Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 9–22

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 9–22

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ОЦІНЮВАННЯ В СТАТИСТИЧНИХ МОДЕЛЯХ, КЕРОВАНИХ ШУМОМ ЛЕВІ

УДК 519.21

С. В. БОДНАРЧУК І Д. О. ІВАНЕНКО

Анотація. Пропонується спосіб перевірки ефективності методу оцінювання невідомого параметра для статистичних моделей, в яких спостерігається процес, заданий стохастичним диференціальним рівнянням керованим шумом Леві.

Abstract. It is proposed to apply the way of verifying efficiency of the unknown parameter estimating method, in statistical models with observations of a process defined by the stochastic differential equation, controlled by Lévy noise.

Аннотация. Предлагается способ проверки эффективности метода оценивания неизвестного параметра для статистических моделей, в которых наблюдается процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением управляемым шумом Леви.

1. Вступ

Розглянемо статистичну модель, в якій зі сталим кроком h спостерігається випадковий процес, заданий стохастичним диференціальним рівнянням

$$dX_t = a_\theta(X_t)dt + dZ_t, \quad X_0 = x_0. \tag{1}$$

Тут $x_0 \in \mathbb{R}$, $a : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – відома функція, умови на яку будуть накладені нижче, $\Theta \subset \mathbb{R}$ – відкрита множина (інтервал), $\theta \in \Theta$ – невідомий параметр, що підлягає оцінюванню, Z – процес Леві без дифузійної компоненти.

Після вибору методу оцінювання і побудови оцінки постає питання про ефективність останньої. В сучасній статистиці задача вибору асимптотично ефективної оцінки невідомого параметра розв'язується за допомогою концепції **локальної асимптотичної нормальності (ЛАН)** введеної Лє-Камом [7], [8]. Згідно з мінімаксною теоремою Гаєка [3], якщо статистична модель має властивість ЛАН, існує нижня границя ризиків пов'язаних із вибором того чи іншого метода оцінювання. Згідно з цією теоремою для квадратичної функції втрат

$$l_n(x, y) = (\sqrt{n}(x - y))^2,$$

довільної оцінки $\hat{\theta}_n$ і будь-якого $\epsilon > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\epsilon} \mathsf{E}^\theta(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta))^2 \ge I^{-1}(\theta_0), \tag{2}$$

де $I(\theta_0)$ – границя нормованих інформацій Фішера, тобто

$$I(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I_n(\theta_0).$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62F12; Secondary 60G51.

Ключові слова і фрази. Асимптотична ефективність, локальна асимптотична нормальність, процеси Леві, стохастичні диференціальні рівняння.

В роботі [5] для описаної вище статистичної моделі були знайдені достатні умови, за яких справджується властивість ЛАН, а отже і співвідношення (2). В [5] зокрема показано, що при виконанні цих достаніх умов, процес X є ергодичним та

$$I(\theta_0) = \mathsf{E}^{\theta_0}\Big(g_h(\theta_0, X_0^{st}, X_h^{st})\Big)^2,$$

де функція g є логарифмічною похідною щільності перехідної імовірності процеса X, тобто

$$\partial_\theta p_t(\theta; x, y) = g_t(\theta; x, y) p_t(\theta; x, y), \tag{3}$$

а X^{st} – стаціонарний розв'язок рівняння (1). Проте в умовах нашої моделі точне знаходження величини $I(\theta_0)$ унеможливлюється з наступних причин:

- інваріантна міра процеса X не відома,
- для функції g відоме лише інтегральне зображення (див. формулу (7)),
- усереднення відносно розподілу моста, що відповідає процесу X, є занадто складним для реалізації.

Для вирішення цієї проблеми пропонується наступна схема. Спочатку для заданої точності $\Delta > 0$ вибираємо номер $n_0 = n_0(\Delta)$ такий, що

$$\left| I(\theta_0) - \mathsf{E}_x^{\theta_0}\Big(g_h(\theta_0, X_{hn_0}, X_{h(n_0+1)})\Big)^2 \right| < \Delta, \tag{4}$$

потім за формулою (7) та нерівністю Йєнсена для умовного математичного сподівання записуємо оцінку

$$\mathsf{E}_x^{\theta_0}\Big(g_h(\theta_0, X_{hn_0}, X_{h(n_0+1)})\Big)^2 \le \mathsf{E}_x^{\theta}\Xi_h(n_0)^2, \tag{5}$$

де $\Xi_h(n_0)$ визначається формулою (11). Остаточно одержуємо верхню оцінку для інформації по Фішеру:

$$I(\theta_0) \le \mathsf{E}_x^{\theta_0}\Xi_h(n_0)^2 + \Delta =: J(\theta_0, n_0) + \Delta.$$

Припустимо, що вибрано метод оцінювання і $\hat{\theta}_n$ – оцінка параметра θ_0 за цим методом. Асимптотичною якістю оцінки може слугувати величина $\sqrt{I(\theta_0)\mathsf{E}l_n(\hat{\theta}_n, \theta_0)}$, яка інтерпретується як відносна ефективність оцінки відносно теоретичної границі Гаєка. Оскільки $I(\theta_0)$ неможливо обчислити, замінюємо її верхньою оцінкою $J(\theta_0, n_0)$. Останнім кроком замінюємо математичні сподівання на вибіркові середні. Зауважимо, що запропонований в статті підхід дозволяє одержати як оцінку ефективності методу оцінювання, так і оцінку долі випадковості (величина $\sqrt{J(\theta_0, n_0)/I(\theta_0)}$) втраченої при заміні умовного математичного сподівання на безумовне (нерівність (5)).

Запропонований в цій статті алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання полягає в наступному:

- вибираємо метод оцінювання і будуємо оцінку $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра θ_0;
- генеруємо N траєкторій процеса X заданого рівнянням (1) з $\theta = \hat{\theta}_n$ і по кожній з них будуємо вибірку розміру n;
- обчислюємо оцінки $\hat{\theta}_n^k$, $k = 1, \ldots, N$ і знаходимо вибіркову дисперсію $s_N^2(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \Big(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^k - \hat{\theta}_n)\Big)^2$;
- обчислюємо n_0 і генеруємо ще N траєкторій X з $\theta = \hat{\theta}_n$, по кожній з них обчислюємо $\Xi_h^k(n_0)$, $k = 1, \ldots, N$;
- знаходимо вибіркове середнє $J_N(\hat{\theta}_n, n_0) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \Xi_h^k(n_0)^2$;
- за значенням $\sqrt{J_N(\hat{\theta}_n, n_0)s_N^2(\hat{\theta}_n)}$ робимо висновок про ефективність методу.

Запропонований алгоритм ілюструється на конкретному прикладі.

