}$ незалежні в сукупності відносно P_n^*. Далі, оскільки відносно P_n^* процес $X_n^k = S_0 \prod_{k=1}^n \frac{1+R_n^k}{1+r_n^k}$ є мартингалом, то

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} X_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^k \frac{1+R_n^i}{1+r_n^i} = S_n^0,$$

звідки з очевидністю $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k = r_n^k$. □

Зауваження 3.1. Порівняємо розподіли R_n^k відносно P_n^* та P_n. Нехай випадкові величини $\left\{R_n^k, 1 \le k \le n\right\}$ задовольняють умови леми 3.1, однаково розподілені і мають щільність $\{f_n(x), x \in \mathbb{R}\}$. Нехай також $r_n^k = r_n$, $1 \le k \le n$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_n^* \left\{R_n^k \le x\right\} = \mathsf{E}_n \left[\left(1 + \frac{r_n - \mu_n}{(\sigma_n)^2}\left(R_n^k - \mu_n\right)\right)\mathbb{I}\left\{R_n^k \le x\right\}\right] \\
&= \mathsf{P}_n\left\{R_n^k \le x\right\} + \frac{r_n - \mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{E}_n\left(R_n^k \mathbb{I}\left\{R_n^k \le x\right\}\right) - \mathsf{P}_n\left\{R_n^k \le x\right\}\frac{r_n\mu_n - \mu_n^2}{\sigma_n^2} \\
&= \frac{\mathsf{E}\, R_n^2 - r_n\mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{P}_n\left\{R_n^k \le x\right\} + \frac{r_n - \mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{E}_n\left(R_n^k\mathbb{I}\left\{R_n^k \le x\right\}\right) \\
&= C_n^{(1)}\int_{-\infty}^x f_n(y)dy + C_n^{(2)}\int_{-\infty}^x y f_n(y)dy, \\
&\text{де } C_n^{(1)} = \frac{\mathsf{E}\, R_n^2 - r_n\mu_n}{\sigma_n^2},\ C_n^{(2)} = \frac{r_n - \mu_n}{\sigma_n^2}.
\end{aligned}$$

Тобто відносно міри P_n^* випадкові величини R_n^k мають щільність розподілу

$$f_n^*(x) = C_n^{(1)} f_n(x) + C_n^{(2)} x f_n(x).$$

4. Функціональна гранична теорема для ринку з дискретним часом

Доведемо функціональну граничну теорему для послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі Блека–Шоулса. Розглянемо випадковий процес з дискретним часом

$$X_n(t) = S_n^0 \prod_{k=1}^{[nt]} \frac{1 + R_n^k}{1 + r_n^k}, t_n^k \le t \le t_n^{k+1},\ 0 \le k \le n-1,$$

де $[a]$ –ціла частина числа a, $\prod_{k=1}^0 = 1$. Нехай випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняють умови леми 3.1. З метою технічного спрощення, припустимо, що $S_n^0 = 1$. Нагадаємо, що відносно мартингальної міри P_n^*, заданої співвідношеннями (3) та (10), випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ незалежні в сукупності має місце рівність $\mathsf{E}_{P_n^*} R_n^k = r_n^k$. Оскільки граничну теорему буде сформульовано в термінах цієї мартингальної міри, то ще введемо позначення $(\sigma_n^{k,*})^2 = \mathrm{Var}_{P_n^*} R_n^k$.

Теорема 4.1. *(i) Нехай випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняють умови леми 3.1, причому*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n} r_n^k = 0,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} r_n^k = rt > 0,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]}(\sigma_n^{k,*})^2 = (\sigma^*)^2 t > 0, 0 \le t \le T.$$

Тоді відносно мартингальних мір P_n^*, заданих співвідношеннями (5) та (10) має місце слабка збіжність скінченновимірних розподілів:

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \le t \le T,$$

де $W = \{W_t, 0 \le t \le T\}$ – вінерівський процес.

