Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 92, 2015, стор. 28–40
Teor. Ǐmovir. ta Matem. Statyst. No. 92, 2015, pp. 28–40

ПРО ЙМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО DP-ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ДОВІРЧОСТІ СИСТЕМ ПОКРИТТІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРНОСТІ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

УДК 519.21

М. Х. ІБРАГІМ І Г. М. ТОРБІН

Стаття присвячується 90-річному ювілею академіка НАН України Володимира Семеновича Королюка.

Анотація. Робота присвячена розвитку ймовірнісного підходу до дослідження перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича. У роботі вперше встановлено зв'язки між фрактальною довірчістю локально тонких систем покриттів та DP-властивостями відповідних функцій розподілу. Знайдено необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними Q^*-символами.

Abstract. The paper is devoted to the development of probabilistic approach to transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. We found new relations between fractal faithfulness of fine covering systems and DP-properties of related probability distribution functions. Necessary and sufficient conditions for probability distribution functions of random variables with independent Q^*-symbols to be DP-functions are also found.

Аннотация. Работа посвящена развитию вероятностного подхода к исследованию преобразований, которые сохраняют размерность Хаусдорфа–Безиковича. В работе впервые установлены связи между фрактальной доверительностью локально тонких систем покрытий и DP-свойствами соответствующих функций распределения. Найдены необходимые и достаточные условия сохранения размерности Хаусдорфа–Безиковича функциями распределения случайных величин с независимыми Q^*-символами.

1. Вступ

Міра Хаусдорфа та розмірність Хаусдорфа–Безиковича є основними інструментами дослідження у теорії фракталів, з якими повязана значна кількість відкритих проблем. Задача знаходження чи хоча б оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича залишається нерозв'язаною навіть для класу двовимірних самоафінних фракталів, що задовольняють умову відкритої множини. Тому розвиток методів обчислення вказаної фрактальної розмірності є важливим як з точки зору розвитку загальної теорії, так і для дослідження фрактальних властивостей конкретних сімейств фрактальних множин. Один з підходів, який почав інтенсивно розвиватись протягом

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G30, 11K55, 28A80.

Ключові слова і фрази. Сингулярно неперервні розподіли ймовірностей, Q^*-розклади, DP-перетворення, довірчі системи покриттів, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа ймовірнісної міри.

Дослідження першого автора виконані за сприяння проекту "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування" (МОН України).

Дослідження другого автора виконані за сприяння проектів STREVCOMS, проекту "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування" (МОН України) та фонду Олександра фон Гумбольдта.

останніх 5 років, полягає у дослідженні довірчості сімейства покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича та дослідження порівнянності (непорівнянності) породжених мір з класичною мірою Хаусдорфа.

Нагадаємо, що сімейство Φ_M підмножин метричного простору (M, ρ) називається *сімейством локально тонких покриттів* (СЛТП) множини M, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ $(E_j \in \Phi_M,\ d(E_j) \leq \varepsilon,\ \forall j \in \mathbb{N})$: $M \subset \bigcup_j E_j$.

Також нагадаємо, що α-мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ відносно заданого СЛТП Φ_M називається

$$H^\alpha(E, \Phi_M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{d(E_j) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j d\left(E_j\right)^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi_M),$$

де інфімум береться за всеможливими не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ множини E, де $E_j \in \Phi_M$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Якщо $(M, \rho) = \mathbb{R}^n$, то сімейство всіх відкритих (замкнених) підмножин породжує класичну α-мірну міру Хаусдорфа $H^\alpha(\cdot)$.

Означення 1.1. Невід'ємне число

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi_M) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини $E \subset M$ відносно СЛТП Φ_M.

Означення 1.2. СЛТП Φ_M називається *довірчим сімейством покриттів* для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на M, якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subseteq M.$$

Безпосередньо з означення випливає, що довільне сімейство Φ_M порівнянних покриттів є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Умови довірчості СЛТП вивчались багатьма авторами. Перші кроки у цьому напрямі були зроблені А. Безиковичем, який довів довірчість сімейства циліндрів двійкового розкладу. Результат А. Безиковича був узагальнений П. Біллінгслі для сімейства s-адичних циліндрів. М. Працьовитий поширив попередні результати до сімейства Q-S-циліндрів ([19]). S. Albeverio та Г. Торбін узагальнили ці результати до сімейства Q^*-циліндрів для таких матриць Q^*, елементи p_{0k}, $p_{(s-1)k}$ яких відокремлені від нуля ([3]). У роботах [9, 15] було знайдено деякі загальні достатні умови, які гарантують не лише довірчість, але і порівнянність сімейств покриттів. Всі ці результати були отриманні з використанням наступного підходу:

Лема 1.1. *Якщо для даного СЛТП Φ існують додатні сталі $\beta \in \mathbb{R}$ та $N^* \in \mathbb{N}$ такі, що для довільної кулі B існує не більше N^* множин $B_j \in \Phi$, які покривають B, та $d(B_j) \leq \beta \cdot d(B)$, то сімейство Φ є довірчим.*

