Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 137–150

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 137–150

ВИРОДЖЕНА АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ У МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ КОНІЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ. I

УДК 519.21

С. В. ШКЛЯР

Анотація. Розглянуто задачу оцінювання параметрів кривої другого порядку. Вважаємо, що на такій кривій лежать невипадкові "істинні" точки. Ці точки спостерігаються з адитивними похибками, що незалежні між собою та мають двовимірний нормальний розподіл $N(0,\sigma^2 I)$ з невідомим σ^2. Вивчаються асимптотичні властивості оцінки параметрів кривої, наведеної в статті Kukush et al. (Computational Statistics and Data Analysis **47** (2004), 123–147). Знайдено достатні умови виродженої асимптотичної нормальності цієї оцінки (через те, що за параметричну множину беремо одиничну сферу в евклідовому просторі, асимптотична коваріаційна матриця оцінки виявляється виродженою та має дефект 1).

Abstract. Conic section fitting problem is considered. True points are assumed to lie on a conic section. The points are observed with additive errors, which are independent and have bivariate normal distribution $N(0,\sigma^2 I)$, with unknown σ^2. We study asymptotic properties of the estimator of conic section parameters introduced in Kukush et al., Computational Statistics and Data Analysis **47** (2004), 123–147. The conditions for singular asymptotic normality of the estimator are provided. (The asymptotic covariance matrix is singular and has defect 1 because the unit sphere in Euclidean space is taken for a parameter space.)

Аннотация. Рассмотрена задача оценивания параметров кривой второго порядка. Считаем, что на такой кривой лежат истинные точки. Эти точки наблюдаются с аддитивными ошибками, которые независимы и имеют двумерное нормальное распределение $N(0,\sigma^2 I)$ с неизвестным σ^2. Изучаются асимптотические свойства оценки параметров кривой из статьи Kukush et al. (Computational Statistics and Data Analysis **47** (2004), 123–147). Найдены достаточные условия вырожденной асимптотической нормальности этой оценки (так как в качестве параметрического множества берётся единичная сфера в евклидовом пространстве, асимптотическая кавариационная матрица вырождена, а ее дефект равен 1).

1. Статистична модель

Розглядається задача оцінювання параметрів конічного перерізу за збуреними спостереженнями точок, які лежать на цьому перерізі. Конічний переріз — це крива на площині, задана рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Вимагаємо, щоб хоча б один із коефіцієнтів A, B або C був ненульовим.

Вважаємо, що істинні точки (ξ_k, η_k) лежать на конічному перерізі, тобто

$$A\xi_k^2 + 2B\xi_k\eta_k + C\eta_k^2 + 2D\xi_k + 2E\eta_k + F = 0, \qquad k \ge 1. \tag{2}$$

Ці точки спостерігаються з похибками $(\delta_k, \varepsilon_k)$, тобто спостереженнями є (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, де

$$x_k = \xi_k + \delta_k, \qquad y_k = \eta_k + \varepsilon_k, \qquad k \ge 1.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 65D10; Secondary 62F12.

Ключові слова і фрази. Похибки в змінних, асимптотична нормальність, оцінювання параметрів конічного перерізу.

Вважаємо, що вектор $(\delta_k, \varepsilon_k)$ має двовимірний нормальний розподіл $N(0, \sigma^2 I)$ з нульовим середнім та коваріаційною матрицею, пропорційною одиничній. За спостереженнями (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, оцінюємо коефіцієнти A, B, … , F рівняння (1).

У статті [6] встановлено достатні умови сильної консистентності оцінки ALS2, яку ми продовжимо вивчати в даній роботі. Розгорнемо коефіцієнти рівняння (1) в один вектор:

$$\beta = (A,\, 2B,\, C,\, 2D,\, 2E,\, F)^\top .$$

Цей вектор визначається з точністю до скалярного множника, і тому модель не є ідентифіковною. Для часткового усунення неідентифіковності вимагатимемо $\|\beta\| = 1$, де $\|\beta\|$ позначає норму вектора β в евклідовому просторі. При такому нормуванні вектор β визначений з точністю до знаку. Під сильною консистентністю оцінки $\hat\beta_n$ розуміємо збіжність

$$\min\bigl(\|\hat\beta_n - \beta\|, \|\hat\beta_n + \beta\|\bigr) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

майже напевно.

2. Оцінка ALS2

Позначення 1. Набір власних чисел (з урахуванням кратності) дійсної симетричної матриці M розміру $n \times n$, впорядкований за зростанням, позначатимемо $(\lambda_{\min,1}(M),\ \lambda_{\min,2}(M),\ \ldots,\ \lambda_{\min,n}(M))$,

$$\lambda_{\min,1}(M) \le \lambda_{\min,2}(M) \le \ldots \le \lambda_{\min,n}(M).$$

Найменше власне число позначено $\lambda_{\min}(M) = \lambda_{\min,1}(M)$. Найбільше власне число дорівнює $\lambda_{\max}(M) = \lambda_{\min,n}(M)$.

Означимо матрицю $\psi(x, y, \sigma^2)$ розміру 6×6 наступним чином. При $\sigma^2 = 0$ покладемо

$$\psi(x, y, 0) = \left(x^2, xy, y^2, x, y, 1\right)^\top \left(x^2, xy, y^2, x, y, 1\right).$$

При $\sigma^2 > 0$ означимо $\psi(x, y, \sigma^2)$ як розв'язок функціонального рівняння

$$\mathsf{E}_{(\delta,\varepsilon)^\top \sim N(0,\sigma^2 I)}\, \psi\left(\xi + \delta, \eta + \varepsilon, \sigma^2\right) = \psi(\xi, \eta, 0). \tag{4}$$

Тут при обчисленні математичного сподівання вважаємо, що ξ та η є невипадковими числами, δ та ε є незалежними випадковими змінними, що мають однаковий розподіл $N(0, \sigma^2)$.

