

АСИМПТОТИКА РОЗПОДІЛУ МАРКОВСЬКИХ МОМЕНТІВ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА, ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ДИСКРЕТНІЙ МОДЕЛІ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

АНОТАЦІЯ. Розглядається неоднорідний за часом дискретний ланцюг Маркова, та сім'я субстохастичних матриць (Q_s) , що підпорядковані (не перевищують) перехідним ймовірностям (P_s) ланцюга за один крок. З сім'єю (Q_s) пов'язаний марковський момент τ - момент обриву ланцюга з перехідними матрицями (Q_s) . Вважається, що (P_s) та (Q_s) близькі у певному сенсі, тобто $\tau \rightarrow \infty$ у схемі серій. Обчислено асимптотику ймовірності банкрутства (обриву) $P(\tau < \infty) \rightarrow 0$. Для наявності нульової границі цієї ймовірності накладається умова типу транзйентності ланцюга, як в теоремі Крамера–Лундберга. Наведено ряд застосувань.

АБСТРАКТ. Time-inhomogeneous discrete Markov chain and a family of substochastic matrices (Q_s) subordinated to (not greater than) the one-step transition matrices (P_s) of the chain are considered. With family (Q_s) is connected the Markov moment τ - as the killing moment for the chain with transitions (Q_s) . We assume that P_s and Q_s are close in some sense, so the moment $\tau \rightarrow \infty$ in the scheme of series. The asymptotic of the ruin (killing) probabilities $P(\tau < \infty) \rightarrow 0$ is calculated. To obtain the zero limit value of these probabilities the transience condition on the chain is assumed. Applications are also considered.

Аннотация. Рассматривается неоднородная по времени дискретная цепь Маркова, и семья субстохастических матриц (Q_s) , подчиненных (не превышающих) переходные вероятности (P_s) цепи за один шаг. С семьей (Q_s) связан марковский момент τ - момент обрыва цепи с переходными матрицами (Q_s) . Считается, что (P_s) и (Q_s) близки в некотором смысле, то есть $\tau \rightarrow \infty$ в схеме серий. Найдена асимптотика вероятности разорения (обрыва) $P(\tau < \infty) \rightarrow 0$. Для наличия нулевого предела этой вероятности принимаются условия типа транзйентности цепи, как и в теореме Крамера–Лундберга. Приведены применения

1. ВСТУП

Дослідження стійкості розподілів та асимптотики розподілу марковських моментів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлене у монографії автора [2, 1996], де наведено також ряд застосувань. Основу доведень склали аналітичні операторні методи, що використані і в даній статті.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладено у монографії В. Золотарьова [3, 1986]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведено у книзі С. Мейна, Р. Твіді [4, 1993].

У роботі автора [6, 2013] досліджено асимптотику розподілу загальних марковських моментів, що задані на неоднорідному ланцюгу Маркова, та прямують у схемі серій до нескінченості. Ланцюг мав задовольняти умову типу ергодичності: рівномірного перемішування, сильного або V-сильного перемішування. За такого припущення відповідний момент зупинки (що інтерпретується як момент банкрутства)

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Inhomogeneous discrete Markov chains, rare Markov moments, ruin probability, analytical methods, Cramer's risk model неоднорідні дискретні ланцюги Маркова, проріджені моменти Маркова, ймовірність розорення, модель ризику Крамера аналітичний метод.

є майже напевне скінченим для кожного початкового значення ланцюга. Тому в [6] обрано схему скінченого "горизонту ризику": досліджено асимптотику ймовірності банкрутства на обмеженому часовому інтервалі (що одночасно зростає у схемі серій). Така постановка задачі відрізняється від класичної моделі Крамера, де розглядається нескінчений "горизонт ризику".

У даній роботі вивчається саме модель типу Крамера, що є неоднорідною у часі і є породженою дискретним ланцюгом Маркова. Останній може змінюватись у схемі серій та як правило має транзйентний характер для дограничної додатності ймовірності не банкрутства на нескінченному "горизонті". Наприклад, рекурентний незвідний ланцюг (у однорідному випадку) досягає будь-якого стану майже напевне на необмеженому часовому проміжку, зокрема, має одиничну ймовірність банкрутства. У статті вивчається випадок нульової границі ймовірності банкрутства за додаткового припущення необмеженого зростання початкового капіталу (початкового значення ланцюга).

На відміну від класичного результату Крамера–Лундберга, в статті досліджено не тільки граничну поведінку ймовірності банкрутства, але також доведені явні двобічні нерівності для неї, що дозволяє чисельно апроксимувати дограничні значення вказаної ймовірності.

Перша частина роботи містить формулювання результатів, наприкінці наведені доведення.