(ii) Нехай виконуються умови пункту (i), і крім того, існує стала $C > 0$ така, що

$$\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} r_n^k \le C(t_2 - t_1),\ \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} (\sigma_n^{k,*})^2 \le C(t_2 - t_1)$$

для всіх $0 \le t_1 \le t_2 \le T$. *Тоді відносно мартингальних мір* P_n^*, *заданих співвідношеннями* (5) *та* (10) *має місце слабка збіжність мір, що відповідають випадковим процесам* X_n:

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \le t \le T.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності і з метою технічного спрощення припустимо, що $T = 1$, а $t_n^k = \frac{k}{n}$.
(i). Доведемо слабку збіжність одновимірних розподілів, а слабка збіжність скінченновимірних розподілів, в силу незалежності випадкових величин, з використанням методу Крамера–Уолда, доводиться аналогічно. Для одновимірних розподілів має місце центральна гранична теорема. Дійсно, подамо для будь-якого фіксованого $0 \le t \le 1$ випадкову величину $\log X_n(t)$ у вигляді

$$\log X_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \Big(\log\big(1 + R_n^k\big) - \log\big(1 + r_n^k\big) \Big). \tag{15}$$

Тепер, за формулою Тейлора, для деякої сталої $c > 0$

$$\log(1 + R_n^k) = R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \alpha(R_n^k) \cdot (R_n^k)^2, \tag{16}$$

де $|\alpha(R_n^k)| \le \frac{c}{\sqrt{n}}$, а

$$\log(1 + r_n^k) = r_n^k - \frac{1}{2}(r_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2,$$

де $\big|\beta(r_n^k)\big| \le c|r_n^k|$. З урахуванням цих розкладів,

$$\log X_n(t) + \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{(\sigma_n^{k,*})^2}{2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{[nt]} \left(R_n^k - r_n^k + \frac{1}{2}(r_n^k)^2 - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_n^{k,*})^2 \right) + \sum_{k=1}^{[nt]} \left[\alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2\right]. \tag{17}$$

Тепер, позначимо

$$\eta_n^k = R_n^k - r_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{2}(r_n^k)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_n^{k,*})^2,$$
$$\overline{\eta}_n^k = \alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2.$$

При цьому

$$\left| \sum_{k=1}^{[nt]} \left[\alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2\right] \right| \le [nt] \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^3 + c \max_{1 \le k \le n} (r_n^k)^2 \sum_{k=1}^{n} r_n^k \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

м.н., тому ці величини не впливають на хід подальшого доведення. Далі,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}\, \eta_n^k = 0, \text{ а } \mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*}\, \eta_n^k = (\sigma_n^{k,*})^2 + \delta_n^k, \text{ де } |\delta_n^k| \le \frac{c}{n\sqrt{n}}.$$

Тепер з використанням умови (i), слабка збіжність $\log X_n(t)$ до $W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$ випливає з центральної граничної теореми у формі Слуцького (див. [3]).

(ii) Тепер для доведення слабкої збіжності мір достатньо довести їх слабку компактність, для чого, в свою чергу достатньо довести, що існує така стала $C > 0$, що для всіх $n \ge n_0$ і $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$ виконується співвідношення

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\log X_n(t_2) - \log X_n(t_1)\right|^2 \le C(t_2 - t_1).$$

У нашому випадку, з урахуванням оцінок (13), розкладів (15)–(17) і властивостей залишкових членів маємо

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\log X_n(t_2) - \log X_n(t_1)\right|^2 = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k + \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \overline{\eta}_n^k \right|^2$$

$$\leq 2\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k \right|^2 + C(t_2 - t_1) \left(\frac{1}{n} + \max_{1\leq k \leq n} (r_n^k)^2 \right).$$

Тому далі достатньо оцінити $a_n(t_1, t_2) := \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k \right|^2$. Але

$$a_n(t_1,t_2) \leq 2 \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left(\eta_n^k\right)^2 \leq 2 \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \left((\sigma_n^{k,*})^2 + \delta_n^k\right) \leq 2C(t_2 - t_1) + \frac{2C(t_2 - t_1)}{\sqrt{n}},$$

звідки і випливає доведення. □

5. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених незалежних випадкових величин за методом псевдомоментів

Нехай виконуються умови пункту (i) теореми 4.1. Тоді, зокрема, в момент T має місце центральна гранична теорема, а саме:

$$X_n(T) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}.$$

Ми використаємо в подальшому цей результат для оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом. Для отримання шуканої оцінки швидкості збіжності застосуємо результат із [8], що стосується швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених незалежних випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів, який сформулюємо наступним чином.

Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин з $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, $\operatorname{Var}\xi_i = 1$, функцією розподілу $F(x)$ і характеристичною функцією $f(t)$. Нехай $\Phi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу випадкової величини $S_n = n^{-1/2}\Sigma_{k=1}^n \xi_k$, а $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу стандартного нормального закону. Припустимо, що для деякого $m \geq 3$ існують псевдомоменти

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k dH(x), (k = 3, \ldots, m, m \in \mathbb{N}),$$

де $H(x) = F(x) - \Phi(x)$. Введемо величини, які будемо називати зрізаними псевдомоментами. Псевдомоменти, "зрізані зверху", визначаються формулою

$$\nu_n^{(1)}(m) = \int_{|x|\leq\sqrt{n}} |x|^{m+1} \left|dH(x)\right|,$$

а "зрізані знизу", відповідно, визначаються формулою

$$\nu_n^{(2)}(m) = \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^{m} \left|dH(x)\right|.$$

Теорема 5.1 ([8]). *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) *Характеристична функція інтегровна, тобто* $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = A < \infty$*;*

(*ii*) *Псевдомоменти до порядку* m *включно дорівнюють нулю, а зрізані псевдомоменти обмежені:*

$$\mu_k = 0,\ k = 3, \ldots, m,\ \textit{для деякого}\ m \geq 3$$

і крім того, починаючи з деякого номера $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\nu_n(m) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(m), \nu_n^{(2)}(m)\right\} < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді для всіх $n \geq n_0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq$$

$$\leq 2C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{A}{\pi}b^{n-1} + \nu_n(m)\frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n} =: \Theta_n(m),$$

де

$$C_m^{(1)} = \frac{12^{\frac{m+1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi(m+1)!},\ C_m^{(2)} = 2C_{m-1}^{(1)},$$

$$b = \exp\left\{-\frac{\pi^2}{24A^2\,(2+\pi)^2}\right\} < 1.$$

Наслідок 5.1 ([8]). *Нехай незалежні однаково розподілені випадкові величини* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *з* $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, $\operatorname{Var}\xi_i = 1$ *мають обмежену щільність розподілу,* $p(x) \leq A_1$*. Припустимо, що виконується умова* (*ii*) *теореми 5.1. Тоді для всіх* $n \geq n_0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq 2C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + 2A_1b_1^{n-2} + \nu_n(m)\frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}, \tag{18}$$

де $b_1 = \exp\left\{-\frac{1}{96A_1^2(2+\pi)^2}\right\} < 1.$

Застосуємо наслідок 5.1 до випадкових величин, що мають обмежену щільність розподілу, зосереджену на обмеженому інтервалі, і покладемо $m = 3$. Одержимо наступний результат.

Лема 5.1. *Нехай випадкові величини* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *задовольняють умови наслідку 5.1, причому їхній розподіл зосереджено на деякому інтервалі* $[a, b]$*. Нехай для всіх* $n \geq n_0$ *виконується умова* $\nu_n^{(1)}(3) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$*. Тоді для всіх* $n > \left(\frac{16e^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) \vee n_0$ *маємо оцінку*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \Delta_n\Phi := \frac{3}{\pi}\frac{e^{-3/2}}{n} + \frac{2\sqrt{3}e^{-3/2}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}} + 2A_1b_1^{n-2} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}. \tag{19}$$

Доведення. Зауважимо, що при $m = 3$

$$C_3^{(1)} = \frac{12^2\Gamma(2)}{\pi\cdot 4!} = \frac{6}{\pi},\ C_2^{(1)} = \frac{12^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi\cdot 3!} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}},\ \text{отже}\ C_3^{(2)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}.$$

Оцінимо

$$\nu_n^{(1)}(3) = \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3\,|dH(x)| \leq \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3 dF(x) + \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3 d\Phi(x).$$

Якщо $\sqrt{n} > |a| \vee |b|$, то $\int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3 dF(x) = 0$. Тепер,

$$\int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3 d\Phi(x) = 2\int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_n^{\infty} ye^{-y}dy \leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}}(n+1)e^{-n}.$$

Оскільки $e^x > \frac{x^2}{2}$, то $\frac{4}{\sqrt{2\pi}}(n+1)e^{-n} \le \frac{8e}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(n+1)} < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, якщо $n > \frac{16e^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Тобто, для $n > \left(\frac{16e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) \vee n_0$ виконується умова (ii) Теореми 5.1, отже, має місце оцінка (18), яка з урахуванням одержаних значень коефіцієнтів, перетворюється на (19). $\square$