Матричнозначна функція $\psi(x, y, \sigma^2)$ подається у вигляді симетричної матриці, складеної з многочленів:

$$\psi\left(x, y, \sigma^2\right) = \begin{pmatrix} x^4 - 6x^2\sigma^2 + 3\sigma^4 & \left(x^3 - 3x\sigma^2\right) y & \left(x^2 - \sigma^2\right)\left(y^2 - \sigma^2\right) & * & * & * \\ \left(x^3 - 3x\sigma^2\right) y & \left(x^2 - \sigma^2\right)\left(y^2 - \sigma^2\right) & x\left(y^3 - 3y\sigma^2\right) & * & * & * \\ \left(x^2 - \sigma^2\right)\left(y^2 - \sigma^2\right) & x\left(y^3 - 3y\sigma^2\right) & y^4 - 6y^2\sigma^2 + 3\sigma^4 & * & * & * \\ x^3 - 3x\sigma^2 & \left(x^2 - \sigma^2\right) y & x\left(y^2 - \sigma^2\right) & x^2 - \sigma^2 & xy & x \\ \left(x^2 - \sigma^2\right) y & x\left(y^2 - \sigma^2\right) & y^3 - 3y\sigma^2 & xy & y^2 - \sigma^2 & y \\ x^2 - \sigma^2 & xy & y^2 - \sigma^2 & x & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця симетрична, то окремі наддіагональні елементи позначено зірочками. Надалі симетричні матриці будемо записувати подібним чином.

Спочатку побудуємо оцінку параметра σ^2. Для фіксованого n позначимо

$$\Psi(v) = \sum_{k=1}^{n} \psi(x_i, y_i, v), \qquad v \ge 0.$$

Рівняння для оцінки параметра σ^2 можна записати кількома схожими способами. Можна шукати $\hat\sigma^2$ як розв'язок рівняння

$$\lambda_{\min}\left(\Psi\left(\hat\sigma^2\right)\right) = 0. \tag{5}$$

Можна також шукати $\hat\sigma^2$ як найменший невід'ємний розв'язок рівняння

$$\det\left(\Psi\left(\hat\sigma^2\right)\right) = 0. \tag{6}$$

При $n \ge 6$ майже напевно матриця $\Psi(0)$ невироджена. У випадку, коли матриця $\Psi(0)$ невироджена, рівняння (5) має рівно один розв'язок, цей розв'язок додатний і є найменшим невід'ємним розв'язком рівняння (6).

Матриця $\Psi(\hat\sigma^2)$ виявляється виродженою. Означимо оцінку вектора β як довільний нормований вектор $\hat\beta \in \mathbb{R}^6$, $\|\hat\beta\| = 1$, такий що $\Psi(\hat\sigma^2)\hat\beta = 0$. Для того, щоб вектор $\hat\beta$ був статистичною оцінкою, потрібно ще накласти умову, щоб $\hat\beta$ був борелевою функцією від спостережень (x_1, y_1), …, (x_n, y_n). За теоремою про вимірний вибір [5] така оцінка існує.

Оцінка ALS2 запропонована в статті [2]. Алгоритм її обчислення наведений в [4].

3. Умови консистентності

Достатні умови консистентності в загальнішій моделі (а саме — моделі оцінювання параметрів поверхні, заданої одним рівнянням другого порядку, у просторі довільної розмірності) наведені в статті [6]. Для нашого випадку оцінювання параметрів конічного перерізу на площині ці умови наведені в наступній теоремі

Теорема 1 ([6]). *Нехай розташування істинних точок задовольняє умови:*

(iii) *Для матриці*

$$\overline{\Psi}_n = \sum_{k=1}^n \psi(\xi_k, \eta_k, 0) = \sum_{k=1}^n \left(\xi_k^2, \xi_k\eta_k, \eta_k^2, \xi_k, \eta_k, 1\right)^\top \left(\xi_k^2, \xi_k\eta_k, \eta_k^2, \xi_k, \eta_k, 1\right)$$

має місце співвідношення

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_{\min,2}(\Psi_n) > 0.$$

Вимагаємо, щоб виконувалась умова

(iv) *існують $C_1 > 0$ та $\gamma \in [0, 1)$, такі що при всіх $n \ge 1$*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\xi_k^6 + \eta_k^6\right) < C_1 n^\gamma$$

або щоб виконувалась більш загальна умова

(iv-) $$\sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k^6 + \eta_k^6}{k^2} < \infty.$$

Чи потрібна умова (vi)*, залежить від істинних значень параметрів. Вимагаємо виконання хоча б однієї з умов:*

(v) *$AC \ne B^2$, тобто істинний конічний переріз не є ані параболою, ані парою паралельних прямих,*

або

(vi) *послідовність $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\xi_k^2 + \eta_k^2), n \ge 1\right\}$ обмежена.*

При виконанні умови (iii)*, а також умови* (iv) *або* (iv-) *оцінка параметра* σ^2*, наведена в розділі 2, сильно консистентна, тобто* $\lim_{n\to\infty} \hat\sigma^2 = \sigma^2$ *майже напевно.*

При виконанні умови (iii)*, принаймні одної з умов* (iv) *або* (iv-) *та хоча б одної з умов* (v) *або* (vi) *оцінка параметра* β*, наведена в розділі 2, сильно консистентна в сенсі збіжності* (3) *майже напевно.*

Нумерація умов відповідає статті [6]. В теоремі 1 сформульовані основні результати цієї статті (у [6] вони наведені в теоремі 17, наслідку 18 і теоремі 21).

4. Умови виродженої асимптотичної нормальності оцінки

Наведемо достатні умови того, що оцінка є $\sqrt{n}$-консистентною та розподіл $\sqrt{n}(\hat\beta - \beta)$ прямує до виродженого нормального.

Для оцінки $\hat\beta$ параметра β покладемо

$$\hat\beta^* = \begin{cases} \hat\beta, & \text{якщо } \beta^\top \hat\beta \ge 0; \\ -\hat\beta, & \text{якщо } \beta^\top \hat\beta < 0. \end{cases}$$

Таким чином, $\hat\beta^* = \pm\hat\beta$, де знак вибирається так, щоб вектори $\hat\beta^*$ та β утворювали гострий або прямий кут. Вектор $\hat\beta^*$ є “нечесною” оцінкою параметра β, тобто при фіксованому β вектор $\hat\beta^*$ є борелевою функцією від спостережень, але при різних β ця функція різна.

Теорема 2. *Нехай істинні точки задовольняють умови*

(1) *При* $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j \le 6$ *має місце збіжність до скінченних границь*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \to \mu_{i,j}, \qquad n \to \infty.$$

(2) *Симетрична матриця*

$$\overline{\Psi}_\infty := \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \mu_{4,0} & \mu_{3,1} & \mu_{2,2} & \mu_{3,0} & \mu_{2,1} & \mu_{2,0} \\ \mu_{3,1} & \mu_{2,2} & \mu_{1,3} & \mu_{2,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,1} \\ \mu_{2,2} & \mu_{1,3} & \mu_{0,4} & \mu_{1,2} & \mu_{0,3} & \mu_{0,2} \\ \hline \mu_{3,0} & \mu_{2,1} & \mu_{1,2} & \mu_{2,0} & \mu_{1,1} & \mu_{1,0} \\ \mu_{2,1} & \mu_{1,2} & \mu_{0,3} & \mu_{1,1} & \mu_{0,2} & \mu_{0,1} \\ \hline \mu_{2,0} & \mu_{1,1} & \mu_{0,2} & \mu_{1,0} & \mu_{0,1} & 1 \end{array}\right)$$

має ранг 5.