2. МАРКОВСЬКІ МОМЕНТИ ТА ПІДПОРЯДКОВАНІ МАТРИЦІ

Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова $X = (X_t, t = 0, 1, \dots)$ відносно потоку сигма-алгебр $(\mathfrak{F}_t, t = 0, 1, \dots)$ зі значеннями у дискретному фазовому просторі $E = \{i, j, k, \dots\}$.

Визначимо матриці $P_t = (P_{ij}^{(t)}, i, j \in E)$ ймовірностей переходу ланцюга за один крок (з моменту t до моменту $t + 1$): $P_{ij}^{(t)} = \mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$, $t \geq 0$. Позначимо через P_{ti} , E_{ti} умовні ймовірності та математичні сподівання на ймовірнісному просторі, де заданий ланцюг Маркова X , з початковою умовою $X_t = i$.

Для $n \geq 0$ позначимо матриці ймовірностей переходу за n кроків:

$$P^{(t,n)} \equiv \prod_{s=t}^{t+n-1} P_s = (P_{ti}(X_{t+n} = j), i, j \in E), P^{(t,0)} \equiv I. \quad (1)$$

Символом $x \in E$ нижче позначається початковий стан ланцюга у початковий момент t : $X_t = x$. Крім того, будемо припускати виродженість сигма-алгебри $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E . Позначення x^\pm є додатною та від'ємною частиною числа x , $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ - символи Кронекера.

Розглянемо довільний (\mathfrak{F}_t) -марковський момент τ такий, що $\tau \geq 1$. З ним пов'язані субстохастичні матриці $Q_s = (Q_{ij}^{(s)}, i, j \in E)$ для $s \geq 0$, де

$$Q_{ij}^{(s)} \equiv \mathbb{P}(X_{s+1} = j, \tau > s + 1 \mid X_s = i, \tau > s). \quad (2)$$

Тотожності для умовних ймовірностей коректно визначені лише за припущення додатності ймовірності відповідної умови. При порушенні останнього будемо вважати, що $0/0 = 0$, та $1/0 = 1$. Крім того, слід врахувати, що за формулою повної ймовірності значення умовної ймовірності не впливає на результат при нульовій ймовірності умови.

Лема 1. Рівності (2) еквівалентні при $t \geq 1$, $i_0 = i, i_1, \dots, i_t \in E$ рівностям

$$P_{0i}(\tau > t, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}. \quad (3)$$

Зауважимо, що сім'я (Q_s) підпорядкована (P_s) , тобто

$$Q_{ij}^{(s)} \leq P_{ij}^{(s)}, i, j \in E, s \geq 0. \quad (4)$$

Навпаки, нехай $Q_s = (Q_{ij}^{(s)})$ - сім'я субстохастичних матриць, що підпорядковані (4) перехідним матрицям (P_s) ланцюга X .

Розглянемо розширення $\bar{E} = E \times \{0, 1\}$ простору E , та визначимо \bar{E} -значний ланцюг Маркова $\bar{X} = (\bar{X}_t)$ з $\bar{X}_t = (X_t, d_t)$ рекурентно наступним чином. Покладемо $\bar{X}_0 = (x, 0)$. Нехай $\bar{X}_s = (i, d)$, $s \geq 0$. Згенеруємо E -значну випадкову величину Y незалежно від усіх попередньо згенерованих величин, з розподілом $\mathbb{P}(Y = j) = P_{ij}^{(s)}$. Якщо $d = 1$, оберемо $d_{s+1} = 1$ та $X_{s+1} = Y$. Якщо ж $d = 0$, оберемо випадково $d_{s+1} = 1$ з імовірністю $r = (P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)})/P_{ij}^{(s)}$ та $d_{s+1} = 0$ з імовірністю $1 - r$, та $X_{s+1} = Y$. Цей вибір також робитимемо незалежно від попередніх. Тут за означенням $r = 0$, якщо $P_{ij}^{(s)} = 0 = Q_{ij}^{(s)}$. Нарешті, покладемо $\bar{X}_{s+1} = (X_{s+1}, d_{s+1})$.

Таким чином рекурентно побудована послідовність $\bar{X} = (\bar{X}_t)$ є ланцюгом Маркова відносно потоку сигма-алгебр $(\bar{\mathfrak{F}}_t = \sigma[\bar{X}_s, s \leq t])$. Одночасно послідовність $(X_t, t \geq 0)$ є $(\bar{\mathfrak{F}}_t)$ -ланцюгом Маркова з перехідними імовірностями $\mathbb{P}(X_{s+1} = j \mid X_s = i) = P_{ij}^{(s)}$, а марковський момент $\tau = \inf\{t \geq 1, d_t = 1\}$ задається (2) матрицями (Q_s) , що є підпорядковані (P_s) (4).