2. Підготовчі результати і позначення

Запишемо розклад Іто – Леві для процеса Z:

$$Z_t = ct + \int_0^t \int_{|u|>1} u\nu(ds, du) + \int_0^t \int_{|u|\le 1} u\tilde{\nu}(ds, du),$$

де ν пуасонова точкова міра з мірою інтенсивності $ds\mu(du)$, $\tilde{\nu}(ds, du) = \nu(ds, du) - ds\mu(du)$ – відповідна компенована міра. Будемо припускати, що μ задовольняє наступну умову:

H. (i) для деякого $\kappa > 0$,

$$\int_{|u|\ge 1} u^{2+\kappa}\mu(du) < \infty;$$

(ii) для деякого $u_0 > 0$, звуження μ на $[-u_0, u_0]$ має додатню щільність

$$\sigma \in C^2\left([-u_0, 0) \cup (0, u_0]\right);$$

(iii) існує C_0 таке, що

$$|\sigma'(u)| \le C_0|u|^{-1}\sigma(u), \quad |\sigma''(u)| \le C_0 u^{-2}\sigma(u), \ |u| \in (0, u_0];$$

(iv) $\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \mu\Big(u : |u| \ge \varepsilon\Big) \to \infty, \quad \varepsilon \to 0.$

Важливим класом процесів Леві, що задовольняють умові **H**, є *пом'якшені α-стійкі процеси* (*tempered α-stable processes*), що природнім чином виникають в моделях турбулентності, економічних моделях стохастичної волатильності, тощо (детальне обговорення із відповідними посиланнями можна знайти в [4], [5]).

Відносно a будемо припускати наступне:

A. (i) a має неперервні похідні $\partial^{i+j}_{x^i\theta^j}a$, $i \le 3$, $j \le 2$;

(ii) похідні $\partial_x a$, $\partial^2_{xx}a$, $\partial^2_{x\theta}a$, $\partial^3_{xxx}a$, $\partial^3_{x\theta\theta}a$, $\partial^3_{xx\theta}a$, $\partial^4_{xxx\theta}a$ обмежені та

$$|a_\theta(x)| + |\partial_\theta a_\theta(x)| + |\partial^2_{\theta\theta}a_\theta(x)| \le C(1 + |x|), \quad \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R};$$

(iii) для даного $\theta_0 \in \Theta$ існує такий окіл $(\theta_-, \theta_+) \subset \Theta$ точки θ_0, що

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{a_\theta(x)}{x} < 0 \quad \text{рівномірно по } \theta \in (\theta_-, \theta_+).$$

Позначимо P^θ_x розподіл процеса X в $\mathbb{D}([0, \infty))$ з $X_0 = x$, і через E^θ_x умовне математичне сподівання відносно цього розподілу. Відповідний одновимірний розподіл в момент часу t позначаємо $\mathsf{P}^\theta_{x,t}$. Розв'язок X рівняння (1) є випадковою функцією визначеною разом з Z на спільному імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, що додатково залежить від параметра θ і початкового значення $x = X(0)$. Ми не будемо відображати це в позначеннях, і будемо писати X_t замість $X^\theta_{x,t}$, однак така залежність є істотною, оскільки в подальшому буде використовуватись L_2-диференційовність відносно θ і L_2-неперервність відносно (t, x, θ) процеса X_t. Для двох імовірнісних мір κ_1 та κ_2 позначимо

$$\|\kappa_1 - \kappa_2\|_{TV} = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\kappa_1}{d\lambda} - \frac{d\kappa_2}{d\lambda}\right| d\lambda,$$

де λ – деяка σ-скінченна міра така, що $\kappa_i \ll \lambda$, $i = 1, 2$.

В роботі [4] було доведено, що умови **H** та **A**(i) є достатніми для існування щільності $p_t(\theta, x, y)$ перехідної імовірності $\mathsf{P}^\theta_t(x, dy)$ процеса X відносно міри Лебега. Ця щільність є неперервною відносно $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тому (див. [2]) для будь-яких $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ таких що

$$p_t(\theta; x, y) > 0, \tag{6}$$

існує слабка границя в $\mathbb{D}([0,t])$

$$\mathsf{P}^{t,\theta}_{x,y} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}^{\theta}_{x}\Big(\,\cdot\,\Big| |X_t - y| \le \varepsilon\Big),$$

яка інтерпретується як *розподіл моста* (що відповідає процесу X). Позначимо $\mathsf{E}^{t,\theta}_{x,y}$ – математичне сподівання відносно $\mathsf{P}^{t,\theta}_{x,y}$.

Також в [4] було доведено, що за умов **H** та **A**(i)–(ii) функція $g_t(\theta;x,y)$ з формули (3) допускає інтегральне зображення:

$$g_t(\theta;x,y) = \begin{cases} \partial_\theta \log p_t(\theta;x,y) = \mathsf{E}^{t,\theta}_{x,y}\Xi_t, & p_t(\theta;x,y) > 0,\\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{7}$$

Для того, щоб записати формулу (і метод чисельного знаходження) для Ξ_t нам будуть потрібні деякі результати, що стосуються числення Малявена для чисто-стрибкових процесів описаного в [4].

Зафіксуємо $u_1 \in (0, u_0)$, де u_0 взято з умови **H** (ii), і визначимо двічі неперервну функцію $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ з обмеженою похідною і таку, що

$$\varrho(u) = \begin{cases} u^2, & |u| \le u_1;\\ 0, & |u| \ge u_0. \end{cases}$$

Позначимо $Q_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$ – значення в момент часу $s = c$ розв'язку задачі Коші

$$q'(s) = \varrho(q(s)), \quad q(0) = x.$$

Тоді $\{Q_c, c \in \mathbb{R}\}$ – група перетворень $\mathbb{R}$ і $\partial_c Q_c(x)|_{c=0} = \varrho(x)$.

Означення 2.1. Функціонал $F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ називається *стохастично диференційовним*, якщо існує $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$-границя

$$\hat{\mathrm{D}}F = \lim_{c\to 0} \frac{1}{c}\Big(\mathcal{Q}_c F - F\Big). \tag{8}$$

Замикання D оператора $\hat{\mathrm{D}}$ визначеного співвідношенням (8) називається *стохастичною похідною.* Спряжений оператор $\delta = \mathrm{D}^*$ називається *оператором дівергенції* або *розширеним стохастичним інтегралом.*

Згідно з [4] за умови **H** значення процеса Z в точці t є двічі стохастично диференційовним і

$$\mathrm{D}Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varrho(u)\nu(ds,du), \quad \mathrm{D}^2 Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varrho(u)\varrho'(u)\nu(ds,du),$$

одиниця належить області визначення δ і

$$\delta(1) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sigma(u)\varrho(u))'}{\sigma(u)}\tilde{\nu}(ds,du). \tag{9}$$

Крім того, за умов **H** та **A**(i)–(ii) X – L_2-диференційовний відносно θ, а значення $\partial_\theta X$ в момент часу t є стохастично диференційовним, значення самого X в точці t також є двічі стохастично диференційовним.

