Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 23–27

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 23–27

ВПЛИВ СТРЕС-ФАКТОРУ НА НЕТТО-ПРЕМІЮ ПРИ СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ ВДІВЦЯ. ДОВЕДЕННЯ

УДК 519.21

В. В. ГОЛОМОЗИЙ, М. В. КАРТАШОВ І Ю. М. КАРТАШОВ

Анотація. Ми розглядаємо модель спільного страхування життя з урахуванням стрес фактору. Використано метод максимального зклеювання неоднорідних за часом ланцюгів Маркова, доведено теорему про стійкість математичного сподівання функцій від моментів Маркова. Дана частина статті містить доведення результатів що були опубліковані авторами раніше.

Abstract. We consider the model of joint life insurance with the stress factor. The framework for a maximal coupling of time inhomogeneous Markov chains is used, the theorem on the stability of expectations of a function from a Markov moment is proved. This part of paper contains proofs previously published results of authors.

Аннотация. Мы рассматриваем модель совместного страхования жизни с учетом стресс фактора. Использован метод максимального склеивания неоднородных цепей Маркова, доказана теорема о стойкости математического ожидания функции от моментов Маркова. Данная часть статьи содержит доказательства результатов, опубликованных авторами ранее.

1. Вступ

В цій роботі представлені доведення результатів, що опубліковані раніше в [1] та були виключені з книги редакторами. Ці доведення базуються на методі склеювання викладеному в [6], та розширюють результати цієї роботи на неоднорідні за часом ланцюги Маркова.

Метод склеювання та максимальне склеювання викладені в книзі Т. Ліндвала [8].

В цій роботі ми розглядаємо дискретний фазовий простір, хоча аналогічна конструкція максимального склеювання можлива в загальному випадку. Конструкція для однорідних за часом ланцюгів може бути знайдена у роботі [8], с. 18, розділ присвячений γ-склеюванню.

В цій роботі ми використовуємо загальні ідеї щодо стійкості ланцюгів Маркова та процесів, що представлені в роботах [4], [5]. Базові результати сучасної теорії стохастичної стікості ланцюгів Маркова викладено в роботі [9].

В попередніх роботах авторів [2], [3], можна знайти результати присвячені стійкості, що використовують метод склеювання для ланцюгів Маркова (включаючи неоднорідний за часом випадок). Однак в тих роботах немає результатів щодо функціоналів від моментів зупинки.

Робота [1], що згадана вище включає приблизний обрахунок страхових премій для сумісного страхування життя у випадку наявності малого стрес-фактору. Також у роботі приводяться числові приклади.

Нумерація теорем, означень, лем та формул внизу з префіксом 14. співпадає з аналогічними зі статті [1].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Метод склеювання, максимальне склеювання, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів ланцюгів Маркова.

2. Основні означення.

Розглянемо два неоднорідних за часом ланцюги Маркова X та X' з дискретним фазовим простором $E = \{i, j, k, l, ...\}$, та матрицями перехідних ймовірностей на t-му кроці (з моменту t до моменту $t+1$) $P_t = (P_{ij}^{(t)})$ та $P'_t = (P_{ij}^{\prime(t)})$ відповідно. Ймовірнісні міри та математичні сподівання ланцюгів X та X', які стартують в момент $t = 0$ зі стану i ми позначимо як P_i, E_i та P'_i, E'_i відповідно.

Перехідні ймовірності за $n \geq 1$ кроків з моменту t до моменту $t+n$ задані матрицями

$$P^{(t,n)} = \prod_{s=t}^{t+n-1} P_s, \quad P^{\prime(t,n)} = \prod_{s=t}^{t+n-1} P'_s, \quad t \geq 0.$$

Введемо наступні позначення для відносної різниці перехідних ймовірностей та коефіцієнт перемішування за один крок для ланцюгів X, X',

$$\rho_t(i,j) = (P_{ij}^{(t)} - P_{ij}^{\prime(t)})^+ \ / \ P_{ij}^{(t)}, \quad \rho'_t(i,j) = (P_{ij}^{\prime(t)} - P_{ij}^{(t)})^+ \ / \ P_{ij}^{\prime(t)}, \tag{1}$$