Тут марковська властивість процесу \bar{X} виводиться з рівнянь, за якими він будується: $\bar{X}_{s+1} = g_s(\bar{X}_s, \xi_{s+1})$ з невідповідними вимірними функціями g_s , та незалежними величинами (ξ_s) [6].

Вимірність X відносно $(\bar{\mathfrak{F}}_t)$ очевидна. Далі,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{s+1} = j \mid X_s = i) = \\ & \mathbb{P}(d_s = 0)\mathbb{P}(X_{s+1} = j \mid \bar{X}_s = (i, 0)) + \mathbb{P}(d_s = 1)\mathbb{P}(X_{s+1} = j \mid \bar{X}_s = (i, 1)) = \\ & \mathbb{P}(d_s = 0)\mathbb{P}(Y = j) + \mathbb{P}(d_s = 1)\mathbb{P}(Y = j) = P_{ij}^{(s)}. \end{aligned}$$

Нарешті, (2) виводиться з рівностей

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\bar{X}_{s+1} = (j, 0) \mid \bar{X}_s = (i, 0)) = \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(d_{s+1} = 0 \mid d_s = 0) = \\ & \mathbb{P}(Y = j)(1 - (P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)})/P_{ij}^{(s)}) = Q_{ij}^{(s)}. \end{aligned}$$

Наведена конструкція є реалізацією у дискретному випадку концепції процесу Маркова з обривом [1, 1973].

3. МОДЕЛЬ РИЗИКІВ ТА ЙМОВІРНІСТЬ БАНКРУТСТВА

Для опису розподілу моменту τ розглянемо залишкову субстохастичну матрицю переходів:

$$R_s = P_s - Q_s = (R_{ij}^{(s)}), R_{ij}^{(s)} = \mathbb{P}(X_{s+1} = j, \tau = s + 1 \mid X_s = i, \tau > s). \quad (5)$$

Визначимо також ймовірності ризиків переходів

$$\begin{aligned} & \alpha_s(i, j) = R_{ij}^{(s)}/P_{ij}^{(s)} = \\ & \mathbb{P}(\tau = s + 1 \mid X_s = i, X_{s+1} = j, \tau > s), s \geq 0, i, j \in E, \end{aligned} \quad (6)$$

де за означенням $0/0 = 0$.

Розглянемо функцію імовірностей ризиків станів:

$$\begin{aligned} & \beta_s(i) = \mathbb{E}_{si}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) = \sum_j \alpha_s(i, j)P_{ij}^{(s)} = \\ & \sum_j R_{ij}^{(s)} = 1 - \sum_j Q_{ij}^{(s)} = \mathbb{P}(\tau = s + 1 \mid X_s = i, \tau > s), s \geq 0, i \in E. \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення цих співвідношень спираються на означення умовної імовірності, а також на означення умовного розподілу X_{s+1} за умови $X_s = i$.

Лема 2. Умовний розподіл моменту τ задається при $t \geq s \geq 0$, $i_0 = i, i_1, \dots, i_t \in E$ рівностями

$$P_{0i}(\tau > s \mid X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod_{r=0}^{s-1} (1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1})). \quad (8)$$

Зауважимо, що ліва частина не залежить від t за умови $t \geq s$.

Надалі буде розглядатись схема серій, у якій розподіли ланцюга X та моменту τ , а саме матриці $P_s, Q_s, s \geq 0$, залежать від малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ таким чином, що $\beta_s(i) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Параметрами схеми серій є:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(s)} &= P_{ij}^{(s)}(\varepsilon), \quad Q_{ij}^{(s)} = Q_{ij}^{(s)}(\varepsilon), \quad i, j \in E, \quad s \geq 0, \\ X_0 &= x = x(\varepsilon) \in E, \quad T = T(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут T - горизонт ризиків. При $T = \infty$ за означенням $T - 1 = \infty$ та $X_T = 0$.

Зауважимо, що збіжність $\tau \xrightarrow{P_i} \infty$ пов'язана з малістю $\beta_s(i) \rightarrow 0, s \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Основним об'єктом дослідження є функція банкрутства

$$\varphi_t(i) = P_{ti}(\tau < T). \quad (10)$$

Розподіл моменту τ пов'язаний з наступними випадковими сумами і їх середніми

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}), \\ l_t(i) &= E_{ti} \lambda_t = E_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) = E_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \beta_s(X_s), \end{aligned} \quad (11)$$

та

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \sum_{s=t}^{T-1} \sum_{r=s+1}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) \alpha_r(X_r, X_{r+1}), \\ L_t(i) &= E_{ti} \Lambda_t = E_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) l_{s+1}(X_{s+1}) = E_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s(X_s), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\gamma_s(i) = \sum_j \alpha_s(i, j) l_{s+1}(j) P_{ij}^{(s)}.$$

Доведення (11), (12). Рівність

$$E_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) = E_{ti} (E(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \mid X_s)) = E_{ti} \beta_s(X_s)$$

є відображенням марковської властивості X та формули для повторного умовного сподівання, що доводить (11).