Нехай $t_0 > 0$ – фіксоване. Розглянемо рівняння (1) зі стартовою точкою $X_{t_0} = x_{t_0}$. Позначимо $Y^1_t = \partial_\theta X_t$, $Y^2_t = \mathrm{D}X_t$, $Y^3_t = \mathrm{D}\partial_\theta X_t$, $Y^4_t = \mathrm{D}^2 X_t$. Тоді (див. [4]) $\overline{Y}_t := (Y^1_t, \dots, Y^4_t)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} dY^1_t = \partial_x a_\theta(X_t) Y^1_t dt + \partial_\theta a_\theta(X_t) dt;\\ dY^2_t = \partial_x a_\theta(X_t) Y^2_t dt + d\mathrm{D}Z_t;\\ dY^3_t = \partial_x a_\theta(X_t) Y^3_t dt + \big(\partial_{x\theta} a_\theta(X_t) Y^2_t + \partial_{xx} a_\theta(X_t) Y^1_t Y^2_t\big)\,dt;\\ dY^4_t = \partial_x a_\theta(X_t) Y^4_t dt + \partial_{xx} a_\theta(X_t)(Y^2_t)^2 dt + d\mathrm{D}^2 Z_t;\\ Y^i_{t_0} = 0,\ i = 1,\dots,4. \end{cases} \tag{10}$$

Вподальшому $\overline{Y}$ будемо шукати чисельно методом Ейлера. Координати $\overline{Y}$ э складовими формули для Ξ, оскільки згідно з [4]

$$\Xi_h(t_0) = \frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\delta(1)}{\mathrm{D}X_{t_0+h}} + \frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\mathrm{D}^2 X_{t_0+h}}{(\mathrm{D}X_{t_0+h})^2} - \frac{\mathrm{D}(\partial_\theta X_{t_0+h})}{\mathrm{D}X_{t_0+h}}. \tag{11}$$

3. Перевірка співвідношення (4)

Позначимо π – інваріантна міра процеса X,

$$\Xi_h^{st} = \frac{(\partial_\theta X_h^{st})\delta(1)}{\mathrm{D}X_h^{st}} + \frac{(\partial_\theta X_h^{st})\mathrm{D}^2 X_h^{st}}{(\mathrm{D}X_h^{st})^2} - \frac{\mathrm{D}(\partial_\theta X_h^{st})}{\mathrm{D}X_h^{st}}.$$

Лема 3.1. *Нехай для кожного $t_0 > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ існують додатні сталі $C^1_{\mathsf{P}}(x)$, C^2_{P}, $C_\Xi(x,h)$ та $C_{\Xi^{st}}(h)$ такі, що для всіх $\theta \in \Theta$*

$$\|\mathsf{P}^\theta_{x,t_0} - \pi\|_{TV} \le e^{C^1_{\mathsf{P}}(x) - C^2_{\mathsf{P}} t_0},$$

$$\mathsf{E}^\theta_x |\Xi_h(t_0)|^4 \le C_\Xi(x,h), \quad \mathsf{E}^\theta |\Xi^{st}_h|^4 \le C_{\Xi^{st}}(h).$$

Тоді

$$\left| I(\theta) - \mathsf{E}^\theta_x \Big(g_h(\theta, X_{t_0}, X_{t_0+h}) \Big)^2 \right| \le e^{K_1 - K_2 t_0},$$

де

$$K_1 = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(C_\Xi(x,h) + C_{\Xi^{st}}(h) \right) + \frac{1}{2} C^1_{\mathsf{P}}(x), \quad K_2 = \frac{1}{2} C^2_{\mathsf{P}}.$$

Зауваження 3.1. Вирази для констант C^1_{P} та C^2_{P} будуть отримані в Теоремі 3.1, для констант C_Ξ та $C_{\Xi^{st}}$ в Лемах 3.2 – 3.5.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Леми 7 [5], однак нам потрібні явні вирази K_1 та K_2, тож розглянемо його схематично.

Згідно з [6] умови **A** та **H** є достатніми для існування експоненційного каплінгу для процеса X, тобто, такого процеса $Y = (Y^1, Y^2)$, що Y^1 має розподіл P^θ_x, Y^2 має розподіл X^{st} і для всіх $t > 0$

$$P(Y^1_t \ne Y^2_t) \le e^{C^1_{\mathsf{P}}(x) - C^2_{\mathsf{P}} t}.$$

враховуючи останню нерівність запишемо

$$\begin{aligned}
&\left| I(\theta) - \mathsf{E}^\theta_x \Big(g_h(\theta, X_{t_0}, X_{t_0+h}) \Big)^2 \right| = \left| \mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^2 - \mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^2_{t_0}, Y^2_{t_0+h}) \Big)^2 \right| \\
&\le \mathsf{E} \left| \Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^2 - \Big(g_h(\theta, Y^2_{t_0}, Y^2_{t_0+h}) \Big)^2 \right| \mathbf{1}_{\{(Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \ne (Y^2_{t_0}, Y^2_{t_0+h})\}} \\
&\le \left(\mathsf{E} \left(\Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^2 - \Big(g_h(\theta, Y^2_{t_0}, Y^2_{t_0+h}) \Big)^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(P(Y^1_{t_0} \ne Y^2_{t_0}) + P(Y^1_{t_0+h} \ne Y^2_{t_0+h}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2 \left(\mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^4 + \mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^4 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(C^1_{\mathsf{P}}(x) - C^2_{\mathsf{P}} t_0)}.
\end{aligned}$$

Далі за нерівністю Йєнсена для умовного математичного сподівання

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^1_{t_0}, Y^1_{t_0+h}) \Big)^4 &= \mathsf{E}^\theta_x \Big(g_h(\theta, X_{t_0}, X_{t_0+h}) \Big)^4 = \mathsf{E}^\theta_x \Big(\mathsf{E}^{h,\theta}_{X_{t_0}, X_{t_0+h}} \Xi_h(t_0) \Big)^4 \\
&\le \mathsf{E}^\theta_x \mathsf{E}^{h,\theta}_{X_{t_0}, X_{t_0+h}} \Xi_h(t_0)^4 = \mathsf{E}^\theta_x \Xi_h(t_0)^4 \le C_\Xi(x,h).
\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\mathsf{E}\Big(g_h(\theta, Y^2_{t_0}, Y^2_{t_0+h}) \Big)^4 = \mathsf{E}^\theta \Big(g_h(\theta, X^{st}_0, X^{st}_h) \Big)^4 \le C_{\Xi^{st}}(h).$$

Комбінуючи останні три співвідношення виводимо твердження леми. □

Константи $C^1_{\mathsf{P}}(x)$ та C^2_{P}. Для пошуку констант $C^1_{\mathsf{P}}(x)$ і C^2_{P} скористаємось Теоремою 4.2 [1]. Для цього введемо наступні позначення:

$$A_1 = \sup_{x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta} |\partial_x a_\theta(x)|, \quad A_2 = \sup_{x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta} |\partial^2_{xx} a_\theta(x)|;$$