Ми будемо досліджувати проблему довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича локально тонких систем покриттів, що породжуються різними розкладами дійсних чисел. Такі системи покриттів складаються з циліндрів $\Delta^\varphi_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ всіх можливих рангів відповідного узагальненого φ-зображення, тобто зображення дійсних чисел, що будується наступним чином. Нехай $\{\Omega_k\}$ — послідовність скінченних чи нескінченних підмножин множини N_0 невід'ємних цілих чисел. Нехай $\mathcal{B}_k = 2^{\Omega_k}$ і $(\Omega, \mathcal{B}) = \prod_{k=1}^\infty (\Omega_k, \mathcal{B}_k)$ — вимірний простір. Нехай φ — вимірне відображення: $\Omega \to [0, 1]$ таке, що:

1) Образи Ω-циліндрів рангу k: $\varphi(\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k) =: \Delta^\varphi_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k}$, $\omega_j \in \Omega_k$ — сегменти, які називаються φ-циліндрами;

2) $\Delta^\varphi_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k i} \subset \Delta^\varphi_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k}$, і $\Delta^\varphi_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k} = \bigcup_{i \in \Omega_{k+1}} \Delta^\varphi_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k i}$; $[0, 1] = \bigcup_{i \in \Omega_1} \Delta^\varphi_i$;

3) Якщо Ω-циліндри не перетинаються, то їхні образи не мають спільних внутрішніх точок;

4) Для довільної послідовності $\{c_k\}$, $c_k \in \Omega_k$: $\lim_{k\to\infty} |\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_k}| = 0$.

Якщо всі ці умови виконано, то для всіх (за винятком не більш як зчисленної множини) дійсних чисел x з одиничного сегмента існує єдина послідовність $\{\alpha_k(x)\}$, $\alpha_k(x) \in \Omega_k$ така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{\varphi}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{\varphi}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}. \tag{1}$$

Вираз (1) називається узагальненим φ-зображенням дійсного числа x. Кожне відображення φ породжує власну геометрію та метричні властивості.

Якщо $A_k = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і $\varphi(\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{s^k} =: \Delta^s_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots}$, то отримаємо класичний s-адичний розклад.

Якщо $A_k = N$ і

$$\varphi(\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots) = \cfrac{1}{\omega_1 + \cfrac{1}{\omega_2 + \cfrac{1}{\omega_3 + \ldots}}} =: \Delta^{c.f.}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots},$$

то отримаємо класичний розклад дійсних чисел в ланцюгові дроби.

Нехай s — довільне натуральне число, $s \geq 2$, і нехай $Q^* = \|q_{ij}\|$ ($i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $j \in N$) — стохастична матриця така, що

$$1) q_{ij} > 0; 2) \sum_{i=0}^{s-1} q_{ij} = 1; 3) \prod_{j=1}^{\infty} \max_i q_{ij} = 0. \tag{2}$$

Для заданої матриці Q^* нехай

$$\varphi(\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots) = \beta_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k \prod_{i=1}^{k-1} q_{\omega_k,k} =: \Delta^{Q^*}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots},$$

де $\beta_k := \sum_{i=0}^{\omega_k-1} q_{ik}$ і $\sum_{i=0}^{-1} q_{ik} := 0$. Такий розклад називається Q^*-розкладом дійсних чисел і є зручним інструментом для конструювання іррегулярних фрактальних множин та сингулярно неперервних ймовірнісних мір всеможливих тополого-метричних типів (див., напр., [3, 4]). Якщо $q_{ik} = q_i$, $k \in \mathbf{N}$, то Q^*-розклад співпадає з самоподібним Q-розкладом. Більше того, якщо $q_{ik} = \frac{1}{s}$ для деякого $s > 1$, то отримуємо s-адичний розклад.

Добре відомо, що для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множин, означених в термінах деякого φ-розкладу, суттєво простіше обмежитись розглядом покриттів, що містять лише циліндри відповідного розкладу. Основною проблемою у цій ситуації є з'ясування того чи є відповідна система подрібнюючих розбиттів Φ^{φ} довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

2. DP-перетворення та ймовірнісні міри з незалежними Q^*-символами

Перетворення F простору R^n (в сенсі бієктивного відображення R^n в себе) називається перетворенням, що зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича (DP-перетворенням) на множині $L \subset R^n$, якщо

$$\dim_H(E) = \dim_H(F(E))$$

для довільної множини $E \subset L$.

В роботі [6] було показано, що фрактальну геометрію природно розглядати як розділ математики, що вивчає інваріанти групи DP-перетворень, яка суттєво ширша за групу біліпшицевих перетворень. В роботі [7] показано, що проблема дослідження одновимірних DP-перетворень еквівалентна проблемі дослідженню неперервних строго зростаючих функцій розподілу на одиничному відрізку. У цьому розділі ми суттєво узагальнимо результати робіт [6, 7] і знайдемо необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними Q^*-символами, та встановимо зв'язки між довірчістю систем подрібнюючих покриттів та DP-властивостями відповідної функції розподілу.