Тоді “нечесна” оцінка параметра β *та оцінка параметра* σ^2 *задовольняють співвідношення*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat\beta^* - \beta \\ \hat\sigma^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, \Sigma), \tag{7}$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty\beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top\overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \tag{8}$$

Σ_6 — *матриця, елементами якої є многочлени від* $\mu_{i,j}$*,* $i + j \le 6$*, та від істинних параметрів* A*,* B*, … ,* F*,* σ^2*; матриця* $\overline{\Psi}'_\infty$ *симетрична та дорівнює*

$$\overline{\Psi}'_\infty = \begin{pmatrix} -6\mu_{2,0} & -3\mu_{1,1} & -\mu_{2,0} - \mu_{0,2} & * & * & * \\ -3\mu_{1,1} & -\mu_{2,0} - \mu_{0,2} & -3\mu_{1,1} & * & * & * \\ -\mu_{2,0} - \mu_{0,2} & -3\mu_{1,1} & -6\mu_{0,2} & * & * & * \\ -3\mu_{1,0} & -\mu_{0,1} & -\mu_{1,0} & -1 & 0 & 0 \\ -\mu_{0,1} & -\mu_{1,0} & -3\mu_{0,1} & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *За умов теореми 2 оцінка $\hat\beta$ сильно консистентна в сенсі* (3)*. "Нечесна" оцінка $\hat\beta^*$ та оцінка $\hat\sigma^2$ сильно консистентні в звичайному сенсі, тобто $\hat\beta^* \to \beta$ та $\hat\sigma^2 \to \sigma^2$ при $n \to \infty$ майже напевно.*

Доведення. Ми перевіримо умови (iii), (iv) та (vi) теореми 1. З умови 1 теореми 2 випливає

$$\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n \to \overline{\Psi}_\infty, \qquad n \to \infty. \tag{9}$$

Матриці $\overline{\Psi}_n$ невід'ємно визначені, тому границя $\overline{\Psi}_n$ також невід'ємно визначена. Тому з умови $\operatorname{rank}\overline{\Psi}_\infty = 5$ випливає, що матриця $\overline{\Psi}_\infty$ має власне число 0 кратності 1; інші власні числа додатні та мають сумарну кратність 5. Тобто маємо $\lambda_{\min,2}(\overline{\Psi}_\infty) > 0$.

За теоремою про стійкість власних чисел (див. [7], наслідок IV.4.10)

$$\frac{1}{n}\lambda_{\min,2}(\overline{\Psi}_n) = \lambda_{\min,2}\left(\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n\right) \to \lambda_{\min,2}(\overline{\Psi}_\infty) > 0, \qquad n \to \infty,$$

звідки випливає умова (iii) теореми 1.

Також згідно з умовою 1 теореми 2 послідовності $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^6,\ n \ge 1\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta_k^6,\ n \ge 1\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^2,\ n \ge 1\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta_k^2,\ n \ge 1\right\}$ збіжні, тому ці послідовності обмежені, і тому умови (iv) (з $\gamma = 0$) та (vi) теореми 1 виконуються.

Вектор $\hat\beta^*$ вибрано так, що

$$\left\|\hat\beta^* - \beta\right\| = \min\bigl(\|\hat\beta - \beta\|,\ \|\hat\beta + \beta\|\bigr).$$

Тому за теоремою 1 отримуємо

$$\|\hat\beta_n^* - \beta\| \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{10}$$

$$\hat\sigma_n^2 \to \sigma^2, \qquad n \to \infty \tag{11}$$

майже напевно. □

Доведення теореми 2. Ми скористаємось лемою зі статті [3]. Умови цієї леми достатньо перевіряти лише при істинному значенні параметра. Тому ця лема справедлива і для "нечесних" оцінок. Оцінки $(\hat\beta_n, \hat\sigma^2)$ та $(\hat\beta_n^*, \hat\sigma^2)$ є точками, у яких випадкова функція

$$G_n(b, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\Psi_n b \\ b^\top b - 1 \end{pmatrix}$$

зі значеннями в $\mathbb{R}^7$ дорівнює 0.

Перевіримо умови a), …, d), f) леми зі статті [3]. Умову e) перевіряти не потрібно.

a). "Нечесна" оцінка $\hat\beta^*$ та оцінка $\hat\sigma^2$ є консистентними за теоремою 3.

b). Елементи функції $G_n(b, v)$ є многочленами від v та координат b (коефіцієнти многочленів випадкові та є многочленами від координат спостережених точок). Тому випадкова функція $G_n(b, v)$ неперервно диференційовна.

c). Доведемо збіжність до виродженого нормального розподілу

$$\sqrt{n}G_n(\beta, \sigma^2) \xrightarrow{\mathsf{d}} N\left(0, \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \qquad n \to \infty \tag{12}$$

для якоїсь матриці Σ_6.

Тут β та σ^2 — істинні значення параметрів. Оскільки $\|\beta\| = 1$, то останній елемент випадкового вектора $G_n(\beta, \sigma^2)$ невипадковий та дорівнює 0. Тому досить показати збіжність

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Psi_n\beta \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, \Sigma_6), \qquad n \to \infty. \tag{13}$$

Для цього ми скористаємось центральною граничною теоремою в схемі серій.