для деяких $t, \varepsilon, \zeta, \rho, \varrho, R_0, R > 0$, $\gamma, \delta \in (0,1)$ і множини $\Gamma \in \mathbb{R}$ такої, що $\mu(\Gamma) < +\infty$

$$\mathsf{L} = (\varepsilon\varrho A_1 + 2\varepsilon R + 4\zeta)A_1 e^{tA_1} + \varepsilon A_1^2 e^{2tA_1}\left(\varrho(\varepsilon+\varrho) + \frac{tA_2\varrho^2}{2}\right),$$

$$\Pi = \inf_x \mu\Big(u\in\Gamma : |a_\theta(x+u) - a_\theta(x)| > \rho, |u| \le \varrho\Big),$$

$$\mathrm{P}_1 = \left(1 - \exp\left(-\varepsilon\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\Pi e^{-\varepsilon\mu(\Gamma)}\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2\zeta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\mu(du)\right)\right)\right)$$

($[z] = \max\{n\in\mathbb{Z} : n \le z\}$ – ціла частина числа z);

$$\mathrm{P}_2 = \sup_{|x_0|\le R_0} P\left(\sup_{r\le t}|X(r)| > R - \frac{\varepsilon A_1\varrho}{2}e^{tA_1}\right).$$

Нехай $\mathcal{M}$ – множина тих $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$, для яких функція

$$x \to \int_{|u|>1}\varphi(x+u)\mu(du)$$

є локально обмеженою. Покладемо для $\varphi\in\mathcal{M}$

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \varphi'(x)a_\theta(x) + \int_{\mathbb{R}}(\varphi(x+u) - \varphi(x) - \varphi'(x)u\mathbf{1}_{|u|\le 1})\mu(du), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Теорема 3.1. [1, Теорема 4.2] *Припускаємо наступне:*

1) *існує невід'ємна функція $\varphi\in\mathcal{M}$ і сталі $\alpha,\beta > 0$ такі, що*
$$\mathcal{A}\varphi \le -\alpha\varphi + \beta, \quad \varphi(x)\to+\infty,\ |x|\to+\infty;$$
2) $\mathsf{L} \le \gamma\rho e^{-2tA_1}$, $\quad \varkappa e^{3tA_1} \le \frac{1}{2}\varepsilon(1-\delta)(1-\gamma)\rho$;
3) *існують $t_1, R_1 > 0$ і $c\in(0,1)$ такі, що*
$$\chi := \inf_{|x|\le R_1, |y|\le R_1}\ \sup_{\xi\overset{d}{=}X(x,t_1),\eta\overset{d}{=}X(y,t_1)} P(|\xi-\eta| < \varkappa, |\xi|\le R_0) > 0,$$
$$\varphi(x) + \varphi(y) \ge \max\left(\frac{2\beta}{c\alpha}, 1\right), \quad \max\{|x|,|y|\} \ge R_1.$$

Тоді процес X має єдину інваріантну міру π і справедлива оцінка

$$\|\mathsf{P}^\theta_{x,s} - \pi\|_{TV} \le e^{C^1_{\mathsf{P}}(x) - C^2_{\mathsf{P}}s}, \quad s\ge 0,$$

де

$$C^1_{\mathsf{P}}(x) = \ln(1+\varphi(x)) + \frac{(1-c)\alpha T}{2} + \max\left(\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), 0\right) + \ln\left(\frac{4}{1-(1-\varsigma)^{1/2}}\right),$$

$$\mathsf{C}^2_{\mathsf{P}} = \frac{(1-c)\alpha}{4\max(Q,1)},$$

$$T = t + t_1, \quad \varsigma = \chi\delta\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2(\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2),$$

$$Q = \frac{1}{\ln(1/\varsigma)}\left(\frac{(1-c)\alpha}{2}T + \ln\left(1 + \frac{4\beta}{\alpha} + 4\sup_{|x|\le R_1}\phi(x)\right)\right),$$

Зазначимо, що в нашому випадку умова 1) теореми (умови Ляпунова) виконується внаслідок [6] або [9], а умови 2) та 3) внаслідок [1].

Константи C_Ξ та $C_{\Xi^{st}}$. Для того щоб знайти сталі C_Ξ і $C_{\Xi^{st}}$ необхідно оцінити моменти всіх складових, що фігурують в формулі (11).

Лема 3.2. *Нехай умова 1 теореми 3.1 виконується для функцій $\varphi(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ зі сталими α_p та β_p. Нехай існують сталі $C_a^i > 0$, $i = 1, 2$ такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $\theta \in \Theta$*

$$|\partial_\theta a_\theta(x)| \leq C_a^1(1 + |x|), \quad |\partial_x a_\theta(x)| \leq C_a^2. \tag{12}$$

Тоді

1) *для будь-яких $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathsf{E}_x^\theta |X_t|^p \leq |x|^p + \frac{\alpha_p}{\beta_p}. \tag{13}$$

2) *для будь-яких $h > 0$ та $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathsf{E}_x^\theta |\partial_\theta X_{t_0+h}|^p \leq C_{\partial X}(x, p, h),$$

де

$$C_{\partial X}(x, p, h) = 2^{p-1}(C_a^1 h)^p \Big(1 + |x|^p + \frac{2\alpha_p}{\beta_p}\Big) e^{C_a^2 hp}.$$

Доведення. Співвідношення (13) є наслідком Леми 3.3 [6].

Записавши перше рівняння системи (10) в інтегральній формі, одержимо

$$\partial_\theta X_{t_0+h} = \int_{t_0}^{t_0+h} \Big(\partial_x a_\theta(X_s) \partial_\theta X_s + \partial_\theta a_\theta(X_s)\Big) ds.$$

Звідси, з урахуванням (12) маємо

$$\begin{aligned} |\partial_\theta X_{t_0+h}| &\leq C_a^2 \int_{t_0}^{t_0+h} |\partial_\theta X_s| ds + C_a^1 \int_{t_0}^{t_0+h} \Big(1 + |X_s|\Big) ds \\ &= C_a^2 \int_{t_0}^{t_0+h} |\partial_\theta X_s| ds + C_a^1 h + C_a^1 \int_{t_0}^{t_0+h} |X_s| ds, \end{aligned}$$

що разом з лемою Гронуола-Белмана дає

$$|\partial_\theta X_{t_0+h}| \leq \Big(C_a^1 h + C_a^1 \int_{t_0}^{t_0+h} |X_s| ds\Big) e^{C_a^2 h}.$$

Тому

$$\begin{aligned} |\partial_\theta X_{t_0+h}|^p &\leq 2^{p-1}\Big((C_a^1 h)^p + (C_a^1)^p \Big(\int_{t_0}^{t_0+h} |X_s| ds\Big)^p\Big) e^{C_a^2 hp} \\ &\leq 2^{p-1}\Big((C_a^1 h)^p + (C_a^1)^p h^{p-1} \int_{t_0}^{t_0+h} |X_s|^p ds\Big) e^{C_a^2 hp}. \end{aligned}$$