Аналогічно, при $t \leq s$

$$\begin{aligned} &\sum_{r>s} E_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) \alpha_r(X_r, X_{r+1}) = \\ &\sum_{r \geq s+1} E_{ti} (\alpha_s(X_s, X_{s+1}) E(\alpha_r(X_r, X_{r+1}) \mid \mathfrak{F}_{s+1})) = \\ &E_{ti} (\alpha_s(X_s, X_{s+1}) E(\sum_{r \geq s+1} \alpha_r(X_r, X_{r+1}) \mid X_{s+1})) = \\ &E_{ti} (\alpha_s(X_s, X_{s+1}) E_{s+1, X_{s+1}} \lambda_{s+1}) = E_{ti} (\alpha_s(X_s, X_{s+1}) l_{s+1}(X_{s+1})) = \\ &E_{ti} (E(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) l_{s+1}(X_{s+1}) \mid X_s)) = E_{ti} \gamma_s(X_s), \end{aligned}$$

де врахована також марковська властивість та означення середніх $\gamma_s(i)$. Звідси підсумовуванням за s отримуємо (12) \square

Надалі будуть використані також рівномірні показники

$$r_\alpha = \sup_{s \geq 0} \sup_{i,j} \alpha_s(i,j), \quad (13)$$

$$r_l = \sup_{s \geq 1} \sup_{j \in A_s} l_s(j), A_s = \cup_{i \in E} \{j \in E : \alpha_s(i,j) > 0\}. \quad (14)$$

4. МЕЖІ ТА АСИМПТОТИКА ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА

Наступна лема є простим наслідком нерівностей Бонфероні, однак дає можливість отримати досить точні оцінки ризику.

Теорема 1. *Нехай в схемі серій (9) виконується умова $l_0(x) < \infty$.*

(a) *Мають місце нерівності*

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq l_0(x) - L_0(x). \quad (15)$$

(b) *За припущення, що $r_l < 1$ у (14), виконуються оцінки*

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq (1 - r_l)l_0(x). \quad (16)$$

(c) *За умови $\sup_{\varepsilon > 0} r_l < 1$ збіжність $\varphi_0(x) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, еквівалентна збіжності $l_0(x) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.*

(d) *Якщо виконуються умови*

$$l_0(x) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \quad (17)$$

та

$$L_0(x) = o(l_0(x)), \varepsilon \rightarrow 0, \quad (18)$$

то існує границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_0(x)/l_0(x) = 1. \quad (19)$$

(e) *Для виконання (18) достатньо, щоб $r_l \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ у (14).*

(f) *Для обчислення функцій l_0, L_0 можна використати пряму рекурсію з матрицями*

$$P^{[0]} = I, P^{[s+1]} = P^{(s)} P^{[s]}, s \geq 0,$$

та векторами $\beta_s = (\beta_s(i), i \in E), \gamma_s = (\gamma_s(i), i \in E)$ з (11), (12), оскільки

$$l_0(x) = \sum_{s=0}^{T-1} P^{[s]} \beta_s(x), L_0(x) = \sum_{s=0}^{T-1} P^{[s]} \gamma_s(x). \quad (20)$$

Зауваження 1. *Відмінність функціоналу $l_0(x)$ від шуканого $\varphi_0(x)$ полягає у тому, що перший стосується безумовного ланцюга X , та не пов'язаний з граничною задачею, яка задає момент τ . Ця обставина часто спрощує задачу обчислення чи оцінки відповідного значення. Наприклад, процес з незалежними приростами втрачає цю властивість при накладанні умови його поглинання у деякий момент зупинки.*

Зауваження 2. *Нерівність (15) можна використати для практичної апроксимації дограничної ймовірності банкрутства $\varphi_0(x)$. Крім того, за (15) з рівності $l_0(x) = 0$ випливає, що $\varphi_0(x) = 0$. Тому надалі можна вважати, що $l_0(x) > 0$.*

Для величин λ_0 з дискретним розподілом (наприклад, для кількостей відвідувань) застосовна наступна

Теорема 2. *Нехай в схемі серій (9) виконується умова (17).*

(a) *Якщо для деякого $b > 0$*

$$E_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 > b} = o(l_0(x)), \varepsilon \rightarrow 0, \quad (21)$$

то мають місце нерівності

$$1 \geq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_0(x)/l_0(x) \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_0(x)/l_0(x) \geq (1 - e^{-b})/b. \quad (22)$$

(b) Якщо умова (21) виконується для кожного $b > 0$, то має місце еквівалентність (19). Для виконання останнього припущення достатньо, щоб

$$E_{0x} \lambda_0 \ln^+(\lambda_0/l_0(x)) = o(l_0(x)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (23)$$

(c) За припущення, що $r_\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, у (13), виконання умови (21) при всіх $b > 0$, необхідне та достатнє для еквівалентності (19).