Нехай Q^* — стохастична матриця, що задовольняє умову (2), нехай $\{\eta_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(s-1)k}$ відповідно, і нехай η — випадкова величина з незалежними Q^*-символами, тобто

$$\eta = \Delta^{Q^*}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}. \tag{3}$$

Позначимо через μ_η відповідну ймовірнісну міру. Відомо, ([3]), що μ_η має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0, \tag{4}$$

міра μ_η є абсолютно неперервною (відносно міри Лебега) тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k}q_{0k}} + \sqrt{p_{1k}q_{1k}} + \dots + \sqrt{p_{(s-1)k}q_{(s-1)k}}\right) > 0, \tag{5}$$

вона є сингулярно неперервною тоді і тільки тоді коли нескінченні добутки (4) і (5) розбігаються до нуля.

У випадку $\inf_{ik} q_{ik} > 0$ розмірність Хаусдорфа–Безиковича міри μ_η, тобто інфімум розмірностей Хаусдорфа–Безиковича всеможливих носіїв (не обов'язково замкнених) міри μ_η, дорівнює ([3])

$$\dim_H \mu = \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, \tag{6}$$

де $h_k = -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik}$ і $b_k = -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln q_{ik}$.

Оскільки довільне неперервне одновимірне DP-перетворення є строго зростаючим, то будемо розглядати лише випадок коли стохастична матриця $P = \|p_{ik}\|$ не містить нулів.

Наступна лема пов'язує властивість довірчості образу сім'ї покриттів

$$\Phi' := \{F_\xi(E) : E \in \Phi\}$$

для обчислення розмірості Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1]$ та властивість «бути DP-перетворенням» функції розподілу F_ξ.

Нехай F_ξ — функція розподілу випадкової величини з незалежними s-адичними символами, $P^* = \|p_{ik}\|$ — відповідна матриця, $p_{ik} > 0$,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} = 0.$$

Нехай Φ — сімейство циліндрів s-адичного розкладу,

$$\Phi' := \{F_\xi(E) : E \in \Phi\}$$

— сімейство циліндрів Q^*-розкладу, який породжений матрицею $Q^* = P^*$.

Лема 2.1. *Нехай для довільного $x \in [0, 1]$ виконується умова*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} = 1. \tag{7}$$

Тоді

(1) $\Phi^{'}$ — *довірча для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на* $[0,1]$*;*
(2) F_ξ — *DP-перетворення [0,1];*
(3) *твердження (1) і (2) еквівалентні.*

Доведення. (3) З умови (7) та теореми Білінгслі випливає, що для всіх $E \subset [0,1]$:

$$\dim_\lambda(E,\Phi) = 1 \cdot \dim_{\mu_\xi}(E,\Phi),$$

де $\dim_\lambda(E,\Phi)$ і $\dim_{\mu_\xi}(E,\Phi)$ – розмірності Хаусдорфа–Біллінгслі відносно мір λ і μ_ξ відповідно. Отже, з

$$\dim_H(E) = \dim_H(E,\Phi) = \dim_\lambda(E,\Phi),$$

$$\dim_{\mu_\xi}(E,\Phi) = \dim_H\left(F_\xi(E),\Phi^{'}\right), \forall E \subset [0,1]$$

та попереднього зауваження випливає, що

$$\dim_H(E) = \dim_H\left(F_\xi(E),\Phi^{'}\right), \forall E \subset [0,1]. \tag{8}$$

Якщо $\Phi^{'}$ — довірча для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на [0,1], то

$$\dim_H\left(E^{'},\Phi^{'}\right) = \dim_H\left(E^{'}\right), \forall E^{'} \subset [0,1].$$

Тоді з (8) та припущення довірчості $\Phi^{'}$ для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1]$ випливає, що

$$\dim_H(E) = \dim_H\left(F_\xi(E)\right), \forall E \in [0,1],$$

тобто, F_ξ — DP-перетворення $[0,1]$.

Якщо F_ξ — DP-перетворення $[0,1]$, то

$$\dim_H\left(E^{'}\right) = \dim_H\left(F_\xi^{-1}(E^{'})\right), \forall E^{'} \subset [0,1].$$

Оскільки з (8) випливає, що

$$\dim_H\left(E^{'},\Phi^{'}\right) = \dim_H(F_\xi^{-1}(E^{'})), \forall E^{'} \subset [0,1],$$

то

$$\dim_H\left(E^{'}\right) = \dim_H\left(E^{'},\Phi^{'}\right), \forall E^{'} \subset [0,1].$$

Отже $\Phi^{'}$ — довірча для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1]$.