де $x^+ = \max(x, 0)$, і за означенням $0/0 = 0$, та

$$\varepsilon_t = \sup_{i,j \in E} \rho_t(i,j), \quad \varepsilon'_t = \sup_{i,j \in E} \rho'_t(i,j), \ t \geq 0. \tag{2}$$

Розглянемо сігма-алгебри $\mathfrak{F}_n = \sigma[X_t, t \leq n]$, $\mathfrak{F}'_n = \sigma[X'_t, t \leq n]$. Припустимо що X_0, X'_0 невипадкові та фіксовані.

Нехай $\theta \geq 1$ момент зупинки відносно потоку сигма-алгебр $(\mathfrak{F}_n)$, та $\mathfrak{F}_\theta$ - вимірна фунція φ визначені набором множин $\{B_n, n \geq 1\}$, $B_n \subset E^n$, та функціями $\varphi_n : E^n \to \mathbb{R}_+$, так що для будь-якого $n \geq 1$:

$$\{\theta = n\} = \{(X_1, \cdots, X_n) \in B_n\}, \quad \varphi 1_{\{\theta = n\}} = \varphi_n(X_1, \cdots, X_n). \tag{3}$$

Означення 14.1. *Пара (θ', φ') з $(\mathfrak{F}'_n)$-моментом зупинки θ' та $\mathfrak{F}'_{\theta'}$-вимірною випадковою величиною φ' називається відповідною парі (θ, φ), якщо події $\{\theta' = n\}$ та випадкові величини $\varphi' 1_{\{\theta'=n\}}$ визначені через $(X'_1, \cdots, X'_n)$ одними і тими ж множинами B_n, та φ_n як і в* (3).

Теорема 14.2. *Нехай $\theta \geq 1$ це $(\mathfrak{F}_n)$-момент зупинки, та припустимо випадкова величинаφ невід'ємна та$\mathfrak{F}_\theta$-вимірна. Якщо пара (θ', φ') відповідна до пари (θ, φ), то виконані наступні нерівності :*

$$\mathrm{E}_i[\varphi\ \underline{\varepsilon}(\theta)] - \mathrm{E}'_i[\varphi'\ \overline{\varepsilon}'(\theta')] \leq \mathrm{E}_i\varphi - \mathrm{E}'_i\varphi' \leq \mathrm{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)] - \mathrm{E}'_i[\varphi'\ \underline{\varepsilon}'(\theta')], \tag{4}$$

якщо величини $\overline{\varepsilon}(\theta)$, $\underline{\varepsilon}(\theta)$, $\overline{\varepsilon}'(\theta')$, $\underline{\varepsilon}'(\theta')$ задовільняють наступні нерівності майже напевно:

$$\overline{\varepsilon}(\theta) \geq 1 - \prod_{s=0}^{\theta-1}(1 - \rho_s(X_s, X_{s+1})) \geq \underline{\varepsilon}(\theta) \geq 0, \tag{5}$$

$$\overline{\varepsilon}'(\theta') \geq 1 - \prod_{s=0}^{\theta'-1}(1 - \rho'_s(X'_s, X'_{s+1})) \geq \underline{\varepsilon}'(\theta') \geq 0. \tag{6}$$

Зауваження 1. За означенням (2) для того, щоб задовільнити (5),(6) достатньо визначити:

$$\overline{\varepsilon}(\theta) = 1 - \prod_{t=0}^{\theta-1}(1 - \varepsilon_t), \quad \underline{\varepsilon}(\theta) = 0, \quad \overline{\varepsilon}'(\theta') = 1 - \prod_{t=0}^{\theta'-1}(1 - \varepsilon'_t), \quad \underline{\varepsilon}'(\theta') = 0. \tag{7}$$

Приклад 1. Нехай моменти зупинки θ, θ' такі, що для довільного $n \geq 1$

$$\{\theta = n\} = \{(X_1, \cdots, X_n) \in B_n\}, \quad \{\theta' = n\} = \{(X'_1, \cdots, X'_n) \in B_n\}. \tag{8}$$

з тими ж $B_n \subset E^n$.