Зауваження 5.1. Зауважимо, що асимптотично при $n \to \infty$ в правій частині (19) головну роль грає доданок $\frac{3}{\pi}\frac{e^{-3/2}}{n} = O(\frac{1}{n})$, а інші доданки мають менший порядок. Тому, з урахуванням нерівності $|\Phi(x) - \Phi(y)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|x-y|$ для подальших застосувань сформулюємо наступне твердження: нехай випадкові величини $\{\zeta_n^k, n \ge 1, 1 \le k \le n\}$ задовольняють наступну умову:

(A) $n^{-1/2}\Sigma_{k=1}^n \zeta_n^k = n^{-1/2}\Sigma_{k=1}^n \xi_n^k + \frac{C_n}{n}$, де випадкові величини ξ_n^k при кожному n задовольняють умови леми 5.1, а $|C_n| \le C$ – обмежена числова послідовність.

Тоді

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\,\mathsf{P}\{n^{-1/2}\Sigma_{k=1}^n \zeta_n^k \le x\} - \Phi(x)| \le \Delta_n^{(1)}\Phi := \frac{3}{\pi}\frac{e^{-3/2}}{n}$$
$$+ \frac{C}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{2\sqrt{3}e^{-3/2}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}} + 2A_1 b_1^{n-2} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}.$$

Тепер наведемо умови на випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$, що забезпечать виконання для цін активів на фінансових ринках з дискретним часом умови (A). Спочатку доведемо такий допоміжний результат. Через C будемо позначати сталу, що може змінюватись від рядка до рядка і чиє значення не є важливим.

Лема 5.2. *Нехай відсоткова ставка в кожній серії є рівномірною:* $r_n^k = \frac{r}{n}$. *Нехай також випадкові величини* $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ *задовольняють умови леми 3.3 і додаткову умову*

$$\left|\frac{r}{n} - \mu_n\right| \le C\sigma_n^2\,, \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3\right| \le \frac{C}{n^2},\ \text{та}\ |\,\mathsf{E}(R_n^k)^4 - \mu_n\,\mathsf{E}(R_n^k)^3| \le \frac{C}{n^2}.$$

Тоді для моменту третього порядку відносно мартингальної міри, заданої співвідношеннями (5) *та* (10), *має місце оцінка*

$$\left|E_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3\right| \le \frac{C}{n^2}.$$

Доведення. Оскільки $|\mu_n| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$, то мають місце такі співвідношення та оцінки

$$\left|E_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3\right| = \left|\mathsf{E}\left(1 + \Delta M_n^k\right)(R_n^k)^3\right| = \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3 + \frac{\frac{r}{n} - \mu_n}{\sigma_n^2}\,\mathsf{E}\left[(R_n^k)^4 - \mathsf{E}\,R_n^k\,\mathsf{E}(R_n^k)^3\right]\right|$$
$$\le \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3\right| + C|\,\mathsf{E}(R_n^k)^4 - \mu_n\,\mathsf{E}(R_n^k)^3| \le \frac{C}{n^2} + \frac{C}{n^2} \le \frac{C}{n^2}.$$

$\square$

В умовах леми 5.2 позначимо $(\sigma_n^*)^2 = \mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)$.

Теорема 5.2. *Нехай випадкові величини*

$$\xi_n^k = \sqrt{n}\left(R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{3}(R_n^k)^3 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3 - \frac{r}{n} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2} + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\right)$$

задовольняють умови леми 5.1 і виконуються умови леми 5.2, причому $|n(\sigma_n^*)^2 - (\sigma^*)^2| \le \frac{C}{n}$. *Тоді*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left\{\log X_n(T) + \frac{1}{2}n(\sigma_n^*)^2 \le x\right\} - \Phi\left(\frac{x}{\sigma^*\sqrt{T}}\right)\right| \le \frac{C}{n}.$$

Доведення. Як і в доведенні теореми 4.1, не обмежуючи загальності і з метою технічного спрощення припустимо, що $T = 1$, а $t_n^k = \frac{k}{n}$. Позначимо

$$\frac{\zeta_n^k}{\sqrt{n}} = R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{3}(R_n^k)^3 + \alpha\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)(R_n^k)^3 - \frac{r}{n} + \frac{r^2}{2n^2} + \beta\left(\frac{C}{n}\right)\frac{r^2}{n^2} + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}.$$

У випадку рівномірної відсоткової ставки дисконтований ціновий процес набуває спрощеного вигляду

$$X_n(1) = \prod_{k=1}^n \frac{1+R_n^k}{1+r_n^k} = \prod_{k=1}^n \frac{1+R_n^k}{1+\frac{r}{n}} = \Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{-n}\prod_{k=1}^n(1+R_n^k).$$