Спочатку зробимо деякі перетворення. Матриця $\psi(\xi+\delta,\eta+\varepsilon,\sigma^2)$ складається з многочленів від ξ, δ, η, ε, σ від 0-го до 4-го степеня. Якщо елементи матриці $\psi(\xi+\delta, \eta+\varepsilon,\sigma^2)$ розглядати як многочлени від ξ та η, з коефіцієнтами, які є многочленами від δ, ε та σ, то коефіцієнти перед ξ^4, $\xi^3\eta$, $\xi^2\eta^2$, $\xi\eta^3$ та η^4 будуть константами-многочленами, тобто не будуть залежати від δ, ε та σ. Тому різниця матриць $\psi(\xi+\delta, \eta+\varepsilon,\ \sigma^2)-\psi(\xi,\varepsilon,0)$ складається з многочленів від ξ, δ, η, ε, σ до 4 степеня, в якому змінні ξ та η зустрічаються сумарно не більше як у 3 степені. Тобто якщо елементи матриці $\psi(\xi+\delta,\ \eta+\varepsilon,\ \sigma^2)-\psi(\xi,\varepsilon,0)$ розглядати як многочлени від ξ та η, то ці многочлени будуть до 3 степеня. Вектор $(\psi(\xi+\delta,\ \eta+\varepsilon,\ \sigma^2)-\psi(\xi,\varepsilon,0))\beta$, де $\beta\in\mathbb{R}^6$, можна подати у вигляді

$$\left(\psi\left(\xi+\delta,\eta+\varepsilon,\sigma^2\right)-\psi(\xi,\varepsilon,0)\right)\beta=P_{\beta,\sigma^2}(\xi,\eta)\begin{pmatrix}\delta^4\\ \delta^3\varepsilon\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

де $P_{\beta,\sigma^2}(\xi,\varepsilon)$ — матриця розміру 6×15, складена з многочленів від ξ та η до третього степеня з коефіцієнтами, що залежать від σ^2 та елементів вектора β,

$(\delta^4,\delta^3\varepsilon,\dots,1)^\top=(\delta^4,\delta^3\varepsilon,\delta^2\varepsilon^2,\delta\varepsilon^3,\varepsilon^4,\delta^3,\delta^2\varepsilon,\delta\varepsilon^2,\varepsilon^3,\delta^2,\delta\varepsilon,\varepsilon^2,\delta,\varepsilon,1)^\top$ — 15-вимірний вектор, складений з усіх одночленів від δ та ε до 4 степеня з коефіцієнтом 1.

Зафіксуємо σ^2 та $\beta=(A,2B,C,2D,2E,F)^\top$ — тепер це істинні значення параметрів. Тоді

$$\psi(\xi_k,\eta_k,0)\beta=\begin{pmatrix}\xi_k^2\\ \xi_k\eta_k\\ \eta_k^2\\ \xi_k\\ \eta_k\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_k^2\\ \xi_k\eta_k\\ \eta_k^2\\ \xi_k\\ \eta_k\\ 1\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}A\\ 2B\\ C\\ 2D\\ 2E\\ F\end{pmatrix}=0 \tag{14}$$

внаслідок рівності (2).

Перевіримо умови центральної граничної теореми. За умови незалежності похибок в різних спостереженнях, доданки суми $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\psi(x_k,y_k,\sigma^2)\beta$ незалежні в сукупності. Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathsf{E}\,\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)\beta=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathsf{E}\,\psi\left(\xi_k+\delta_k,\eta_k+\varepsilon_k,\sigma^2\right)\beta=\frac{1}{\sqrt{n}}\psi(\xi_k,\eta_k,0)\beta=0$$

згідно з означенням (4) та рівністю (14).

Коваріаційна матриця

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\,\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)\beta\beta^\top\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)\\ &\quad=\mathsf{E}\left[\left(\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)-\psi\left(\xi_k,\eta_k,\sigma^2\right)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)-\psi\left(\xi_k,\eta_k,\sigma^2\right)\right)\right]\\ &\quad=P_{\beta,\sigma^2}(\xi_k,\eta_k)\,\mathsf{E}\left[\begin{pmatrix}\xi_k^4\\ \xi_k^3\eta_k\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_k^4\\ \xi_k^3\eta_k\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}^\top\right]P_{\beta,\sigma^2}(\xi_k,\eta_k)^\top\end{aligned}$$

складається з многочленів від ξ_i та η_i до 6 степеня. За першою умовою теореми 2

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\mathsf{E}\left[\psi\left(x_i,y_i,\sigma^2\right)\beta\beta^\top\psi\left(x_i,y_i,\sigma^2\right)\right]\to\Sigma_6, \tag{15}$$

де Σ_6 — деяка симетрична матриця, елементи якої залежать від істинних значень параметрів β та σ^2 та границь $\mu_{i,j}$, $i+j\le6$.

Перевіримо умову Ляпунова. Нагадаємо, що елементи матриці $\psi(\xi{+}\delta,\ \eta{+}\varepsilon,\ \sigma^2)-\psi(\xi,\eta,0)$ є многочлени, усі одночлени яких мають вигляд

$$\mathrm{coef}\cdot\xi^i\eta^j\delta^p\eta^q\sigma^{2r},\qquad i+j+p+q+2r\le4,\quad i+j\le3.$$

Тому для норми матриці справедлива оцінка

$$\left\|\psi\left(\xi{+}\delta,\eta{+}\varepsilon,\sigma^2\right)-\psi(\xi,\eta,0)\right\|\le\mathrm{const}\cdot\left(|\xi|^3+|\eta|^3+1\right)\left(\delta^4+\varepsilon^4+\sigma^4+1\right).$$

Далі,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left\|\left(\psi\left(\xi+\delta,\eta+\varepsilon,\sigma^2\right)-\psi(\xi,\eta,0)\right)\beta\right\|^4 &\le \mathrm{const}^4\cdot\left(|\xi|^3+|\eta|^3+1\right)^4\mathsf{E}\left(\delta^4+\varepsilon^4+\sigma^4+1\right)^4 \\ &\le \mathrm{const}\left(\sigma^2\right)\left(\xi^6+\eta^6+1\right)^2, \end{aligned}$$

де $\mathrm{const}(\sigma^2)$ — многочлен від σ 16-го степеня.

Зі збіжності

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^6+\eta_k^6+1\right)\to\mu_{6,0}+\mu_{0,6}+1, \qquad n\to\infty$$

випливають збіжності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\xi_n^6+\eta_n^6+1\right)}{n}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{k=1,\ldots,n}\left(\xi_k^6+\eta_k^6+1\right)=0.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathsf{E}\left\|\left(\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)-\psi(\xi_k,\eta_k,0)\right)\beta\right\|^4}{n^2}\le\mathrm{const}(\sigma)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\xi_k^6+\eta_k^6+1\right)^2}{n^2}$$
$$\le\mathrm{const}(\sigma)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^6+\eta_k^6+1\right)\right)\left(\frac{1}{n}\max_{k=1,\ldots,n}\left(\xi_k^6+\eta_k^6+1\right)\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathsf{E}\left\|\left(\psi\left(x_k,y_k,\sigma^2\right)-\psi(\xi_k,\eta_k,0)\right)\beta\right\|^4}{n^2}=0.$$

Отже, умова Ляпунова виконується.