Тут величини b не залежать від схеми серій, оскільки вони не перераховані у (9).

Якщо нульове значення величини λ_0 у (11) відділене від додатних значень, то умова (21) не може виконуватись для всіх $b > 0$, оскільки ліва частина (21) дорівнюватиме $l_0(x)$ для достатньо малих b . Таке можливо, наприклад, коли момент τ є цілозначним (зокрема, є моментом досягнення). В цьому разі доцільно застосувати наступну теорему.

Теорема 3. Нехай $l_0(x) < \infty$ у схемі серій (9) та

$$a \equiv \text{ess inf}(\lambda_0 : \lambda_0 > 0) > 0. \quad (24)$$

(a) Тоді виконуються нерівності

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \frac{1 - \exp(-a)}{E_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)} l_0(x). \quad (25)$$

Зокрема, збіжність $\varphi_0(x) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, виконується тоді і тільки тоді, коли $l_0(x) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Якщо додатково $\alpha_s(i, j) \in \{0, 1\}$, $s \geq 0$, $i, j \in E$, то

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \frac{1}{E_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)} l_0(x). \quad (26)$$

(c) За припущення у (b) та за умови $a = 1$ еквівалентність (19) має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(\lambda_0 - 1 \mid \lambda_0 \geq 1) = 0. \quad (27)$$

(d) Для обчислення знаменника у (25), (26) можна застосувати тотожність

$$E_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) = a + \sum_{t=a+1}^{T-1} \prod_{s=a}^{t-1} P_{0x}(\lambda_0 \geq s+1 \mid \lambda_0 \geq s).$$

5. ПРИКЛАДИ РОЗПОДІЛЕНИХ РИЗИКІВ

У наведених нижче прикладах X - загальний неоднорідний ланцюг Маркова на просторі E з перехідними ймовірностями $(P_{ij}^{(s)})$ та з моментом зупинки τ , що визначається (2) та Лемою 1 матрицею

$$Q_{ij}^{(s)} = (1 - \alpha_s(i, j)) P_{ij}^{(s)}, \quad s \geq 0, i, j \in E. \quad (28)$$

5.1. Скінченна марковська модель ризиків. Нехай X - неоднорідний ланцюг Маркова на просторі E , $|E| < \infty$, з фіксованим горизонтом $T < \infty$, а ймовірності ризиків у (28) $\alpha_s(i, j) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді виконані всі умови та твердження Теорему 1. Дійсно, в такому разі всі суми є скінченими, а верхні межі є максимумами.

5.2. **Модель ризиків для загальних транзйентних ланцюгів.** Нехай простір $E = \mathbb{Z}_+$.

(А) Фіксовані часові збурення.

Розглянемо таку модель ймовірностей ризиків переходів у (28):

$$\alpha_s(i, j) = \gamma(s)g_s(i, j), \quad (29)$$

де функції γ, g набувають значень з відрізка $[0, 1]$.

Введемо позначення $\bar{g}_s(i) = E_{si}g_s(i, X_{s+1})$.

Припустимо, що:

(a) ряд $\sum_{s=0}^{T-1} \gamma(s)$ збігається рівномірно за $\varepsilon > 0$.

(b) $E_{ti}\bar{g}_s(X_s) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, рівномірно за $0 \leq t < s, i \in E$.

Наприклад, умова (b) виконується, якщо $\bar{g}_s(j) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, рівномірно за s, j у схемі серій.

За даних припущень розглянемо суму

$$l_t(i) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma(s)E_{ti}\bar{g}_s(X_s) \leq \sum_{s=t}^n E_{ti}\bar{g}_s(X_s) + \sum_{s=n+1}^{T-1} \gamma(s).$$

Вибором n другий доданок можна зробити як завгодно малим, далі у першому застосуванні умови (b) доводимо рівномірну за t, i малість $l_t(i)$. Це доводить умову (17) Теорема 1. За цією Теоремою (d) внаслідок вказаної рівномірності виконується також умова (18).

Отже, за твердженням (d) Теорема 1 функції $\varphi_0(x)$ та $l_0(x)$ еквівалентні при $\varepsilon \rightarrow 0$, згідно з (19).

(В) Асимптотично нульові часові збурення.

Нехай ймовірності ризиків переходів мають вигляд (29) та задовольняють умови

(a) $\sup_{s \geq 0} \gamma(s) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

(b) ряд $\sum_{s=t}^{T-1} E_{ti}\bar{g}_s(X_s)$ рівномірно за t, i та $\varepsilon > 0$ обмежений.