Взявши до уваги (13), одержимо після усереднення останньої нерівності

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{x_{t_0}}^\theta |\partial_\theta X_{t_0+h}|^p &\leq 2^{p-1}\Big((C_a^1 h)^p + (C_a^1)^p h^{p-1} \int_{t_0}^{t_0+h} \Big(|x_{t_0}|^p + \frac{\alpha_p}{\beta_p}\Big) ds\Big) e^{C_a^2 hp} \\ &= 2^{p-1}(C_a^1 h)^p \Big(1 + |x_{t_0}|^p + \frac{\alpha_p}{\beta_p}\Big) e^{C_a^2 hp}. \end{aligned}$$

Остаточно, скориставшись співвідношенням (13) ще раз, виводимо

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x^\theta |\partial_\theta X_{t_0+h}|^p &= \mathsf{E}_x^\theta \mathsf{E}_{X_{t_0}}^\theta |\partial_\theta X_{t_0+h}|^p \leq \mathsf{E}_x^\theta \Big(2^{p-1}(C_a^1 h)^p \Big(1 + |X_{t_0}|^p + \frac{\alpha_p}{\beta_p}\Big) e^{C_a^2 hp}\Big) \\ &= 2^{p-1}(C_a^1 h)^p \Big(1 + \mathsf{E}_x^\theta |X_{t_0}|^p + \frac{\alpha_p}{\beta_p}\Big) e^{C_a^2 hp} \leq 2^{p-1}(C_a^1 h)^p \Big(1 + |x|^p + \frac{2\alpha_p}{\beta_p}\Big) e^{C_a^2 hp}, \end{aligned}$$

що завершує доведення леми. □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 3.3. *Нехай виконано умови Леми 3.2. Припускаємо наступне:*

- *існують сталі $C_a^i > 0$, $i = 3, 4$ такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $\theta \in \Theta$*
$$|\partial_{x\theta} a_\theta(x)| \le C_a^3, \quad |\partial_{xx} a_\theta(x)| \le C_a^4.$$
- *для кожного $h > 0$, $p \ge 2$ існують додатні сталі $C_{\mathrm{D}Z}(p, h)$ та $C_{\mathrm{D}^2Z}(p, h)$ такі, що*
$$\mathsf{E}|\mathrm{D}Z_h|^p \le C_{\mathrm{D}Z}(p, h), \quad \mathsf{E}|\mathrm{D}^2 Z_h|^p \le C_{\mathrm{D}^2Z}(p, h).$$

Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$
$$\mathsf{E}_x^\theta|\mathrm{D}X_{t_0+h}|^p \le C_{\mathrm{D}X}(p, h),$$
$$\mathsf{E}_x^\theta|\mathrm{D}^2 X_{t_0+h}|^p \le C_{\mathrm{D}^2X}(p, h),$$
$$\mathsf{E}_x^\theta|\mathrm{D}\partial_\theta X_{t_0+h}|^p \le C_{\mathrm{D}\partial X}(x, p, h),$$
де
$$C_{\mathrm{D}X}(p, h) = C_{\mathrm{D}Z}(p, h) e^{C_a^2 hp},$$
$$C_{\mathrm{D}^2X}(p, h) = 2^{p-1}\Big((C_a^4 h)^p C_{\mathrm{D}X}(2p, h) + C_{\mathrm{D}^2Z}(p, h)\Big) e^{C_a^2 hp},$$
$$C_{\mathrm{D}\partial X}(x, p, h) = 2^{p-1}\Big((C_a^3 h)^p C_{\mathrm{D}X}(p, h) + (C_a^4 h)^p \big(C_{\partial X}(x, 2p, h) C_{\mathrm{D}X}(2p, h)\big)^{\frac{1}{2}}\Big) e^{C_a^2 hp}.$$

Лема 3.4. *Нехай виконано умову (12) Леми 3.2. Нехай послідовність $\{\varepsilon_n, n \ge 1\}$ додатна, строго монотонна та ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n^p$, $p \ge 2$ збігається. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$*
$$\mathsf{E}_x^\theta|\mathrm{D}X_{t_0+h}|^{-p} \le C_{\mathrm{D}X}^-(p, h), \tag{14}$$
де
$$C_{\mathrm{D}X}^-(p, h) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{k+1}^{-p} e^{-h\mu_k} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^p, \quad \mu_k = \mu\Big(u : e^{C_a^2 h}\sqrt{\varepsilon_k} \le |u| \le u_1\Big).$$

Доведення. Скористаємось формулою для $\mathrm{D}X$ із [4]:
$$\mathrm{D}X_{t_0+h} = \mathcal{E}_{t_0+h} \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_s^{-1} \varrho(u) \nu(ds, du), \quad \mathcal{E}_t := \exp\left\{\int_{t_0}^t \partial_x a_\theta(X_\tau) d\tau\right\}. \tag{15}$$
Зауважимо, що для будь-якого $t_0 \le s \le t_0 + h$ за умовою (12), $\mathcal{E}_{t_0+h}\mathcal{E}_s^{-1} \ge e^{-2C_a^2 h}$. Тому
$$|\mathrm{D}X_{t_0+h}| \ge e^{-2C_a^2 h} \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\mathbb{R}} \varrho(u)\nu(ds, du) \ge e^{-2C_a^2 h} \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{|u| \le u_1} u^2 \nu(ds, du) =: \eta_h.$$
Запишемо
$$\mathsf{E}(\eta_h)^{-p} = \sum_{k=1}^\infty \mathsf{E}(\eta_h)^{-p} \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{k+1} < \eta_h \le \varepsilon_k\}} + \mathsf{E}(\eta_h)^{-p} \mathbf{1}_{\{\eta_h > \varepsilon_1\}}$$
$$\le \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{k+1}^{-p} \mathsf{P}\left(\eta_h \le \varepsilon_k\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^p.$$
Оскільки
$$\mathsf{P}\left(\eta_h \le \varepsilon\right) \le \mathsf{P}\left(\int_0^h \int_{\sqrt{\varepsilon} e^{C_a^2 h} \le |u| \le u_1} u^2 \nu(ds, du) = 0\right)$$
$$= \exp\left[-h\mu\Big(u : \sqrt{\varepsilon} e^{C_a^2 h} \le |u| \le u_1\Big)\right],$$

то

$$\mathsf{E}(\eta_h)^{-p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k+1}^{-p} e^{-h\mu_k} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^p.$$

Залишається зауважити, що за умовою $\mathbf{H}$(iv) останній ряд є збіжним. □

Підсумовуючи, з Лем 3.2 – 3.4 виводимо:

Лема 3.5. *Нехай виконано умови Лем 3.2 – 3.4. Припустимо, що існує стала C_δ така, що*

$$\mathsf{E}\delta(1)^8 \le C_\delta.$$

Тоді

$$C_\Xi(x,h) = 27\left(\sqrt[4]{C_{\partial X}(x,16,h)C^-_{\mathrm{D}X}(16,h)}\sqrt{C_\delta}\right.$$
$$\left. + \sqrt[4]{C_{\partial X}(x,16,h)C^-_{\mathrm{D}X}(32,h)}\sqrt{C_{\mathrm{D}^2X}(8,h)} + \sqrt{C_{\mathrm{D}\partial X}(x,8,h)C^-_{\mathrm{D}X}(8,h)}\right), \quad (16)$$

$C_{\Xi^{st}}(h) = C_\Xi(0,h)$.