(1) Доведемо, що $\Phi^{'}$ — довірча (тим самим і доведемо пункт (2)). Нехай $E^{'}$ — довільна підмножина з $[0,1]$ і $E := F_\xi^{-1}\left(E^{'}\right)$. Для довільної точки $x \in E$ і для довільного $\delta > 0$ за умовою (7) існує мінімальний номер $n_0 := n_0(\delta,x)$ такий, що для всіх $n > n_0$ має місце

$$\left|\Delta^{\Phi}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|^{1+\delta} \le \left|\Delta^{\Phi^{'}}_{\alpha_1(x^{'})\ldots\alpha_n(x^{'})}\right| \le \left|\Delta^{\Phi}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|^{1-\delta}, \tag{9}$$

де $x^{'} := F_\xi(x)$. Для зручності будемо позначати $\Delta_n(x) := \Delta^{\Phi}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}$ та $\Delta^{'}_n(x^{'}) := \Delta^{\Phi^{'}}_{\alpha_1(x^{'})\ldots\alpha_n(x^{'})}$. Нерівність (9) має вигляд

$$|\Delta_n(x)|^{1+\delta} \le \left|\Delta^{'}_n(x^{'})\right| \le |\Delta_n(x)|^{1-\delta}, \tag{10}$$

у нових позначеннях.

Для фіксованих $m \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$ означимо

$$W_{m,\delta} := \left\{x : x \in E \wedge |\Delta_n(x)|^{1+\delta} \le \left|\Delta^{'}_n(x^{'})\right| \le |\Delta_n(x)|^{1-\delta}, \forall n > m\right\}$$

та

$$W^{'}_{m,\delta} := F_\xi\left(W_{m,\delta}\right).$$

Тоді
$$W_{1,\delta} \subset W_{2,\delta} \subset \cdots \subset W_{m,\delta} \subset \ldots$$
і при цьому
$$E := \bigcup_{m=1}^{\infty} W_{m,\delta}, \forall \delta > 0.$$

Покажемо, що при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича множина $E^{'} \subset [0,1]$ досить розглядати покриття з $\Phi^{'}$.

Оскільки F_ξ неперервна на $[0,1]$, то F_ξ і F_ξ^{-1} — рівномірно неперервні на $[0,1]$. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує
$$\varepsilon^{'}(\varepsilon) > 0, \tag{11}$$
таке що як тільки $|I^{'}| \leq \varepsilon^{'}(\varepsilon)$, то $|F_\xi^{-1}(I^{'})| \leq \varepsilon, \forall I^{'} \subset [0,1]$.

Оскільки m і $\delta > 0$ зафіксовано, то виберемо ε так, щоб $\left(\frac{1}{s}\right)^m = \varepsilon$. Розглянемо довільне $\varepsilon^{'}$-покриття $\left\{E_j^{'}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ множини $W_{m,\delta}^{'}$ відрізками $E_j^{'} := [a_j^{'}, b_j^{'}]$, $\forall j \in \mathbb{N}$, де $\varepsilon^{'} \leq \varepsilon^{'}(\varepsilon)$ (див. (11)). Без втрати загальності будемо вважати, що $E_j^{'} \cap W_{m,\delta}^{'} \neq \emptyset$. Нехай $E_j := F_\xi^{-1}(E_j^{'}) = [a_j, b_j]$, де $a_j = F_\xi^{-1}(a_j^{'}), b_j = F_\xi^{-1}(b_j^{'})$. Тоді $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$-ε-покриття множини $W_{m,\delta}$. Для фіксованого $j \in \mathbb{N}$ існує s-адичний циліндр Δ_{n_j} мінімального рангу n_j, який повністю міститься в E_j. Тоді відповідний йому циліндр $\Delta_{n_j}^{'} := F_\xi\left(\Delta_{n_j}\right) \in \Phi^{'}$ повністю міститься в $E_j^{'}$. Оскільки $\Delta_{n_j} \subset E_j$, то $|\Delta_{n_j}| \leq \varepsilon$, тобто $n_j \geq m$.

Множину $E_j \cap W_{m,\delta}$ можна покрити за допомогою не більше як $2s$ циліндрів n_j-рангу, які містять хоча б одну точку з $E_j \cap W_{m,\delta}$. Позначимо їх:
$$\Delta_{n_j}^0, \Delta_{n_j}^1, \ldots, \Delta_{n_j}^{l_j}.$$
При цьому $\left|\Delta_{n_j}^0\right| = \left|\Delta_{n_j}^1\right| = \cdots = \left|\Delta_{n_j}^{l_j}\right| = \left(\frac{1}{s}\right)^{n_j}$. Оскільки $\Delta_{n_j}^i \cap W_{m,\delta} \neq \emptyset$, $\forall i \in \{0,\ldots,l_j\}$, та $\Delta_{n_j E_j}^{'} \subset E_j^{'}$, то
$$\left|\Delta_{n_j}^{'i}\right| \leq \left|\Delta_{n_j}^i\right|^{1-\delta} \leq \left|\Delta_{n_j}^{'i}\right|^{\frac{1-\delta}{1+\delta}} \leq \left|E_j^{'}\right|^{\frac{1-\delta}{1+\delta}}, \forall i \in \{0,\ldots,l_j\},$$
де $\Delta_{n_j}^{'i} := F_\xi\left(\Delta_{n_j}^i\right)$, $\forall i \in \{0,\ldots,l_j\}$.