Згідно з центральною граничною теоремою для векторів має місце збіжність (13), а з нею і збіжність (12).

d). Матриця-похідна векторної функції $G_n(b,v)$ має вигляд

$$G_n'(b,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial G_n(b,v)}{\partial b^\top} & \frac{\partial G_n(b,v)}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\Psi(v) & \frac{1}{n}\Psi'(v)b\\ b^\top & 0\end{pmatrix}.$$

Тут $\Psi'(v)$ позначає похідну матричнозначної функції $\Psi(v)$. Ця похідна дорівнює

$$\Psi'(v)=\sum_{k=1}^{n}\psi_v'(x_i,y_i,v),$$

де

$$\psi_v'(x,y,v)=\frac{\partial}{\partial v}\psi(x,y,v).$$

Явний вигляд матриці $\psi_v'(x,y,v)$ визначається формулою

$$\psi_v'\left(x,y,\sigma^2\right)=-\begin{pmatrix}6\left(x^2-\sigma^2\right) & 3xy & x^2+y^2-2\sigma^2 & * & * & *\\ 3xy & x^2+y^2-2\sigma^2 & 3xy & * & * & *\\ x^2+y^2-2\sigma^2 & 3xy & 6\left(y^2-\sigma^2\right) & * & * & *\\ 3x & y & x & 1 & 0 & 0\\ y & x & 3y & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Нам потрібно в точці істинних значень параметрів (тобто при $b=\beta$ та $v=\sigma^2$) довести збіжність

$$G_n'(\beta,\sigma^2)\xrightarrow{\mathsf{P}}\begin{pmatrix}\overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty\beta\\ \beta^\top & 0\end{pmatrix}:=V_1 \tag{16}$$

та перевірити, що гранична матриця V_1 є невиродженою. Насправді за умов теореми має місце збіжність майже напевно.

Матриця $\Psi(\sigma^2)$ є матрицею оператора Ψ_{als} зі статті [6], матриця $\overline{\Psi}_n$ є матрицею оператора $\overline{\Psi}_{\mathrm{ols}}$ у цій самій системі координат. Згідно з лемою 7 з [6]

$$\frac{1}{n}(\Psi_{\mathrm{als}} - \overline{\Psi}_{\mathrm{ols}}) \to 0, \qquad n \to \infty$$

майже напевно, і тому

$$\frac{1}{n}\left(\Psi\left(\sigma^2\right) - \overline{\Psi}_n\right) \to 0 \tag{17}$$

майже напевно. Зі збіжностей (9) та (17) випливає

$$\frac{1}{n}\Psi\left(\sigma^2\right) \to \overline{\Psi}_\infty \qquad \text{м.н.} \tag{18}$$

Введемо лінійний оператор $\mathsf{A} \in L(\mathbb{R}^{6\times 6})$ на просторі матриць розміру 6×6 за формулою

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6a & 3b & a+c & 3d & e & f \\ 3b & a+c & 3b & e & d & 0 \\ a+c & 3b & 6c & d & 3e & f \\ 3d & e & d & f & 0 & 0 \\ e & d & 3e & 0 & f & 0 \\ f & 0 & f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зірочки в лівій частині означають, що $\mathsf{A}(M)$ залежить лише від нижнього рядка матриці M. Безпосередньо перевіряються рівності $\mathsf{A}(\overline{\Psi}_\infty) = \overline{\Psi}'_\infty$ та $\mathsf{A}(\psi(x,y,v)) = \psi'_v(x,y,v)$. Зі збіжностей (18) та (9) випливають збіжності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Psi'(\sigma) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{A}\left(\Psi\left(\sigma^2\right)\right) = \mathsf{A}(\overline{\Psi}_\infty) = \overline{\Psi}'_\infty \qquad \text{м.н.}, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\overline{\Psi}'_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{A}(\Psi_n) = \mathsf{A}(\overline{\Psi}_\infty) = \overline{\Psi}'_\infty, \tag{20}$$

де $\overline{\Psi}'_n = \sum_{k=1}^n \psi'_v(\xi_k,\eta_k,0)$.

Враховуючи (18) та (19), отримаємо, що майже напевно

$$G'_n(\beta,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\Psi\left(\sigma^2\right) & \frac{1}{n}\Psi'\left(\sigma^2\right)\beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty\beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix} = V_1, \qquad n\to\infty.$$

Перевіримо невиродженість граничної матриці V_1. Спочатку доведемо нерівність $\beta^\top\overline{\Psi}'_\infty\beta \neq 0$. Для цього використаємо лему 5 зі статті [6]. Квадратична форма $b^\top\overline{\Psi}'_n b$ у [6] позначена так: $-\bar{Q}_{10}(b)$. Згідно з лемою 5 з [6] $\beta^\top\overline{\Psi}'_n\beta \le -n\varepsilon_0(A^2+2B^2+C^2)^2$ для якогось фіксованого $\varepsilon_0 > 0$ та для всіх достатньо великих n. Зробимо граничний перехід згідно із (20). Отримаємо нерівність

$$\beta^\top\overline{\Psi}'_\infty\beta \le -\varepsilon_0\left(A^2+2B^2+C^2\right)^2 < 0.$$

Для того, щоб довести невиродженість матриці V_1, припустимо, що $(v^\top, u)V_1 = 0$, тобто

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty\beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{21}$$

та доведемо, що $(v^\top, u) = 0$. Рівність (21) записується як система рівнянь

$$v^\top\overline{\Psi}_\infty + u\beta^\top = 0, \tag{22}$$

$$v^\top\overline{\Psi}'_\infty\beta = 0. \tag{23}$$

З рівняння (22) отримаємо
$$0=\left(v^\top\overline{\Psi}_\infty+u\beta^\top\right)\beta=v^\top\overline{\Psi}_\infty\beta+u\beta^\top\beta=u$$
(тут використано рівності $\overline{\Psi}_\infty\beta=0$ та $\beta^\top\beta=\|\beta\|^2=1$). З рівностей (22) та $u=0$ маємо $v^\top\overline{\Psi}_\infty=0$, $\overline{\Psi}_\infty v=0$ (тут використано симетрію матриці $\overline{\Psi}_\infty$). При доведенні теореми 3 показано, що нульовий простір матриці $\overline{\Psi}_\infty$ одновимірний. Цей простір породжується вектором β та містить вектор v. Тому $v=k\beta$ для якогось скалярного коефіцієнта $k\in\mathbb{R}$. Підставимо $v=k\beta$ в рівняння (23):
$$k\beta^\top\overline{\Psi}'_\infty\beta=0. \tag{24}$$
З урахуванням нерівності $\beta^\top\overline{\Psi}'_\infty\beta<0$, з рівняння (24) отримаємо $k=0$. Отже $(v^\top,u)=(k\beta^\top,u)=0$. Доведено, що з рівності $(v^\top,u)V_1=0$ випливає $(v^\top,u)=0$. Тому матриця V_1 невироджена.

f). Потрібно довести наступну неперервність: для всіх $\delta>0$
$$\lim_{\varepsilon\to0}\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\max_{\substack{\|b-\beta\|\le\varepsilon\\ \|v-\sigma^2\|\le\varepsilon}}\left\|G'_n(b,v)-G'_n\left(\beta,\sigma^2\right)\right\|\ge\delta\right\}=0. \tag{25}$$
Тут δ та ε — невипадкові числа.