Тоді для всіх $T \subset \mathbb{Z}_+$ виконані наступні нерівності:

$$-\sum_{t\geq 0} \varepsilon'_t \mathrm{P}'_i(\theta' \in T, \theta' > t) \leq \mathrm{P}_i(\theta \in T) - \mathrm{P}'_i(\theta' \in T) \leq \sum_{t\geq 0} \varepsilon_t \mathrm{P}_i(\theta \in T, \theta > t), \tag{9}$$

$$-\sum_{t\geq 0} \varepsilon'_t \mathrm{E}'_i(\theta' 1_{\theta'>t}) \leq \mathrm{E}_i\theta - \mathrm{E}'_i\theta' \leq \sum_{t\geq 0} \varepsilon_t \mathrm{E}_i(\theta 1_{\theta>t}). \tag{10}$$

Справді, ми можемо вибрати $\varphi = 1_{\theta\in T}$. Тоді припущення з Означення 14.1 випливає з (8). Для другої нерівності в (4), використовуючи (2) та (7) отримаємо оцінку

$$\mathrm{E}_i[1_{\theta\in T}\ \overline{\varepsilon}(\theta)] \leq \mathrm{E}_i[1_{\theta\in T}\ \sum_{t=0}^{\theta-1} \varepsilon_t] = \sum_{t\geq 0} \mathrm{P}_i[\theta \in T, \theta > t]\ \varepsilon_t.$$

Аналогічна нерівність виконана для θ' Тоді (9) доведено.

Доведення (10) проводиться аналогічно з $\varphi = \theta$ та використавши оцінку:

$$\mathrm{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)] \leq \mathrm{E}_i[\theta\ \sum_{t=0}^{\theta-1} \varepsilon_t] = \sum_{t\geq 0} \mathrm{E}_i[\theta 1_{\theta>t}]\ \varepsilon_t \quad \boxdot$$

3. Доведення теорем

Розглянемо $\overline{X} = (X_t, X'_t, d_t, t \geq 0)$ - ланцюг, що визначено в розділах 14.3.2-14.3.4 [1], де

$$d_t = 1_{\{X_t = X'_t\}},\ t \geq 0.$$

Позначимо через τ момент першого розклеювання для ланцюга $\overline{X}$, який стартує зі стану $(i, i, 1)$:

$$\tau = \inf\{t \geq 1 : d_t = 0\}. \tag{11}$$

Лема 4.1. *Для довільного стартового стану $i_0 = i \in E$ та для довільного набору $\{i_1, i_2, \ldots, i_{s+1}\} \subset E$, де $0 \leq s < t$ мають місце наступні рівності:*

$$\mathrm{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid \tau > s,\ X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \rho_s(i_s, i_{s+1}), \tag{12}$$

$$\mathrm{P}_{ii1}[\tau > s \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho_r(i_r, i_{r+1})), \tag{13}$$

$$\mathrm{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \rho_s(i_s, i_{s+1}) \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho_r(i_r, i_{r+1})). \tag{14}$$

Доведення.

Як і в роботі [1] введемо позначення

$$Q_{ij}^{(s)} = \min(P_{ij}^{(s)}, P_{ij}^{\prime(s)}) = \mathrm{P}_{ii1}(\tau > s, X_s = j) = P_{ij}^{(s)} - R_{ij}^{(s)},$$
$$R_{ij}^{(s)} = (P_{ij}^{(s)} - P_{ij}^{\prime(s)})^+ = \rho_s(i,j) P_{ij}^{(s)}.$$

Для заданих $i_1, ..., i_t \in E$ та $0 \leq s < t$ визначимо випадкові події

$$A_s = \{\overline{X}_1 = (i_1, i_1, 1), ..., \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)\},$$
$$C_{s+1} = \{X_{s+1} = i_{s+1}, ..., X_t = i_t\}.$$