Тому
$$\left|\Delta_{n_j}^{'i}\right| \leq \left|E_j^{'}\right|^{\frac{1-\delta}{1+\delta}} \leq \left(\varepsilon^{'}\right)^{\frac{1-\delta}{1+\delta}}, \forall i \in \{0,\ldots,l_j\}.$$
Отже,
$$\sum_{i=0}^{l_j} \left|\Delta_{n_j}^{'i}\right|^\alpha \leq 2s \cdot \left|E_j^{'}\right|^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}, \alpha > 0.$$

Тому
$$\sum_j \sum_{i=0}^{l_j} \left|\Delta_{n_j}^{'i}\right|^\alpha \leq 2s \cdot \sum_j \left|E_j^{'}\right|^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}, \alpha > 0. \tag{12}$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільного ε-покриття $\left\{E_j^{'}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ множини $W_{m,\delta}^{'}$ відрізками $E_j^{'} := [a_j^{'}, b_j^{'}]$, $\forall j \in \mathbb{N}$, де $\varepsilon^{'} \leq \varepsilon^{'}(\varepsilon)$, існує сукупність циліндрів $\Delta_{n_j}^i$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,\ldots,l_j\}$, такі, що:

(1) $\left|\Delta_{n_j}^i\right| \leq \left(\varepsilon^{'}\right)^{\frac{1-\delta}{1+\delta}}$;

(2) $\sum_j \sum_{i=0}^{l_j} \left|\Delta_{n_j}^{'i}\right|^\alpha \leq 2s \cdot \sum_j \left|E_j^{'}\right|^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}$, $\alpha > 0$.

Тому

$$H^{\alpha\frac{1-\delta}{1+\delta}}_{\varepsilon'}\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)\le 2s\cdot\sum_j\left|E'_j\right|^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}},\alpha>0,$$

для довільного ε' - покриття $\left\{E'_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$. Отже,

$$H^{\alpha\frac{1-\delta}{1+\delta}}_{\varepsilon'}\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)\le 2s\cdot H^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}_{\varepsilon'}\left(W'_{m,\delta}\right),\alpha>0.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon'\to 0$, отримаємо

$$H^{\alpha}\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)\le 2s\cdot H^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}\left(W'_{m,\delta}\right),\alpha>0. \tag{13}$$

Нехай $\alpha_0=\inf\left\{\alpha: H^{\alpha\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}}\left(W'_{m,\delta}\right)=0\right\}$, тобто $\alpha_0\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}=\dim_H\left(W'_{m,\delta}\right)$. Тоді для довільного $\beta>\alpha_0$: $H^{\beta}\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)=0$. Отже,

$$\dim_H\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)\le\frac{1+\delta}{1-\delta}\cdot\dim_H\left(W'_{m,\delta}\right).$$

Таким чином

$$\dim_H\left(E',\Phi'\right)=\dim_H\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}W'_{m,\delta},\Phi'\right)=\sup_m\dim_H\left(W'_{m,\delta},\Phi'\right)\le$$

$$\le\frac{1+\delta}{1-\delta}\sup_m\dim_H\left(W'_{m,\delta}\right)=\frac{1+\delta}{1-\delta}\dim_H\left(E'\right),\forall\delta>0.$$

Отже,

$$\dim_H\left(E',\Phi'\right)\le\frac{1+\delta}{1-\delta}\dim_H\left(E'\right),\forall\delta>0.$$

З останнього випливає, що

$$\dim_H\left(E',\Phi'\right)\le\dim_H\left(E'\right).$$

Це і доводить твердження $\dim_H\left(E',\Phi'\right)=\dim_H\left(E'\right)$, $\forall E'\subset[0,1]$. □

Зауваження 2.1. Доведена лема відіграватиме важливу роль при доведенні основного результату даної роботи. Зазначимо, однак, її самостійну цінність. Вона допускає узагальнення на інші класи розкладів (зокрема, на Q-розклади та Q^*-розклади з $\inf_{ik}q_{ik}>0$) та породжених ними перетворень на основі запропонованого методу доведення.

Перейдемо тепер до основного результату статті. Припустимо, що $\inf_{ik}q_{ik}>0$. Нехай $p_k:=\min_i p_{ik}$, $q_{\min}:=\min_{ik}q_{ik}$, $q_{\max}:=\max_{ik}q_{ik}$. Позначимо

$$T^{(1)}:=\left\{k:\ k\in N,\ p_k<\frac{1}{2}q_{\min}\right\},$$

$$T^{(1)}_k:=T^{(1)}\cap\{1,2,\dots,k\}.$$

Нехай

$$A:=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln\frac{1}{p_j}}{k}.$$

Теорема 2.1. *Нехай* $\inf_{ik}q_{ik}>0$. *Тоді функція розподілу* F_μ *зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича довільної підмножини одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases}\dim_H\mu_\eta=1;\\ A=0.\end{cases} \tag{14}$$

Доведення. **Достатність.** Нехай $\dim_H \mu = 1$ і $A = 0$.