Доведемо, що майже напевно
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ n\to\infty}}\max_{\substack{\|b-\beta\|\le\varepsilon\\ \|v-\sigma^2\|\le\varepsilon}}\left\|G'_n(b,v)-G'_n\left(\beta,\sigma^2\right)\right\|=0. \tag{26}$$
Із (26) випливає умова (25).

Елементи матриці $\Psi(v)$ є многочленами до 2 степеня від v,
$$\Psi(v)=\Psi\left(\sigma^2\right)+\left(v-\sigma^2\right)\Psi'\left(\sigma^2\right)+\frac{n\left(v-\sigma^2\right)^2}{2}\Psi''_1,$$
де
$$\Psi''_1=\frac{\partial^2}{\partial v^2}\psi(x,y,v)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&2&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\2&0&6&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$
Тому
$$0\le\max_{\|v-\sigma^2\|<\varepsilon}\left\|\frac1n\Psi(v)-\frac1n\Psi\left(\sigma^2\right)\right\|\le\varepsilon\left\|\frac1n\Psi(v)\right\|+\frac{\varepsilon^2}{2}\|\Psi''_1\|. \tag{27}$$
Матричнозначна функція $\Psi'(v)$ лінійна по v,
$$\Psi'(v)=\Psi'\left(\sigma^2\right)+n\left(v-\sigma^2\right)\Psi''_1.$$
Тому
$$\frac1n\Psi'(v)b-\frac1n\Psi'\left(\sigma^2\right)\beta=\left(v-\sigma^2\right)\Psi''_1b+\frac1n\Psi'\left(\sigma^2\right)(b-\beta),$$
$$0\le\max_{\substack{\|b-\beta\|\le\varepsilon\\ \|v-\sigma^2\|\le\varepsilon}}\left\|\frac1n\Psi'(v)b-\frac1n\Psi'\left(\sigma^2\right)\beta\right\|\le\varepsilon\|\Psi''_1\|(1+\varepsilon)+\left\|\frac1n\Psi'\left(\sigma^2\right)\right\|\varepsilon. \tag{28}$$
Тут враховано рівність $\|\beta\|=1$.

Наостанок,
$$\max_{\|b-\beta\|\le\varepsilon}\left\|b^\top-\beta^\top\right\|=\varepsilon. \tag{29}$$

З урахуванням збіжностей (18) та (19) праві частини нерівностей (27), (28) та рівності (29) прямують до 0 при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ майже напевно. Максимуми в (27)–(29) також прямують до 0 майже напевно. Звідси випливає збіжність (26), а з неї — умова (25) леми з [3].

Згідно з лемою з [3] має місце збіжність (7) із зазначеною у формулюванні теореми 2 коваріаційною матрицею Σ. □

Тепер покажемо, що матриця Σ вироджена. Зауважимо, що з рівності

$$\begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top \overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

випливає

$$\begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top \overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \Sigma \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty \beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top \overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty \beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty \beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Розкладемо матрицю Σ на блоки

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_\beta & \Sigma_{\beta,\sigma^2} \\ \Sigma_{\sigma^2,\beta} & \Sigma_{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Σ_β — це асимптотична коваріаційна матриця оцінки $\hat\beta$. Аналогічно Σ_{σ^2} — це асимптотична дисперсія оцінки $\hat\sigma^2$. З рівності (30) випливає

$$\Sigma_\beta \beta = 0. \tag{31}$$

Отже, асимптотична коваріаційна матриця Σ_β оцінки $\hat\beta$ також вироджена.

Лема 4. *Нехай $P_k(x,y)$ — многочлен k степеня від двох змінних. Складемо з одночленів степеня k многочлен $A_k(x,y)$, тобто розкладемо*

$$P_k(x,y) = A_k(x,y) + P_{k-1}(x,y),$$

де $A_k(x,y)$ — однорідний многочлен k-го степеня, $P_{k-1}(x,y)$ — многочлен не більш як $k{-}1$-го степеня. Позначимо $B_k(x,y)$ многочлен — розв'язок рівняння

$$\mathsf{E}\, B_k(\xi+\delta, \eta+\varepsilon) = A_k(\xi,\delta), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\ \forall \eta \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

де $(\delta,\varepsilon) \sim N(0,\sigma^2 I)$ — двовимірний гауссів вектор, ξ та η — невипадкові змінні.

Тоді

$$\mathsf{E}(P_k(\delta,\varepsilon))^2 \ge \mathsf{E}(B_k(\delta,\varepsilon))^2. \tag{33}$$

Більш того,

$$\mathsf{E}(P_k(\xi+\delta,\ \eta+\varepsilon))^2 \ge \mathsf{E}(B_k(\delta,\varepsilon))^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\ \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Доведення. Твердження леми випливає з того факту, що многочлен Ерміта має найменшу норму у просторі $L_2\big(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx\big)$ серед многочленів k-го степеня зі старшим коефіцієнтом 1. Тут σ^2 використовується при побудові многочлена Ерміта

$$H_k(x) = (-1)^k \sigma^{2k} e^{x^2/(2\sigma^2)} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(e^{-x^2/(2\sigma^2)}\right), \qquad k \ge 0.$$

Нам потрібно використати цей факт для многочленів від двох змінних.

Зауважимо, що при $k = 0$ твердження леми тривіальне. Тут мається на увазі, що "многочлен не більш як мінус першого степеня" — це нульовий многочлен. Надалі вважаємо $k \geq 1$.

Коефіцієнти однорідного многочлена $A_k(x, y)$ позначимо a_j:

$$A_k(x, y) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{k-j} y^j.$$

Наведемо доведення більш докладно. Спочатку доведемо (33).