Доведення. З (11) маємо

$$\mathsf{E}^\theta_x \Xi_h(t_0)^4 = \mathsf{E}^\theta_x\left(\frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\delta(1)}{\mathrm{D}X_{t_0+h}} + \frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\mathrm{D}^2X_{t_0+h}}{(\mathrm{D}X_{t_0+h})^2} - \frac{\mathrm{D}(\partial_\theta X_{t_0+h})}{\mathrm{D}X_{t_0+h}}\right)^4$$
$$\le 3^3\left(\mathsf{E}^\theta_x\left|\frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\delta(1)}{\mathrm{D}X_{t_0+h}}\right|^4 + \mathsf{E}^\theta_x\left|\frac{(\partial_\theta X_{t_0+h})\mathrm{D}^2X_{t_0+h}}{(\mathrm{D}X_{t_0+h})^2}\right|^4 + \mathsf{E}^\theta_x\left|\frac{\mathrm{D}(\partial_\theta X_{t_0+h})}{\mathrm{D}X_{t_0+h}}\right|^4\right)$$
$$\le 3^3\Big(\left(\mathsf{E}^\theta_x|\partial_\theta X_{t_0+h}|^{16}\right)^{\frac14}\left(\mathsf{E}|\delta(1)|^8\right)^{\frac12}\left(\mathsf{E}^\theta_x|DX_{t_0+h}|^{-16}\right)^{\frac14}$$
$$+\left(\mathsf{E}^\theta_x|\partial_\theta X_{t_0+h}|^{16}\right)^{\frac14}\left(\mathsf{E}^\theta_x|D^2X_{t_0+h}|^8\right)^{\frac12}\left(\mathsf{E}^\theta_x|DX_{t_0+h}|^{-32}\right)^{\frac14}$$
$$+\left(\mathsf{E}^\theta_x|D(\partial_\theta X_{t_0+h})|^8\right)^{\frac12}\left(\mathsf{E}^\theta_x|DX_{t_0+h}|^{-8}\right)^{\frac12}\Big)$$
$$\le 3^3\Big((C_{\partial X}(x,16,h))^{\frac14}\left(\mathsf{E}|\delta(1)|^8\right)^{\frac12}\left(C^-_{\mathrm{D}X}(16,h)\right)^{\frac14}$$
$$+(C_{\partial X}(x,16,h))^{\frac14}(C_{\mathrm{D}^2X}(8,h))^{\frac12}\left(C^-_{\mathrm{D}X}(32,h)\right)^{\frac14}$$
$$+(C_{\mathrm{D}\partial X}(x,8,h))^{\frac12}\left(C^-_{\mathrm{D}X}(8,h)\right)^{\frac12}\Big).$$

Далі за Наслідком 3.4 [6] $\mathsf{E}^\theta|X^{st}_h|^p \le \frac{\alpha_p}{\beta_p}$, тому $C_{\Xi^{st}}(h) = C_\Xi(0,h)$. □

4. Приклад

Розглянемо СДР виду (1) з $x_0 = 1$,

$$a_\theta(x) = -2x + \sin(x+\theta), \quad \theta \in (0, 2\pi),$$

$$\mu(du) = \frac{\mathbf{1}_{|u|\le 1}}{|u|^{\frac{11}{4}}}du.$$

Припустимо, що спостереження відбуваються із кроком $h = 1$. Будемо перевіряти ефективність оцінювання методом найменших квадратів, тобто

$$\hat\theta_n = \mathrm{argmin}_{\theta\in\Theta}\sum_{k=1}^n\left(X_{hk} - X_{h(k-1)} - a_\theta(X_{h(k-1)})h\right)^2.$$

Згенеруємо вибірку для $\theta_0 = 1$ об'єму $n = 2000$. Оцінка $\hat\theta_n = 1.04$.

Згенеруємо ще $N = 1000$ вибірок з $\theta = 1.04$, об'єму $n = 2000$ кожна. Для кожної вибірки будуємо оцінку найменших квадратів $\hat{\theta}^k_{2000}$, $k = 1, \ldots, 1000$ та знаходимо

$$s^2_{1000}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{2000} \left(\sqrt{2000}(\hat{\theta}^k_{2000} - 1.02) \right)^2 = 2.98.$$

Знайдемо значення сталих K_1 та K_2 з Леми 3.1. Для цього визначимо сталі $C^1_{\mathsf{P}}(1)$ і C^2_{P} за допомогою Теореми 3.1. Для перевірки умови 1) цієї теореми покладемо $\varphi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x^2 &= 2x(-2x + \sin(x+\theta)) + \int_{\mathbb{R}} ((x+u)^2 - x^2 - 2xu\mathbb{1}_{|u|\le 1})\mu(du) \\ &= -4x^2 + 2x\sin(x+\theta) + 2x \int_{|u|>1} u\mu(du) + \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \mu(du). \end{aligned}$$

Оскільки міра μ зосереджена на $[-1; 1]$, то

$$\mathcal{A}x^2 = -4x^2 + 2x\sin(x+\theta) + \int_{|u|\le 1} |u|^2\mu(du)$$

$$= -3x^2 - (x^2 - 2x\sin(x+\theta) + \sin^2(x+\theta)) + \sin^2(x+\theta) + \int_{|u|\le 1} |u|^2\mu(du)$$

$$= -3x^2 - (x - \sin(x+\theta))^2 + \sin^2(x+\theta) + \int_{|u|\le 1} |u|^2\mu(du)$$

$$\le -3x^2 + 1 + \int_{|u|\le 1} |u|^2\mu(du) = -3x^2 + 9,$$

тобто, при $\alpha = 3$, $\beta = 9$ умову 1) виконано.