Оскільки рівності $X_r = X'_r, r \leq s$, еквівалентні тому, що відбудеться подія $\{\tau > s\}$, ліва частина (12) рівна

$$\mathrm{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid A_s,\ C_{s+1}] = \sum_{l\in E} \mathrm{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0) \mid A_s,\ C_{s+1}] =$$
$$\sum_{l\in E} \mathrm{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0), A_s,\ C_{s+1}] / \mathrm{P}_{ii1}[A_s,\ C_{s+1}] =$$
$$\sum_{l\in E} \mathrm{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0),\ C_{s+1} \mid A_s]\ / \mathrm{P}_{ii1}[\ C_{s+1} \mid A_s] =$$

$$\sum_{l\in E} \mathrm{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0),\ C_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)]\ /$$
$$/\mathrm{P}_{ii1}[\ C_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)] =$$
$$\sum_{l\in E} \mathrm{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0) \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)]\times$$
$$\mathrm{P}_{ii1}[C_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1), \overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0)]\ /$$
$$/\mathrm{P}_{ii1}[\ C_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)] =$$
$$\sum_{l\in E} h^{(s)}_{i_s, i_{s+1} l}\ \prod_{r=s+1}^{t} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} / \prod_{r=s}^{t} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} = \sum_{l\in E} h^{(s)}_{i_s, i_{s+1} l} / P^{(s)}_{i_s, i_{s+1}} =$$
$$R^{(s)}_{i_s, i_{s+1}} / P^{(s)}_{i_s, i_{s+1}} = \rho_s(i_s, i_{s+1}),$$

де була використана марківська властивість ланцюга $\overline{X}$, формули (14.13), (14.25) [1], та рівності

$$\sum_{l\in E} h^{(s)}_{i,jl} / P^{(s)}_{ij} = \sum_{l\in E} R^{(s)}_{ij} R'^{(s)}_{il}\ /\ (1 - q^{(s)}_i) P^{(s)}_{ij} =$$
$$R^{(s)}_{ij} / P^{(s)}_{ij} = (P^{(s)}_{ij} - Q^{(s)}_{ij}) / P^{(s)}_{ij} = \rho_s(i, j).$$

Отже (12) доведено.

Далі, ліва частина (13) рівна

$$\mathrm{P}_{ii1}[A_s \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$
$$\mathrm{P}_{ii1}[A_s, X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] / \mathrm{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$
$$\mathrm{P}_{ii1}[A_s, C_{s+1}] / \mathrm{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$
$$\mathrm{P}_{ii1}[A_s]\ \mathrm{P}_{ii1}[C_{s+1} \mid A_s] / \mathrm{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$
$$\left(\prod_{r=0}^{s-1} Q^{(r)}_{i_r, i_{r+1}}\right)\left(\prod_{r=s}^{t-1} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}}\right) / \left(\prod_{r=0}^{t-1} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}}\right) =$$
$$\prod_{r=0}^{s-1} Q^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} / P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} = \prod_{r=0}^{s-1}\left(1 - R^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} / P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}}\right) = \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho^{(r)}(i_r, i_{r+1})).$$

Тут ми викоритовуємо вираз для ймовірності $\mathrm{P}_{ii1}[A_s]$, що є наслідком марківської властивості $\overline{X}$ та рівність:

$$\mathbb{P}[\tau > s+1, \overline{X}_{s+1} = (j, j, 1) \mid \tau > s, \overline{X}_s = (i, i, 1)] = Q^{(s)}_{ij},$$

що випливає з (14.13).

Нарешті, (14) отримується з добутку (12) та (13) ⊡

Доведення теореми 14.2.