Покажемо, що многочлен

$$Q(x, y) = P_k(x, y) - B_k(x, y)$$

має степінь не більше $k-1$. Якщо вважати σ змінною, то $B_k(x, y)$ буде многочленом від x, y, σ не більш як k степеня (буде містити одночлени виду $\mathrm{coef}\cdot x^i y^j \sigma^{2r}$, $i+j+2r \leq k$), причому при $\sigma^2 = 0$ має місце рівність $B_k(x, y) = A_k(x, y)$. Різниця многочленів $B_k(x, y) - A_k(x, y)$ буде складатись з одночленів виду $\mathrm{coef} \cdot x^i y^j \sigma^{2r}$, $i + j + 2r \leq k$, $r \geq 1$. При фіксованому σ^2 різниця многочленів $B_k(x, y) - A_k(x, y)$ буде мати степінь не більше $k - 2$, а многочлен

$$Q(x, y) = P_k(x, y) - B_k(x, y) = A_k(x, y) - B_k(x, y) + P_{k-1}(x, y)$$

буде мати степінь не більше ніж $k - 1$.

Далі,

$$P_k(x, y) = B_k(x, y) + Q(x, y),$$
$$\mathsf{E}\, P_k(\delta, \varepsilon)^2 = \mathsf{E}\, B_k(\delta, \varepsilon)^2 + 2\, \mathsf{E}\, B_k(\delta, \varepsilon) Q(\delta, \varepsilon) + \mathsf{E}\, Q(\delta, \varepsilon)^2. \tag{35}$$

Розглянемо гільбертів простір $\mathcal{H}^2 = L_2\big(\mathbb{R}^2, \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\, dx\, dy\big)$ функцій від двох змінних зі скалярним добутком $\langle f, g \rangle = \mathsf{E}\, f(\delta, \varepsilon) g(\delta, \varepsilon)$. Оскільки многочлени Ерміта $H_n(x)$ ортогональні в просторі $\mathcal{H}^1 = L_2\big(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx\big)$, то многочлени $H_{n-j}(x) H_j(y)$, $0 \leq j \leq n < \infty$ утворюють ортогональну систему векторів у просторі $\mathcal{H}^2$ [8, §II.1]. Многочлени $H_{n-j}(x) H_j(y)$, $0 \leq j \leq n < k$, складають базис простору многочленів від двох змінних степеня не більше $k - 1$ [8, лема I.1]. Можна перевірити, що лінійна комбінація

$$B_k(x, y) = \sum_{j=0}^{k} a_j H_{k-j}(x) H_j(y)$$

є розв'язком рівняння (32). Тому многочлен $B_k(x, y)$ ортогональний до будь-якого многочлена степеня не більше $k - 1$, зокрема, $\mathsf{E}\, B_k(\delta, \varepsilon) Q(\delta, \varepsilon) = 0$. З рівності (35) отримуємо $\mathsf{E}\, P_k(\delta, \varepsilon)^2 = \mathsf{E}\, B_k(\delta, \varepsilon)^2 + \mathsf{E}\, Q(\delta, \varepsilon)^2 \geq \mathsf{E}\, B_k(\delta, \varepsilon)^2$, і нерівність (33) доведено.

Доведено, що "за умов леми 4 виконується нерівність (33)". Використаємо це твердження для доведення нерівності (34). Розглянемо многочлен $P_k(\xi + x,\ \eta + y)$ при фіксованих ξ та η. Він має степінь k та розклад

$$P_k(\xi + x, \eta + y) = A_k(x, y) + \sum_{j=0}^{k} a_k \left((\xi + x)^{k-j} (\eta + y)^j - x^{k-j} y^j \right) + P_{k-1}(\xi + x, \eta + y),$$

причому многочлен $\sum_{j=0}^{k} a_k \left((\xi + x)^{k-j} (\eta + y)^j - x^{k-j} y^j \right) + P_{k-1}(\xi + x,\ \eta + y)$ має степінь не більше $k - 1$. Тому $P_k(\xi + x,\ \eta + y)$ задовольняє умови леми 4 з таким самим многочленом $A_k(x, y)$, і для нього виконується нерівність (34). $\square$

Лема 5. *Нехай A — матриця розміру $m \times n$, S та T — невироджені матриці розміру $m \times m$ та, відповідно, $n \times n$. Тоді*

$$\operatorname{rank}(S\,A\,T) = \operatorname{rank} A.$$

Теорема 6. *За умов теореми 2 асимптотична коваріаційна матриця Σ оцінки $(\hat\beta^\top, \hat\sigma^2)^\top$ та асимптотична коваріаційна матриця Σ_β оцінки $\hat\beta$ мають дефект 1, тобто*

$$\operatorname{rank}\Sigma = 6, \qquad \operatorname{rank}\Sigma_\beta = 5.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що матриця Σ_6 з доведення теореми 2 є додатно визначеною. Для цього для довільного вектора

$$v = (A_1, 2B_1, C_1, 2D_1, 2E_1, F_1)^\top \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$$

перевіримо, що $v^\top \Sigma_6 v > 0$.

Вираз $v^\top \psi(x, y, \sigma^2)\beta$ є многочленом від x та y четвертого, третього чи другого степеня в залежності від значення вектора v. Однорідний многочлен, складений з одночленів найбільшого степеня многочлена $v^\top \psi(x, y, \sigma^2)\beta$, дорівнює:

$$P(x,y) = \begin{cases} (A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \\ \qquad\qquad \text{якщо } (A_1, B_1, C_1) \neq 0; \\ (2D_1x + 2E_1y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \\ \qquad\qquad \text{якщо } A_1 = B_1 = C_1 = 0 \text{ та } (D_1, E_1) \neq 0; \\ F_1(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \qquad F_1 \neq 0, \\ \qquad\qquad \text{якщо } A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = 0. \end{cases}$$

Нагадаємо, що A, $2B$, C — елементи вектора β, де β — це істинне значення параметра, і принаймні один з цих трьох елементів ненульовий.