Тоді має місце рівномірна збіжність

$$l_t(i) \leq \sup_{s \geq 0} \gamma(s) \sup_{t, i} \sum_{s=t}^{T-1} E_{ti}\bar{g}_s(X_s) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0,$$

та виконуються умови (17), (18) Теорема 1.

Отже, як і вище, має місце еквівалентність (19).

5.3. **Дискретна неоднорідна модель Крамера–Лундберга.** Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова у просторі $E = \mathbb{Z}$, що має вигляд

$$X_t = x + \sum_{s=1}^t c_s - \sum_{s=1}^t \xi_s = x + \sum_{s=1}^t \eta_s, t \in \mathbb{Z}_+, X_0 = x, \quad (30)$$

та інтерпретується як процес динаміки страхового капіталу у часі. Така інтерпретація діє до того моменту поки $X_t \in \mathbb{Z}_+$, однак можна розглядати і іншу частину траєкторії (X_s) - адже тоді можна скористатись незалежністю приростів. В цьому полягає ідея статті. Тут для часових моментів $s \geq 1$:

x - початковий капітал при $t = 0$,

X_t - страховий капітал у момент t ,

c_s - сума страхових премій, що надійшли на інтервалі $[s-1, s)$, $c_s \in \mathbb{N}$,

ξ_s - сума страхових збитків, що були сплачені на інтервалі $[s-1, s)$, $\xi_s \in \mathbb{Z}_+$,

$\eta_s = c_s - \xi_s$ - приріст страхового капіталу на $[s-1, s)$.

На практиці припущення дискретності грошових сум не є суттєвим - адже їх можна вимірювати у копійках. Відповідні дробові значення не можливі. Навпаки, модель з неперервною множиною значень потребує додаткових інтерпретацій.

Випадкові величини (ξ_s) (як і (η_s)) є незалежними у сукупності, та задовольняють умову транзієнтності

$$\inf_{s \geq 1} (c_s - E\xi_s) = \inf_{s \geq 1} E\eta_s > 0, \sup_{s \geq 1} c_s < \infty. \quad (31)$$

За цими припущеннями $X_t \xrightarrow{P} \infty, t \rightarrow \infty$.

(А) У однорідному випадку, коли $c_s = c$, а величини (ξ_s) однаково розподілені, інтервали між від'ємними стрибками процесу (30) незалежні та мають геометричний розподіл з параметром $P(\xi_1 \geq 1)$, а тому (30) є дискретним у часі та просторі аналогом моделі Крамера–Лундберга.

(В) У неоднорідний за часом схемі вказані інтервали є незалежними та в залежності від функції $P(\xi_s \geq 1), s \geq 1$, мають загальні дискретні розподіли.

Введемо при $u \geq 0$ перетворення Лапласа

$$f_s(u) = E \exp(-u\eta_s), s \geq 1, \quad (32)$$

у припущенні Крамера: $f_s(w) \in (1, \infty)$ для деякого $w = w(s) > 0$. За цього припущення та (31) існує $v = v(s) > 0$, що є розв'язком рівняння $f_s(v) = 1$, причому $f_s(u) < 1$ для всіх $u \in (0, v)$.

Рівномірний варіант умови Крамера полягає у тому, що

$$\delta_0 \equiv \sup(u > 0 : \sup_{s \geq 1} f_s(u) < \infty) > 0. \quad (33)$$

Одночасно використовуватимемо умову Крамера–Лундберга про існування $\delta > 0$ такого, що для деякого $\rho(\delta)$ та ρ

$$\sup_{s \geq 1} f_s(\delta) \leq \rho(\delta) \leq \rho < 1. \quad (34)$$

Лема 3. Для виконання (34) достатньо, щоб одночасно з (31) для деякого $u > 0$

$$\sup_{s \geq 1} (E\eta_s^2 + f_s(u)) < \infty. \quad (35)$$

За умови (33) для даного $\delta \in (0, \delta_0)$, і сталих $\gamma_s \geq 0$ коректно визначений показник

$$\gamma_t(\delta) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \prod_{r=t+1}^{s+1} f_r(\delta). \quad (36)$$

Зауважимо, що за припущення (34) на показник δ можна оцінити

$$\gamma_t(\delta) \leq \sup_{s \geq t} \gamma_s \rho / (1 - \rho). \quad (37)$$

Позначимо також випадкову величину, що не зростає за $\delta > 0$:

$$\lambda_t(\delta) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) 1_{X_{s+1} \geq 0}. \quad (38)$$

У таких позначеннях внаслідок незалежності приростів ланцюга X та означень (30), (32), (36) виконуються співвідношення

$$E_{ti} \lambda_t(\delta) \leq E_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) = \exp(-\delta i) \gamma_t(\delta). \quad (39)$$