Для виконання умови 2) достатньо, щоб $\Pi > 0$ (див. [1, Зауваження 2.3]). Оскільки $\partial_x a_\theta(x) = -2 + \cos(x+\theta)$, то за формулою Тейлора

$$a_\theta(x+u) - a_\theta(x) = (-2 + \cos(\xi+\theta))u, \quad \xi \in (x, x+u).$$

Тому $|a_\theta(x+u) - a_\theta(x)| \ge |u|$, тобто

$$\Pi \ge \mu\Big(u \in \Gamma : \rho < |u| \le \varrho\Big) = 2\int_\rho^\varrho \frac{du}{u^{\frac{11}{4}}}.$$

В останній нерівності покладемо $\rho = \frac{1}{3}$, $\varrho = 1$, $\Gamma = \big\{u \colon |u| > \frac{1}{3}\big\}$. Тоді $\Pi \ge 6.6726$. Далі, з (1) одержимо

$$A_1 = 3, \quad A_2 = 1.$$

Тоді співвідношення 2) будуть виконуватись, якщо покласти

$$\varepsilon = 6 \cdot 10^{-6}, \quad R = 9, \quad \zeta = 0.01, \quad t = 0.05, \quad \gamma = 0.8, \quad \varkappa = 2 \cdot 10^{-8}, \quad \delta = 0.8.$$

Для перевірки умови 3) та отримання сталих $C^1_{\mathsf{P}}(1)$ і C^2_{P} використаємо оцінки для P_2 та χ, отримані в [1] (формули (39) та (40) відповідно). Оберемо

$$R_0 = 3, \quad R_1 = 3, \quad t_1 = 20, \quad c = 0.67.$$

Тоді умова 3) виконана та

$$\chi \ge 0.6667, \quad \mathrm{P}_2 \le 0.0217.$$

Зазначимо, що для обраних констант справедлива оцінка

$$\mathrm{P}_1 \ge 0.2837.$$

Тому

$$C^1_{\mathsf{P}}(1) = 23.0499, \quad C^2_{\mathsf{P}} = 0.1852.$$

Знайдемо тепер $C_\Xi(1,1)$ та $C_{\Xi^{st}}(1)$. В нашому випадку

$$C_a^1 = C_a^3 = C_a^4 = 1, \quad C_a^2 = 3.$$

Покладемо $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$. Довизначимо функцію ϱ на множині $\{\frac{1}{2} < |u| < 1\}$ наступним чином

$$\varrho(u) = \begin{cases} u^2, & |u| \le \frac{1}{2}, \\ P(u), & \frac{1}{2} < |u| < 1, \\ 0, & |u| \ge 1, \end{cases}$$

де $P(u) = -104|u|^5 + 396|u|^4 - 582|u|^3 + 410|u|^2 - 138|u| + 18$. Тоді $\varrho \in C^2$, $\varrho(u) \le u^2$, $|\varrho'(u)| \le \frac{3}{2}$.

Спочатку знайдемо сталі $C_{\mathrm{D}Z}(8,1)$, $C_{\mathrm{D}Z}(16,1)$, $C_{\mathrm{D}^2 Z}(8,1)$ та оцінимо величину $\mathsf{E}\delta(1)^8$. Позначимо $\int_0^t \int_{|u|\le 1} \varrho(u)\nu(ds,du) = \varrho * \nu_t$. За формулою Іто [10, с. 198], для будь-якого натурального m

$$(\varrho * \nu_t)^m = \int_0^t \int_{|u|\le 1} \left((\varrho * \nu_{s-} + \varrho(u))^m - (\varrho * \nu_{s-})^m\right) \nu(ds,du)$$
$$= \int_0^t \int_{|u|\le 1} \sum_{k=1}^m C_m^k \varrho^k(u) \left(\varrho * \nu_{s-}\right)^{m-k} \nu(ds,du).$$

Зауважимо, що оскільки $\varrho(u) \le u^2$, то

$$\int_0^t ds \int_{|u|\le 1} \varrho^k(u)\mu(du) \le 2t \int_0^1 u^{(8k-11)/4} du = \frac{8t}{8k-7}.$$

Тому

$$\mathsf{E}\left(\varrho * \nu_t\right)^m = \sum_{k=1}^m C_m^k \int_{|u|\le 1} \varrho^k(u)\mu(du) \int_0^t \mathsf{E}\left(\varrho * \nu_{s-}\right)^{m-k} ds$$
$$\le 8t \sum_{k=1}^m \frac{C_m^k}{8k-7} \int_0^t \mathsf{E}\left(\varrho * \nu_s\right)^{m-k} ds.$$

Для $t = 1$ та $m = 2l$ одержимо

$$\mathsf{E}\left(\varrho * \nu_1\right)^{2l} \le \sum_{k=0}^{2l-1} \frac{8C_{2l}^k}{8(2l-k)-7} \mathsf{E}\left(\varrho * \nu_1\right)^k \le 8C_{2l}^l \sum_{k=0}^{2l-1} \mathsf{E}\left(\varrho * \nu_1\right)^k$$
$$\le 8C_{2l}^l \prod_{k=1}^{2l-1} (8C_k^{[k/2]} + 1) \le 8 \cdot 9^{2l-1} \prod_{k=1}^{2l} C_k^{[k/2]} = 8 \cdot 9^{2l-1} \prod_{k=1}^{l} C_{2k}^k C_{2k-1}^{k-1}$$
$$= 4 \cdot 9^{2l-1} \prod_{k=1}^{l} \frac{((2k)!)^2}{(k!)^4}.$$

Використовуючи формулу Стірлінга отримаємо

$$\mathsf{E}\left(\varrho * \nu_1\right)^{2l} \le \frac{9^{2l-1} 4^{l^2+l+1} e^l}{(\pi l)^l}.$$

Тому

$$\mathsf{E}|\mathrm{D}Z_1|^8 \le \frac{2^{34}3^{14}e^4}{\pi^4} =: C_{\mathrm{D}Z}(8,1), \quad \mathsf{E}|\mathrm{D}Z_1|^{16} \le \frac{2^{122}3^{30}e^8}{\pi^8} =: C_{\mathrm{D}Z}(16,1).$$

Оскільки

$$\mathsf{E}|\mathrm{D}^2 Z_1| \le \frac{3}{2}\mathsf{E}|\mathrm{D}Z_1|,$$

то

$$C_{\mathrm{D}^2Z}(8,1)=\frac{3^8}{2^8}C_{\mathrm{D}Z}(8,1)=\frac{2^{26}3^{22}e^4}{\pi^4}.$$

За нерівністю Буркхольдера (див. напр. [11, с. 678]) маємо

$$\mathsf{E}\delta(1)^8\le\left(\frac{18\cdot 8^{3/2}}{7^{1/2}}\right)^8\mathsf{E}\left(\int_0^1\int_{|u|\le 1}\left(\frac{(\sigma(u)\varrho(u))'}{\sigma(u)}\right)^2\nu(ds,du)\right)^4.$$

За побудовою функції ϱ маємо, що $\left|\frac{(\sigma(u)\varrho(u))'}{\sigma(u)}\right|\le\frac{19}{4}|u|$. Тому

$$\mathsf{E}\delta(1)^8\le\frac{2^{36}3^{16}19^4}{7^4}\mathsf{E}\left(\int_0^1\int_{|u|\le 1}u^2\nu(ds,du)\right)^4\le\frac{2^{48}3^{22}19^4e^2}{7^4\pi^2}.$$

Далі

$$C_{\mathrm{D}X}(8,1)=\frac{2^{34}3^{14}e^{28}}{\pi^4},\quad C_{\mathrm{D}X}(16,1)=\frac{2^{122}3^{30}e^{56}}{\pi^8},$$
$$C_{\mathrm{D}^2X}(8,1)=2^7\left(\frac{2^{122}3^{30}e^{56}}{\pi^8}+\frac{2^{26}3^{22}e^4}{\pi^4}\right)e^{24}\le\frac{2^{130}3^{30}e^{80}}{\pi^8}.$$