Згідно з лемою 4

$$\mathsf{E}\left(v^\top \psi(x_i, y_i, \sigma)\beta\right)^2 \geq \mathsf{E}\, B(\delta_i, \varepsilon_i)^2,$$

де $B(x, y)$ — розв'язок задачі деконволюції

$$\mathsf{E}\, B(\xi + \delta_i, \eta + \varepsilon_i) = P(\xi, \eta), \quad \forall\xi \in \mathbb{R}\ \forall\eta \in \mathbb{R}.$$

Оскільки похибки $(\delta_i, \varepsilon_i)$ однаково розподілені для різних i, то многочлен $B(x, y)$ однаковий для різних i та математичне сподівання $\mathsf{E}\, B(\delta_i, \varepsilon_i)^2$ не залежить від i. Многочлен $B(x, y)$ ненульовий, він містить всі одночлени, які є у многочлені $P(x, y)$. Звідси випливає

$$\mathsf{E}\left(v^\top \psi\left(x_i, y_i, \sigma^2\right)\beta\right)^2 \geq \mathsf{E}\, B(\delta_i, \varepsilon_i)^2 = \mathsf{E}_{(\delta,\varepsilon)^\top \sim N(0,\sigma^2 I)}\, B(\delta, \varepsilon)^2 > 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left(v^\top \psi\left(x_i, y_i, \sigma^2\right)\beta\right)^2 \geq \mathsf{E}_{(\delta,\varepsilon)^\top \sim N(0,\sigma^2 I)}\, B(\delta, \varepsilon)^2 > 0. \tag{36}$$

З урахуванням збіжності (15) зробимо граничний перехід в (36):

$$\begin{aligned} v^\top \Sigma_6 v &= v^\top \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[\psi\left(x_i, y_i, \sigma^2\right)\beta\beta^\top \psi\left(x_i, y_i, \sigma^2\right)\right] v \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(v^\top \psi\left(x_i, y_i, \sigma^2\right)\beta\right)^2 \\ &\geq \mathsf{E}_{(\delta,\varepsilon)^\top \sim N(0,\sigma^2 I)}\, B(\delta, \varepsilon)^2 > 0. \end{aligned}$$

Оскільки для будь-якого вектора $v \neq 0$ симетрична матриця Σ_6 задовольняє нерівність $v^\top \Sigma_6 v > 0$, то Σ_6 — додатно визначена матриця. Зокрема, матриця Σ_6 невироджена, $\operatorname{rank}\Sigma_6 = 6$.

При доведенні теореми 2 було перевірено, що матриця V_1, визначена у формулі (16), невироджена. За лемою 5

$$\operatorname{rank}(\Sigma) = \operatorname{rank}\left(V_1 \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1^\top\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\Sigma_6 = 6.$$

Матриця Σ невід'ємно визначена та має дефект 1, тому найменше власне дорівнює нульове та має кратність 1, а друге найменше власне число $\lambda_{\min,2}(\Sigma)$ додатне. Матриця Σ_β є "головною підматрицею" матриці Σ. За теоремою Коші про чергування власних чисел [7, теорема IV.4.2] друге найменше власне число матриці Σ_β задовольняє нерівність

$$0 < \lambda_{\min,2}(\Sigma) \leq \lambda_{\min,2}(\Sigma_\beta) \leq \lambda_{\min,3}(\Sigma)$$

і отже є додатним. Тому власне число 0 матриці Σ_β має кратність не більше 1; а те, що 0 є власним числом, випливає з рівності (31). Отже, матриця Σ_β має дефект 1 та $\operatorname{rank}\Sigma_\beta = 5$. □

5. Висновки

В моделі оцінювання параметрів кривої другого порядку за спостереженнями зі збуреннями точок, які лежать на цій кривій, отримано достатні умови асимптотичної нормальності оцінки в сенсі збіжності (7). Знайдено ранг асимптотичної коваріаційної матриці Σ. За накладених умов ранг асимптотичної коваріаційної матриці Σ_β оцінки параметрів еліпсоїда дорівнює 5 (еліпсоїд можна задати 5 незалежними параметрами).

Використання "нечесної" оцінки $\hat\beta^* = \pm\hat\beta$ є трюком, який дозволяє застосовувати лему про асимптотичну нормальність оцінки у випадку, коли параметр визначений лише з точністю до знаку. З такою оцінкою можна будувати асимптотичні довірчі множини для параметра β.

Використання "нечесної" оцінки можна уникнути, якщо параметрична множина повністю лежить у півпросторі. Наприклад, можна вимагати, щоб істинне значення параметра лежало на півсфері $\{\beta = (A, 2B, C, 2D, 2E, F)^\top : \|\beta\| = 1, A > 0\}$, а оцінку побудувати так, щоб $\hat A \geq 0$.

Асимптотична нормальність у структурній моделі. Ми вважали, що істинні точки невипадкові. Така модель називається *функціональною.*

Більш природно доводити асимптотичну нормальність у структурних моделях. Модель називається *структурною*, якщо істинні точки є випадковими, незалежними в сукупності та однаково розподіленими елементами простору $\mathbb{R}^2$. Для доведення асимптотичної нормальності в структурній моделі замість першої умови теореми 2 потрібно вимагати скінченність шостих моментів координат істинних точок.

Обчислення асимптотичної коваріаційної матриці. Формула (8) для асимптотичної коваріаційної матриці Σ містить Σ_6. Показано, як обчислити матрицю Σ_6, проте явна формула матриці Σ_6 не виписана. Явна формула, не наведена в цій статті, була отримана за допомогою символьних обчислень.

Оцінки асимптотичної коваріаційної матриці. Можливо побудувати оцінку асимптотичної коваріаційної матриці (див. [1], додаток А.6). Потрібно знайти умови, за яких ця оцінка буде консистентною.

Література

1. R. J. Carroll, D. Ruppert, L. A. Stefanski, and C. Crainiceanu, *Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective*, Second Edition, Chapman and Hall, London, 2006.
2. A. Kukush, I. Markovsky, and S. Van Huffel, *Consistent estimation in an implicit quadratic error model*, Comput. Statist. Data Anal. **47** (2004), no. 1, 123–147.
3. A. Kukush and H. Schneeweiss, *Comparing different estimators in a nonlinear measurement error model*, Part 1, Math. Methods Statist. **14** (2005), no. 1, 53–79.
4. I. Markovsky, A. Kukush, and S. Van Huffel, *Consistent least squares fitting of ellipsoids*, Numerische Mathematik **98** (2004), no. 1, 177–194.
5. J. Pfanzagl, *On the measurability and consistency of minimum contrast estimates*, Metrika **14** (1969), 249–272.
6. S. Shklyar, A. Kukush, I. Markovsky, and S. Van Huffel, *On the conic section fitting problem*, J. Multivariate Anal. **98** (2007), no. 3, 588–624.
7. G. W. Stewart and J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, Boston, 1990.
8. П. К. Суетин, *Ортогональные многочлены по двум переменным*, “Наука”, Москва, 1988; English transl., P. K. Suetin, *Orthogonal Polynomials in Two Variables*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: `shklyar@mail.univ.kiev.ua`

Надійшла 23/12/2014