З урахуванням введеного позначення розклад Тейлора для випадкової величини $\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2}$ набуває вигляду

$$\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_n^k}{\sqrt{n}},$$

причому $\sum\limits_{k=1}^n \left|\alpha\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)\right| |R_n^k|^3 \le \frac{C}{n}$ і $\sum\limits_{k=1}^n \left|\beta\left(\frac{C}{n}\right)\right| \frac{r^2}{n^2} \le \frac{C}{n^2}$. Якщо виконуються умови леми 5.2, то розклад Тейлора набуває вигляду

$$\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_n^k}{\sqrt{n}} + S_n,$$

де $S_n \le \frac{C}{n}$. При цьому $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}\,\xi_n^k = 0$, і $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}(\xi_n^k)^2 = n(\mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k + \frac{C_n}{n^2}) = \frac{(\sigma^*)^2}{2} + \frac{C_n}{n}$, де $|C_n| \le C$. Отже, ζ_n^k задовольняють умову (A), звідки випливає доведення. □

6. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу

Розглянемо європейські опціони купівлі та продажу $C = (S_T - K)^+$ та $P = (K - S_T)^+$. Нехай вони розглядаються на фінансових ринках з дискретним часом, заданих формулами (1) і (2), причому в кожній серії $r_n^k = \frac{r}{n}$, де $r > 0$ – деяке число, випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ незалежні, однаково розподілені і задовольняють умови леми 3.3, тобто ринок є безарбітражним. Зафіксуємо мартингальну міру P_n^*, задану співвідношеннями (3) та (10), відносно якої, як було доведено в лемі 3.4, зберігається незалежність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ і $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k = \frac{r}{n}$. Позначимо

$$Q_n^k = \frac{1+R_n^k}{1+\frac{rT}{n}},\ Y_n^k = \sqrt{n}\left(\log Q_n^k + \frac{(\sigma_n^*)^2 T}{2}\right), \tag{20}$$

та $\widetilde{\Phi}_n$ функцію розподілу суми $n^{-1/2}\sum_{k=1}^n Y_n^k$. Наступний результат є очевидним наслідком теореми 5.2.

Лема 6.1. *Нехай послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняє умови теореми 5.2. Тоді*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\widetilde{\Phi}_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma^*\sqrt{T}}\right)\right| \le \frac{C}{n}. \tag{21}$$

Розглянемо опціони купівлі $\mathbb{C} = (S-K)^+$ та продажу $\mathbb{P} = (K-S)^+$ на актив S і зі страйковою ціною K. Розглянемо допграничні ринки в умовах леми 3.3 і граничний ринок Блека–Шоулса. Позначимо через

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \mathsf{E}_{P_n^*}\left(X_n(T) - K\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}\right)^+$$

дисконтовану справедливу ціну опціону купівлі в допграничній моделі відносно мартингальної міри заданої рівностями (3) та (10), і через $\pi(\mathbb{C})$ ціну Блека–Шоулса на опціон купівлі в момент T, зі страйковою ціною K, відсотковою ставкою r і дисперсією $(\sigma^*)^2$, а також через $\pi(P_n)$ та $\pi(P)$ позначимо відповідні ціни опціонів продажу.

Теорема 6.1. *Нехай послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняє умови теореми 5.2. Тоді*

$$|\pi(\mathbb{C}_n) - \pi(\mathbb{C})| + |\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})| \le \frac{C}{n}.$$

Доведення. Нехай як завжди в доведеннях, $T = 1$. Розглянемо опціон продажу, а із співвідношень паритету для допграничних і граничних опціонів

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \pi(\mathbb{P}_n) + S_n^0 - K\Big(1 + \frac{rT}{n}\Big)^{-n} \text{ та } \pi(\mathbb{C}) = \pi(\mathbb{P}) + S^0 - Ke^{-rT}$$