З класичної нерівності Гіббса, яка рівносильна твердженню про невід'ємність відстані Кульбака–Лейблера ([12]), випливає, що

$$h_k = -\ln(p_{0k}^{p_{0k}} \cdot p_{1k}^{p_{1k}} \cdot \dots \cdot p_{(s-1)k}^{p_{(s-1)k}}) \le b_k = -\ln(q_{0k}^{p_{0k}} \cdot q_{1k}^{p_{1k}} \cdot \dots \cdot q_{(s-1)k}^{p_{(s-1)k}}). \tag{15}$$

Тому з (6) випливає, що умова $\dim_H \mu = 1$ еквівалентна існуванню наступної границі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = 1. \tag{16}$$

Нехай ε — довільне додатне число, для якого $\varepsilon < \frac{1}{2} q_{\min}$. Введемо в розгляд наступні множини:

$$T^{+}_{\varepsilon,k} = \left\{ j : j \in N, j \le k, |p_{ij} - q_{ij}| \le \varepsilon, \forall i \in N^0_{s-1} := \{0, 1, \dots, s-1\} \right\},$$

$$T^{-}_{\varepsilon,k} = \left\{ j : j \in N, j \le k, |p_{ij} - q_{ij}| > \varepsilon \text{для деякого } i \in N_0^{s-1} \right\}.$$

З умови $\dim_H \mu = 1$ випливає, що $\lim_{k\to\infty} \frac{|T^{+}_{\varepsilon,k}|}{k} = 1$, де $\mid E \mid$ — кількість елементів в множині E.

Множина $T^{-}_{\varepsilon,k}$ може бути розкладена наступним чином: $T^{-}_{\varepsilon,k} = T^{(1)}_k \cup T_{\varepsilon,k}$, де множина $T^{(1)}_k$ означена вище і

$$T_{\varepsilon,k} = \{ j : j \in N, j \le k; p_j \ge \frac{1}{2} q_{\min},\ |p_{ij} - q_{ij}| > \varepsilon \text{для деякого } i \in N_0^{s-1} \}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|T^{-}_{\varepsilon,k}|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|T^{(1)}_k|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|T_{\varepsilon,k}|}{k} = 0.$$

Нехай $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)}$ — циліндр Q^*-розкладу, що містить точку x, $\mu = \mu_\xi$, і λ — міра Лебега. Тоді для довільної точки $x \in [0,1]$, для довільного натурального k і для довільного додатного $\varepsilon < \frac{1}{2} q_{\min}$ маємо:

$$-\ln \mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)}) = -(\sum_{j \in T^{(1)}_k} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j \in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j}).$$

Оскільки $\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \le |T_{\varepsilon,k}| \ln \frac{2}{q_{\min}}$, то

$$\sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \le \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} = \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \ln(1 + \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon}) \le$$

$$\le \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \le \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \frac{2\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}} \le$$

$$\le \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \frac{2\varepsilon}{q_{\min}} \le \sum_{j \in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |T^{+}_{\varepsilon,k}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}.$$

Отже, для довільного $x \in [0,1]$ і довільного додатного $\varepsilon < \frac{1}{2} q_{\min}$ отримуємо:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)})} \le$$

$$\leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2}{q_{\min}} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k}^{+} \,| \, \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{-\ln[\prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)j}]} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2}{q_{\min}} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k}^{+} \,| \, \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{\sum_{j=1}^{k} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} \leq$$

$$\leq 1 + \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2}{q_{\min}} + |\, T_{\varepsilon,k}^{+} \,| \, \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{\sum_{j=1}^{k} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} \leq$$

$$\leq 1 + \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2}{q_{\min}} + |\, T_{\varepsilon,k}^{+} \,| \, \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{k \ln \frac{1}{q_{\max}}} = 1 + \frac{2\varepsilon}{q_{\min} \cdot \ln \frac{1}{q_{\max}}}.$$

З іншого боку:

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq |T_{\varepsilon,k}| \ln \frac{2}{2-q_{\min}},$$

і

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon} = \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \ln \frac{q_{\alpha_j(x)j}}{q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon} =$$

$$= \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln(1 - \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon}) \geq \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} - \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \frac{2\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon} \geq$$

$$\geq \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} - \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \frac{2\varepsilon}{q_{\min}} = \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} - |T_{\varepsilon,k}^{+}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}.$$

Отже, для довільного $x \in [0,1]$ і довільного додатного $\varepsilon < \frac{1}{2} q_{\min}$ маємо:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln \mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geq$$

$$\geq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2-q_{\min}}{2} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} - |T_{\varepsilon,k}^{+}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{-\ln[\prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)j}]} =$$

$$= \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2-q_{\min}}{2} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} - |T_{\varepsilon,k}^{+}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{\sum_{j=1}^{k} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} =$$

$$= 1 + \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2-q_{\min}}{2} - |T_{\varepsilon,k}^{+}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{\sum_{j=1}^{k} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} \geq$$

$$\geq 1 + \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum_{j\in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + |\, T_{\varepsilon,k} \,| \ln \frac{2-q_{\min}}{2} - |T_{\varepsilon,k}^{+}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}}{k \ln \frac{1}{q_{\min}}} = 1 - \frac{2\varepsilon}{q_{\min} \cdot \ln \frac{1}{q_{\min}}}.$$