Перша нерівність очевидна з огляду на (38). Рівність у (39) впливає з незалежності приростів (η_s) у (30) та з (32):

$$E_{ti} \exp(-\delta X_{s+1}) = E \exp(-\delta(i + \sum_{r=t+1}^{s+1} \eta_r)) = \exp(-\delta i) \prod_{r=t+1}^{s+1} f_r(\delta).$$

5.4. Розподілені ризики у моделі Крамера–Лундберга. Нехай $(P_{ij}^{(s)})$ - перехідні імовірності для ланцюга (30), перехідна матриця (2) для моменту зупинки τ має вигляд (28), де ймовірності ризиків переходів дорівнюють

$$\alpha_s(i, j) = \gamma_s \exp(-\delta j) 1_{j \geq 0}, \quad (40)$$

для деяких $\gamma_s \in [0, 1]$ та $\delta \in (0, \delta_0)$ за умови (33).

Відповідно до (40) випадкові величини у (11), що породжують нормуючу функцію $l_0(x)$, згідно з (38) дорівнюють $\lambda_t = \lambda_t(\delta)$. Зокрема,

$$l_0(x) = E_{0x} \lambda_0(\delta).$$

(А) Еквівалентність у схемі серій

Припустимо, що у схемі серій (9) горизонт $T = \infty$, умова Крамера–Лундберга (34) виконується для показника $\delta > 0$ у (40), а також

$$\sup_{s \geq 0} \gamma_s \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, x = X_0 \geq 0.$$

Тоді з урахуванням (34), (36) та (38), (39), (37) виводимо умову (17) Теорема 1:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= E_{0x} \lambda_0(\delta) \leq \exp(-\delta x) \gamma_0(\delta) \leq \\ &\exp(-\delta x) \sup_{s \geq 0} \gamma_s \rho / (1 - \rho) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Далі, у позначеннях (14) маємо $A_s = \{j : j \geq 0\}$. Тому згідно з (14), (39) та (37)

$$r_l \leq \sup_{i \geq 0} \exp(-\delta i) \sup_{s \geq 0} \gamma_s \rho / (1 - \rho) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отже, виконана умова Теорема 1 (d), а з нею і умова (18) цієї Теорема.

Теорема 4. *За вказаних умов має місце твердження (d) Теорема 1, тобто еквівалентність (19).*

Для її практичного застосування можна використати нерівність (41).

(В) Верхня межа для ймовірності банкрутства

Теорема 5. *За припущення (34) з Теорема 1 (a) та з (39), (37) при $x \geq 0$ виконуються співвідношення*

$$\varphi_0(x) \leq l_0(x) \leq \bar{l}_0(x) \equiv \exp(-\delta x) \gamma_0(\delta) \leq \exp(-\delta x) \rho / (1 - \rho). \quad (42)$$

Зауважимо, що стала ρ не входить до схеми серій (9), та що $\bar{l}_0(x) \rightarrow 0$ вже при $x \rightarrow \infty$, навіть для довільних фіксованих γ_s у (40).

(С) Нижня межа для ймовірності банкрутства

Припустимо, що виконується умова (34), а стала $\beta \in (0, \delta)$. Нехай також для всіх t показник (36) задовольняє обмеження

$$\gamma_t(\beta) \leq 1, t \geq 1. \quad (43)$$

З (34) випливає, що для кожного $\beta \in (0, \delta)$ показник $\rho(\beta) \equiv \sup_{s \geq 1} f_s(\beta) < 1$, тобто умова (34) виконується при $\rho = \beta$. Очевидною оцінкою у (36) перевіряємо, що для виконання (43) достатньо, щоб

$$\sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \rho^{s-t+1}(\beta) \leq 1, t \geq 1. \quad (44)$$

Нарешті, для виконання (44) достатньо, щоб мала місце одна з двох умов

$$\sum_{s=1}^{T-1} \gamma_s \leq 1/\rho(\beta), \text{ або } \gamma_t \leq 1/\rho(\beta) - 1, t \geq 1. \quad (45)$$

Теорема 6. *За умов (34) та (43) для довільного фіксованого $\beta \in (0, \delta)$ має місце нерівність*

$$\varphi_0(x) \geq L_0(x) \equiv \exp(-\delta x) [\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)]. \quad (46)$$

(D) Двостороння нерівність для ймовірності банкрутства

За припущення (34) у (42) та (46) наведені такі рівномірні за $x \geq 0$ оцінки

$$\gamma_0(\delta) \geq \exp(\delta x)\varphi_0(x) \geq \gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta) \quad (47)$$

для кожного $\beta \in (0, \delta)$, що задовольняє (43).