випливає, що для опціону купівлі оцінка міститиме аналогічну швидкість збіжності. Запишемо наступні рівності, з урахуванням позначень (20), теореми 5.2, результату інтегрування по частинах, формули Блека–Шоулса, записаної для моменту часу, що дорівнює 1, а також очевидної нерівності $\Big|e^{-r} - \big(1 + \frac{r}{n}\big)^{-n}\Big| \le \frac{C}{n}$:

$$\begin{aligned}
\Big|\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})\Big| &= \Big|\,\mathsf{E}_{P_n^*}\Big(X_n(1) - K\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{-n}\Big)^+ - \pi(\mathbb{P})\Big| \\
&= \Big|\,\mathsf{E}_{P_n^*}\Big(K\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{-n} - \prod_{1\le k\le n} Q_n^k\Big) - \pi(\mathbb{P})\Big|
\end{aligned}$$

$$= \Big|\int_0^{K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-n}} \mathsf{P}_n^*\Big\{\prod_{1\le k\le n} Q_n^k \le y\Big\}dy - \int_0^{Ke^{-r}} \Phi\Big(\frac{\log y + \frac{1}{2}(\sigma^*)^2}{\sigma^*}\Big)dy\Big|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_0^{Ke^{-r}} \Big|\,\mathsf{P}_n^*\Big\{\sum_{1\le k\le n}\Big(\log Q_n^k + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\Big) \le \log y + \frac{1}{2}n(\sigma_n^*)^2\Big\} \\
&\qquad -\Phi\Big(\frac{\log y + \frac{1}{2}(\sigma^*)^2}{\sigma^*}\Big)\Big|dy + \frac{C}{n} \le \frac{C}{n},
\end{aligned}$$

звідки і випливає доведення. □

Зауваження 6.1. Очевидно, що ключовим моментом в доведенні теореми 6.1 є оцінка (21). Тому теорема 6.1 є вірною за виконання цієї нерівності, незалежно від того чи використовується для її перевірки метод псевдомоментів який може дати таку швидкість збіжності чи інший. Але навіть за умови підвищення швидкості збіжності в оцінці (21) доведення теореми 6.1 спирається на додаткові оцінки, які мають очевидну швидкість порядку $1/n$, тому досягти підвищення швидкості збіжності цін опціонів в даній моделі здається неможливим.

7. Приклад

Наведемо приклад функції розподілу, яка задовольняє умови наслідку 5.1. Нехай $a > 0$, $\theta > 1$, і будемо вважати, що a фіксоване, а $\theta > 1$ ще треба визначити. Розглянемо симетричну функцію розподілу $F(x)$, яка для $x \ge 0$ дорівнює

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{якщо } x \in [0, a]; \\ \Phi(a) + \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a}(x - a), & \text{якщо } a < x \le \theta a; \\ 1, & \text{якщо } x > \theta a. \end{cases}$$

Очевидно, що відповідна щільність обмежена. Оскільки функція $F(x)$ симетрична, то $\mu_1 = 0$ і $\mu_3 = 0$. Знайдемо μ_2. Для цього розглянемо величину

$$\widetilde{\sigma}^2 = \int_{-a}^{a} x^2 d\Phi(x) + \int_{a<|x|\le a\theta} x^2 \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a} dx = 1 - 2\left(\int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^{a\theta}\right)$$
$$= 1 - 2\left(\int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - (1-\Phi(a))\frac{a^2}{3}(\theta^2+\theta+1)\right).$$

Очевидно, що $\int_a^\infty x^2 d\Phi(x) \ge a^2(1-\Phi(a))$. Покладемо $\gamma := \frac{\int_a^\infty x^2 d\Phi(x)}{a^2(1-\Phi(a))} > 1$. Звідси випливає, що існує $\theta > 1$ таке, що $\frac{1}{3}(\theta^2+\theta+1) = \gamma$, звідки знаходимо, що шукане θ дорівнює

$$\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{3\gamma - \frac{3}{4}}.$$

При цьому значенні θ

$$\int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - (1-\Phi(a))\frac{a^2}{3}(\theta^2+\theta+1) = 0,$$

тому $\widetilde{\sigma}^2 = 1$, а це в свою чергу значить, що $\mu_2 = 0$. Дослідимо поведінку γ як функції від a. Для цього введемо позначення

$$y = \int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - a^2(1-\Phi(a)),\ y \ge 0.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = -a^2\varphi(a) - 2a(1-\Phi(a)) + a^2\varphi(a) = -2a(1-\Phi(a)) < 0,$$

де $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – щільність стандартного нормального розподілу. Отже, y спадаючи прямує до 0 при $a \to \infty$.