Підсумовуючи, отримуємо оцінки:

$$1-\frac{2\varepsilon}{q_{\min}\ln\frac{1}{q_{\min}}}\le\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}\le\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}\le 1+\frac{2\varepsilon}{q_{\min}\ln\frac{1}{q_{\max}}}.$$

Оскільки вказані оцінки правильні для довільного $x\in[0,1]$ і довільного додатного $\varepsilon<\frac{1}{2}q_{\min}$, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}=1,\forall x\in[0,1]. \tag{17}$$

З (17) і з теореми Біллінгслі ([8]) випливає, що для довільної підмножини $E\subset[0,1]$ має місце рівність:

$$\dim_H(E,\lambda,\Phi(Q^*))=1\cdot\dim_H(E,\mu_\eta,\Phi(Q^*)),$$

де $\dim_H(E,\lambda,\Phi(Q^*))$ — розмірність Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно міри Лебега λ та системи циліндрів Q^*-розкладу, а $\dim_H(E,\mu_\eta,\Phi(Q^*))$ — розмірність Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно міри μ_η та системи циліндрів Q^*-розкладу.

Оскільки $\inf_{ik}q_{ik}>0$ то сімейство циліндрів Q^*-розкладу є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку [3]. Тому

$$\dim_H(E,\lambda,\Phi(Q^*))=\dim_H(E).$$

Безпосередньо з означення розмірності Хаусдорфа–Біллінгслі випливає, що

$$\dim_H(E,\mu_\eta,\Phi(Q^*))=\dim_H(E,F_\mu(\Phi(Q^*)))=\dim_H(E,\Phi(P^*)).$$

З доведеної вище леми випливає, що сімейство $\Phi(P^*)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Тому F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка.

Необхідність. Нехай F_μ — DP-перетворення одиничного відрізка. Доведемо, що при цьому виконується як умова $\dim_H\mu=1$, так і умова $A=0$.

Якщо $\dim_H\mu<1$, то існує носій E міри μ такий, що $\dim_H\mu\le\dim_H(E)<1$. Оскільки $\mu(E)=1$, то $\dim_H(F_\mu(E))=1\ne\dim_H(E)$, що суперечить припущенню. Таким чином, суперфрактальність міри μ є необхідною умовою для того щоб функція розподілу F_μ зберігала розмірність.

Доведемо тепер, що $A=0$. Припустимо, що $A>0$. Для доведення того факту, що F_μ не зберігає фрактальну розмірність, розглянемо множину

$$L=\{x:\ x=\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots};\ \alpha_k\in N_0^{s-1}\ \text{ якщо }\ k\notin T^{(1)};$$

$$\alpha_k=n_k,\ \text{якщо}\ k\in T^{(1)},\text{де} p_{n_kk}=\min_i p_{ik}\}.$$

Очевидно, що $\lambda(L)=0$. З іншого боку, $\dim_H(L)=1$, оскільки $\lim_{k\to\infty}\frac{|T^{(1)}_k|}{k}=0$ і $\inf_{ik}q_{ik}>0$. З умови $\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_j}{-k}=A$ випливає, що існує підпослідовність $\{k_m\}$ така, що границя

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln p_j}{-k_m}$$

існує і дорівнює A.

Таким чином, для довільного $x \in L$ має місце

$$\begin{aligned}
&\varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})}\\
&\quad = \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k_m}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k_m}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum_{j=1}^{k_m} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\\
&\quad = 1 + \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum_{j=1}^{k_m} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\\
&\quad = 1 + \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}} \ln \frac{1}{p_j}}{\sum_{j=1}^{k_m} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} \geq 1 + \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}} \ln \frac{1}{p_j}}{k_m \ln \frac{1}{q_{\min}}} = 1 + c\cdot A,
\end{aligned}$$

де $c = \frac{-1}{\ln q_{\min}}$.

Тому для довільного $\delta > 0$ існує $m(\delta)$ таке, що для всіх $m > m(\delta)$ виконується

$$1 + c\cdot A - \delta \leq \frac{\ln \mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})},$$

для кожного $x \in L$, що еквівалентно виконанню наступної нерівності:

$$\mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)}) \leq \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})^{1+c\cdot A-\delta}.$$

Таким чином, для довільного $x \in L$, для довільного $\delta > 0$ і для довільного $m > m(\delta)$ має місце нерівність

$$|\Delta^{'}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)}|^{\frac{1}{1+c\cdot A-\delta}} \leq |\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)}|, \tag{18}$$

де $\Delta^{'}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)} = F_\mu(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_{k_m}(x)})$.

Виберемо $\delta \in (0, c\cdot A)$.