Для знаходження $C_{\partial X}(1,16,1)$ перевіримо умову Ляпунова для функції $\varphi(x)=x^{16}$, $x\in\mathbb{R}$. Маємо

$$\mathcal{A}x^{16}=16x^{15}(-2x+\sin(x+\theta))+\int_{\mathbb{R}}\Big((x+u)^{16}-x^{16}-16x^{15}u\mathbb{1}_{|u|\le 1}\Big)\mu(du).$$

Зазначимо, що міра μ зосереджена на $[-1,1]$ та симетрична, а також для всіх $k\ge 2$

$$\int_{|u|\le 1}u^{2k}\mu(du)\le 1.$$

Тому

$$\mathcal{A}x^{16}\le -32x^{16}+16x^{15}\sin(x+\theta)+\sum_{k=0}^{6}C_{16}^{2k}x^{2k}+960x^{14}$$
$$=-31x^{16}-x^{14}(x-8\sin(x+\theta))^2+64x^{14}\sin^2(x+\theta)+\sum_{k=0}^{6}C_{16}^{2k}x^{2k}+960x^{14}.$$

Для кожного $k=0,\dots,7$ та $a_k>0$ можна знайти таке $b_k>0$, що

$$-x^{16}+a_kx^{2k}\le b_k\quad\text{для всіх } x.$$

Тому

$$\mathcal{A}x^{16}\le -24x^{16}+2^{57}7^7,$$

тобто, $\alpha_{16}=24$, $\beta_{16}=2^{57}7^7$. Тоді

$$C_{\partial X}(1,16,1)=2^{15}\left(1+1+\frac{2^{58}7^7}{24}\right)e^{48}\le\frac{2^{71}7^7e^{48}}{3},$$
$$C_{\mathrm{D}\partial X}(1,8,1)\le\frac{2^{105}3^{15}7^4e^{76}}{\pi^4}.$$

Далі знаходимо $C^-_{\mathrm{D}X}(8,1)$, $C^-_{\mathrm{D}X}(16,1)$, $C^-_{\mathrm{D}X}(32,1)$. Для послідовності $\varepsilon_n=\frac{1}{n^{8/7}}$, $n\ge 1$ маємо

$$\mu_n=\frac{8}{7}\left(\frac{n}{e^{21/4}}-2^{7/4}\right).$$

Далі

$$C^-_{\mathrm{D}X}(p,1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)^{8p/7}\exp\left(-\frac{8}{7}\left(\frac{n}{e^{21/4}}-2^{7/4}\right)\right)+1\le e^4\sum_{n=2}^{+\infty}n^{8p/7}\exp\left(-\frac{8n}{7e^{21/4}}\right).$$

Неважко показати, що для всіх $n \geq 1$

$$n^{8p/7} \exp\left(-\frac{8n}{7e^{21/4}}\right) \leq \left(\frac{4p+7}{4}\right)^{\frac{8p+14}{7}} e^{\frac{17}{14}(4p+7)} \frac{1}{n^2}.$$

Тому

$$C^-_{\mathrm{D}X}(p,1) \leq e^4 \left(\frac{4p+7}{4}\right)^{\frac{8p+14}{7}} e^{\frac{17}{14}(4p+7)}.$$

Отже

$$C^-_{\mathrm{D}X}(8,1) \leq \frac{39^{12}e^{52}}{2^{22}}, \quad C^-_{\mathrm{D}X}(16,1) \leq 2^{21}3^{42}e^{91}, \quad C^-_{\mathrm{D}X}(32,1) \leq 34^{39}e^{168}.$$

Остаточно

$$C_\Xi(1,1) = C_{\Xi^{st}}(1) \leq \frac{2^{93}3^{19}7^2 17^{10}e^{94}}{\pi^4},$$

звідки

$$K_1 \leq 86.1, \quad K_2 = 0.0926.$$

Припустимо, що нам необхідно досягти точності $\Delta = 0.01$. Розв'язавши рівняння

$$\exp\{K_1 - K_2 t_0\} = 0.01,$$

пересвідчуємось, що для такої точності достатньо взяти $n_0 = 980$. Генеруємо ще 1000 траєкторій з $\theta = 1.04$ до моменту часу $t = 981$ і по відрізках цих траєкторій між 980 і 981 секундами обчислюємо $\Xi_1^k(980)$, $k = 1, \dots, 1000$. Для цього використовуємо формулу (11), складники якої шукаємо з системи (10) (останню розв'язуємо методом Ейлера). Далі знаходимо

$$J_{1000}(1.04, 980) = \frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000} \Xi_1^k(980)^2 = 5.64.$$

Остаточно обчислюємо

$$\sqrt{J_{1000}(1.04,980)s^2_{1000}(1.04)} = 4.1.$$

Це означає, що в нашому випадку ефективність оцінки найменших квадратів не більше ніж в 4.1 рази гірша від теоретичної нижньої границі ефективності, що є непоганим результатом в умовах даної моделі. Крім того, доля випадковості втраченої при заміні умовного математичного сподівання на безумовне не більше ніж чотирикратна.

5. Подяка

Автори вдячні О. М. Кулику за консультації і змістовні поради під час підготовки даної роботи.

Література

1. S. V. Bodnarchuk and A. M. Kulik, *Stochastic control based on time-change transformations for stochastic processes with Lévy noise*, Probab. Theory and Mat. Stat. **86** (2012), 11–27.
2. L. Chaumont and G. Uribe Bravo, *Markovian bridges: Weak continuity and pathwise constructions*, Ann. Probab. **39(2)** (2011), 609–647.
3. J. Hajek, *Local asymptotic minimax admissibility in estimation*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1971, pp. 175–194.
4. D. O. Ivanenko and A. M. Kulik, *Malliavin calculus approach to statistical inference for Lévy driven SDE's*, Methodol. Comput. Appl. Probab. (2013).
5. D. O. Ivanenko and A. M. Kulik, *LAN property for discretly observed solutions to Lévy driven SDE's*, Modern Stochastics: Theory and Appl. **1** (2014), 33–47.
6. A. M. Kulik, *Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise*, Stochastic Processes and Appl. **119** (2009), no. 2, 602–632.

7. L. Le Cam, *Limits of experiments*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1971, pp. 245–261,
8. L. Le Cam and G. L. Yang, *Asymptotics in Statistics*, Springer, 1990.
9. H. Masuda, *Ergodicity and exponential β-mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps*, Stoch. Proc. Appl. **117** (2007), 35–56.
10. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, "Наукова думка", Киев, 1982.
11. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, МЦНМО, Москва, 2004.

НТУУ "КПІ", пр. Перемоги 37, 03056, Київ, Україна

КНУ імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64, 01033, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: ida@univ.net.ua

Надійшла 21/05/2015