Більше того, застосовуючи правило Лопіталя, знайдемо наступну границю

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\int_a^\infty x^2 d\Phi(x)}{a^2(1-\Phi(a))} = \lim_{a\to\infty} \frac{-a^2\varphi(a)}{2a(1-\Phi(a)) - a^2\varphi(a)} = 1,$$

оскільки

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a(1-\Phi(a))}{a^2\varphi(a)} = \lim_{a\to\infty} \frac{(1-\Phi(a))}{a\varphi(a)} = \lim_{a\to\infty} \frac{-\varphi(a)}{\varphi(a) + a\varphi'(a)} = \lim_{a\to\infty} \frac{-e^{-\frac{a^2}{2}}}{e^{-\frac{a^2}{2}} - a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}} = 0.$$

Отже, $\gamma \to 1$ при $a \to \infty$, тому $\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{3\gamma - \frac{3}{4}} \to 1$ при $a \to \infty$.

Розглянемо псевдомоменти

$$\nu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 d\,|F(x) - \Phi(x)| = 2\int_0^\infty x^4 d\,|F(x) - \Phi(x)|$$
$$= 2\int_a^{a\theta} x^4 \left|\frac{1-\Phi(a)}{a(\theta-1)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right| dx + 2\int_{a\theta}^\infty x^4 d\Phi(x)$$
$$\le \frac{2}{5}\frac{1-\Phi(a)}{a(\theta-1)} a^5(\theta^5 - 1) + 2\int_a^\infty x^4 d\Phi(x) + \frac{2}{5}\varphi(a) a^5(\theta^5-1).$$

Отже, $\nu_4 \to 0$ при $a \to \infty$. Тим більше, для будь-якого $n \ge 1$

$$\nu_n^{(1)}(3, a) := \int_{|x|\le\sqrt{n}} x^4\,|d\,(F(x) - \Phi(x))| \to 0,\ a \to \infty.$$

Тому можна вибрати $a_0 > 0$ таким чином, щоб для всіх $n \ge 1$ виконувалась нерівність $\nu_n^{(1)}(3, a_0) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. Очевидно, що

$$\nu_n^{(2)}(3, a_0) := \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3\,|d\,(F(x) - \Phi(x))| \to 0,\ n \to \infty.$$

З наведеного вище випливає, що $\nu_n(3,a_0) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(3,a_0), \nu_n^{(2)}(3,a_0)\right\} < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, отже, виконана умова (ii) теореми 5.1, а в силу обмеженості щільності, функція розподілу $F(x)$ задовольняє умови наслідку 5.1 при $m=3$ і $n \geq n_0$.

Література

1. M. Broadie, O. Glasserman, and S. J. Kou, *Connecting discrete continuous path-dependent options*, Finance Stochast. **3**, (1999), no. 1, 55–82.
2. L.-B. Chang and K. Palmer, *Smooth convergence in the binomial model*, Finance Stochast. **11**, (2007), no. 1, 91–105.
3. H. Follmer and A. Schied, *Stochastic finance. An introduction in discrete time*, Second revised and extended edition, Studies in Mathematics, vol. 27, Walter de Gruyter, 2004.
4. S. Heston and G. Zhou, *On the rate of convergence of discrete-time contingent claims*, Math. Finance **10**, (2000), no. 1, 53–75.
5. Yu. Mishura, *The rate of convergence of option prices on the asset following geometric Ornstein–Uhlenbeck process*, Lithuanian Mathematical Journal **55**, (2015), no. 1, 134–149.
6. Yu. Mishura, *The rate of convergence of option prices when general martingale discrete-time scheme approximated the Black-Scholes model*, Advances in Mathematics of Finance, Banach Center Зublication **104**, (2015), 151–165.
7. Yu. Mishura, *Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to the Ornstein-Uhlenbeck process*, Opuscula Mathematica. **35**, (2015), no. 1, 99–116.
8. Yu. Mishura, Ye. Munchak, and P. Slyusarchuk, *The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments*, Modern Stochastics: Theory and Applications, (2015). (DOI: 10.15559/15-VMSTA23)
9. J.-L. Prigent, *Weak Convergence of Financial Markets*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 2003.
10. J. B. Walsh, *The rate of convergence of the binomial tree scheme*, Finance Stochast. **7**, (2003), no. 3, 337–361.
11. J. B. Walsh and O. D. Walsh, *Embedding and the convergence of the binomial and trinomial tree schemes*, Numerical Methods and Stochastics (T. J. Lyons and T. S. Salisbury, eds.), Fields Institute Communications **34**, (2002), 101–123.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: yevheniamunchak@gmail.com

Надійшла 06/05/2015