З умови $\lambda(L) = 0$ випливає, що передміра Хаусдорфа $H^1_\varepsilon(L) = 0$ для довільного додатного ε. Тому для заданих $\varepsilon > 0$ і $t > 0$ існує ε-покриття $\{E_i\}$ множини L циліндрами Q^*-розкладу рангу k_m (m залежить від ε і t) таке, що $\sum_i |E_i| < t$. Сімейство множин $\{E^{'}_i\} = \{F_\mu(E_i)\}$ утворює $\varepsilon^{'}$-покриття множини $L^{'} = F_\mu(L)$. Ясно, що $\varepsilon^{'} \to 0 \Leftrightarrow \varepsilon \to 0$, оскільки F_μ є рівномірно неперервною на одиничному відрізку.

Без порушення загальності можна розглядати лише ті покриття для яких всі E_i мають непорожні перетини з L. З (18) випливає, що

$$\sum_i \left|E^{'}_i\right|^{\frac{1}{1+c\cdot A-\delta}} \leq \sum_i |E_i| < t.$$

Оскільки ε та t можуть бути вибраними як завгодно малими, приходимо до висновку, що

$$H^{\frac{1}{1+c\cdot A-\delta}}_{\varepsilon^{'}}(L') = 0, \forall \varepsilon^{'} > 0.$$

Отже, міра Хаусдорфа $H^{\frac{1}{1+c\cdot A-\delta}}(L')$ множини L' дорівнює нулю, і, отже,

$$\dim_H(L') \leq \frac{1}{1+c\cdot A-\delta} < 1.$$

Таким чином, з припущення $A > 0$ випливає, що функція розподілу F_μ не належить до DP-класу. $\square$

Наслідок 2.1. *Якщо функція розподілу F_μ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича довільної підмножини одиничного відрізка, то ймовірнісна міра μ має повну розмірність Хаусдорфа.*

Наслідок 2.2. *Якщо елементи матриці P відділені від нуля деякою додатною сталою, тобто якщо $\inf_{ij} p_{ij} > 0$, то F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли відповідна ймовірнісна міра μ є мірою повної Хаусдорфової розмірності.*

Наслідок 2.3. *Якщо $\lim_{k\to\infty} p_{ik} = q_i$, $\forall i \in N_0^{s-1}$, то F_μ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.4. *Довільна строго зростаюча абсолютно неперервна функція розподілу F_μ випадкової величини з незалежними Q-символами зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.5. *При довільному виборі стохастичного вектора Q існують сингулярно неперервні функції розподілу випадкових величин з незалежними Q-символами, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Доведення. Для побудови прикладу достатньо вибрати матрицю P таким чином, щоб $p_{ik} \to q_i$, $k \to \infty$, з додатковою умовою $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{s-1} (1 - \frac{p_{ik}}{q_i})^2 \right) = \infty$. Відповідна функція розподілу F_μ буде сингулярно неперервною DP-функцією. $\square$

Подяка. Автори висловлюють щиру вдячність академіку НАН України В. С. Королюку та професору Ювалу Пересу (Yuval Peres, Microsoft Research) за обговорення проблем, пов'язаних з DP-перетвореннями.

Література

1. S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, and G. Torbin, *On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions*, Bull. Sci. Math. **138** (2014), no. 3, 440–455.
2. S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, and G. Torbin, *On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS.* (submitted to Acta Mathematica, 2015)
3. S. Albeverio and G. Torbin, *Fractal properties of singular continuous probability distributions with independent Q^*-digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 4, 356–367.
4. S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols*, Methods of Functional Analysis and Topology **17** (2011), no. 2, 97–111.
5. S. Albeverio, G. Ivanenko, M. Lebid, and G. Torbin, *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion.* (submitted to Math. Res. Letters, (http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf))
6. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **24** (2004), no. 1, 1–16.
7. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *Transformations preserving the Hausddorff–Besicovitch dimension*, Central European Journal of Mathematics **6** (2008), no. 1, 15–24.
8. P. Billingsley, *Hausdorff dimension in probability theory II*, Ill. J. Math. **5** (1961), 291–198.
9. C. Cutler, *A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on R*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **2** (1988), no. 4, 643–650.
10. K. J. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 2003.
11. J. R. Kinney and T. S. Pitcher, *On dimension of some sets defined in terms of f-expansions*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **4** (1966), 293–315.
12. S. Kullback and R. A. Leibler, *On information and sufficiency*, Annals of Math. Statistics **22** (1951), 79–86.
13. Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін, *Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами*, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2013), 150–162.
14. Yu. Peres and G. Torbin, *Continued fractions and dimensional gaps.* (in preparation)

15. М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича*, Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки **4** (2003), 207–215.
16. A. N. Shiryaev, *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1996.
17. G. Torbin, *Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension*, Theory of Stoch. Proc. **13** (2007), no. 29, 281–293.
18. Г. М. Торбін, *Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних імовірнісних мір*, Укр. мат. ж. **57** (2005), no. 5, 837–857.
19. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, "Наукова думка", Киев, 1992.

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: ibragimmuslem1978@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна; відділ фрактального аналізу Інституту математики НАН України, вул. Терещенківська 3, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: torbin7@gmail.com

Надійшла 15/05/2015