Помітимо, що на множині $\{\theta < \tau\}$ маємо $(X_1, \cdots, X_\theta) = (X'_1, \cdots, X'_\theta)$, отже $\varphi = \varphi'$ за такої події за означенням відповідних пар:

$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi, \theta < \tau] = \sum_{t\ge 1} \mathrm{E}_{ii1}[\varphi 1_{\{\theta = t\}},\ t < \tau] =$$
$$\sum_{t\ge 1} \mathrm{E}_{ii1}[\varphi_t(X_1, ... X_t) 1_{\{(X_1, ... X_t)\in B_t\}} 1_{\{\theta = t\}},\ t < \tau] =$$
$$\sum_{t\ge 1} \mathrm{E}_{ii1}[\varphi'_t(X'_1, ... X'_t) 1_{\{(X'_1, ... X'_t)\in B_t\}} 1_{\{\theta' = t\}},\ t < \tau] =$$
$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi', \theta' < \tau].$$

Тоді:

$$\mathrm{E}_i\varphi - \mathrm{E}'_i\varphi' = \mathrm{E}_{ii1}[\varphi, \theta \ge \tau] - \mathrm{E}_{ii1}[\varphi', \theta' \ge \tau]. \tag{15}$$

Використавши (3), Лему 4.1, (13), та (14.4) отримаємо, що:

$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi,\theta\geq\tau]=\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}[\varphi 1_{\{\theta=t\}},\ \tau\leq t]=$$
$$\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}[\mathbb{E}(\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ 1_{\{\tau\leq t\}}\mid X_1,...X_t)]=$$
$$\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \mathbb{P}(\tau\leq t\mid X_1,...X_t)]=$$
$$\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \left(1-\textstyle\prod_{s=0}^{t-1}(1-\rho_s(X_s,X_{s+1}))\right)\right]=$$
$$\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \left(1-\textstyle\prod_{s=0}^{\theta-1}(1-\rho_s(X_s,X_{s+1}))\right)\right]\leq$$
$$\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\overline{\varepsilon}(\theta)\right]=\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi 1_{\{\theta=t\}}\overline{\varepsilon}(\theta)\right]=$$
$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)]=\mathrm{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)], \tag{16}$$
де було застосовано (14.25).

Комбінація (16) та останніх нерівностей дає оцінку (4). Нерівність із Зауваження 1 очевидним чином випливає з (2).

Остання частина в третьому рядку знизу в нерівності (16) може бути оцінена величиною $\underline{\varepsilon}(\theta)$ в (5), отже отримаємо:
$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi,\theta\geq\tau]\leq\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \overline{\varepsilon}(\theta)\right]=\mathrm{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)],$$
$$\mathrm{E}_{ii1}[\varphi,\theta\geq\tau]\geq\sum_{t\geq1}\mathrm{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \underline{\varepsilon}(\theta)\right]=\mathrm{E}_i[\varphi\ \underline{\varepsilon}(\theta)]. \tag{17}$$

Аналогічним чином доводиться відповідна нерівність для $\mathrm{E}_{ii1}[\varphi',\theta'\geq\tau]$.

Підставляючи ці чотири нерівності в (15), отримаємо дві нерівності в (4).⊡

Література

1. Y. Kartashov, V. Golomoziy, and N. Kartashov, *The impact of stress factor on the price of widow's pension*, Modern Problems in Insurance Mathematics, (D. Silvestrov and A. Martin-Lof, eds.), E. A. A. Series, Springer, 2014, pp. 223–237.
2. V. V. Golomoziy, *Stability of time-inhomogeneous Markov chains*, Visnik Kyivskogo Universitetu. Series: Phisycs and Mathematics **4** (2009), 10–15. (Ukrainian)
3. V. V. Golomoziy, *Subgeometrical estimate for stability for time-inhomogeneous Markov chians*, Theory Probab. Appl. **81** (2010), 31–46.
4. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
5. N. V. Kartashov, *The ergodicity and stability of quasi-homogeneous Markov semigroups of operators*, Theor. Probability and Math. Statist. **72** (2006), 59–68.
6. N. V. Kartashov and V. V. Golomoziy, *Maximal coupling and stability of discrete Markov chains I*, Theor. Probability and Math. Statist. **86** (2012), 81–92. (Ukrainian)
7. N. V. Kartashov and V. V. Golomoziy, *Maximal coupling and stability of discrete Markov chains II*, Theor. Probability and Math. Statist. **87** (2012), 47–59. (Ukrainian)
8. T. Lindvall, *Lectures on Coupling Method*, Dover Publication, 2002.
9. S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Надійшла 23/12/2014