З (34) випливає (33). Функція $\gamma_0(u)$, $u \in (0, \delta_0]$, у (36), є опуклою донизу, скінченною при $u \leq \delta$, двічі диференційованою, та спадає у правому околі нуля. Тому додатним є показник

$$\delta_1 = \inf(u \in (0, \delta_0) : \gamma_0(u) = \infty, \text{ або } \partial/\partial u \gamma_0(u) \geq 0) > 0, \quad (48)$$

що у випадку $\delta_1 < \delta_0$ є єдиним коренем рівняння $\partial/\partial u \gamma_0(u) = 0$. За означенням показника δ_1 функція $\gamma_0(u)$ строго спадає при $u \in (0, \delta_1)$, а отже, права частина (47) строго додатна за умови $\delta \in (0, \delta_1)$ для всіх достатньо малих $\beta \in (0, \delta_1)$.

Теорема 7. Для кожного $\delta \in (0, \delta_1)$ існує

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \ln \varphi_0(x) = -\delta. \quad (49)$$

6. ПРИКЛАДИ ДЛЯ МОМЕНТІВ ПЕРШОГО ДОСЯГНЕННЯ

Моменти першого досягнення як моменти банкрутства мають ту специфіку, що відповідні ймовірності ризиків $\alpha_s(i, j)$ не є рівномірно малими, оскільки набувають значень 0 та 1. Натомість малими є відповідні ймовірності настання ризикових подій.

6.1. Матриця ризиків для загальних моментів досягнення. Нехай X - неоднорідний за часом ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями $(P_{ij}^{(s)})$ у просторі E .

Визначимо для набору множин $D_s \subset E$, $D_0 = \emptyset$, $C = \prod_{s=0}^{\infty} D_s$, марковський момент

$$\tau_C = \inf(t \geq 1 : X_t \in D_t), \quad (50)$$

де за вибором $X_0 \notin D_0$.

Теорема 8. Нехай $\tau = \tau_C$. Тоді перехідну матрицю (2) можна визначити як у (28), де

$$\begin{aligned} \alpha_s(i, j) &= 1_{i \notin D_s, j \in D_{s+1}}, s \geq 0, \\ 1 - \alpha_s(i, j) &= 1_{i \notin D_s, j \notin D_{s+1}} + 1_{i \in D_s}, s \geq 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Зокрема, в (7)

$$\beta_s(i) = P_{si}(X_{s+1} \in D_{s+1})1_{i \notin D_s}. \quad (52)$$

6.2. Момент банкрутства для дискретної моделі Крамера–Лундберга. Знову розглянемо ланцюг Маркова (30) на просторі $E = \mathbb{Z}$, що є дискретною неоднорідною у часі моделлю Крамера–Лундберга, з горизонтом $T = \infty$. Визначимо з (50) марковський момент $\tau = \tau_C$ для множин $D_t = D = \{i \in E : i < 0\}$. Тоді τ можна інтерпретувати як класичний момент банкрутства

$$\tau = \inf(t \geq 1 : X_t < 0).$$

Підстановкою у (11) ймовірностей ризиків (51) знаходимо

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_s \geq 0, X_{s+1} < 0} = \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_{s+1} < 0 \leq X_s}, \\ \beta_s(i) &= 1_{i \geq 0} P_{si}(X_{s+1} < 0) = 1_{i \geq 0} P(\eta_{s+1} < -i), \\ l_0(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} E_{0x} 1_{X_s \geq 0, X_{s+1} < 0} = \end{aligned}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} P_{0x}(0 \leq X_s < -\eta_{s+1}) = \sum_{s=0}^{\infty} P(T_{s+1} < -x \leq T_s), \quad (53)$$

де

$$T_s = \sum_{j=1}^s \eta_j, T_0 = 0.$$

Для чисельного знаходження $l_0(x)$ можна застосувати метод послідовних наближень, що викладено у Теоремі 1 (f).

Точна експоненційна асимптотика у однорідній за часом моделі визначається з рівняння відновлення

$$l_0(i) = l(i) = 1_{i \geq 0} P(\eta_1 < -i) + \sum_{j \in E} l(j) P_{ij}^{(0)} = 1_{i \geq 0} P(\eta_1 < -i) + \sum_{j \in E} l(j) P(-\eta_1 = i - j). \quad (54)$$

В теоремі Крамера–Лундберга, що базується на (54), відповідний показник експоненційної асимптотики $l_0(x)$ дорівнює єдиному додатному кореню δ_0 рівняння $f_1(\delta_0) = 1$, причому існує додатна границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\delta_0 x) \varphi_0(x) = G \equiv E[(\exp(-\delta_0 \eta_1) - 1) 1_{\eta_1 < 0}] / (\exp(\delta_0) - 1) E[\eta_1 \exp(-\delta_0 \eta_1)].$$

У загальному (неоднорідному) випадку збіжність $l_0(x)$ до нуля впливає з рівностей у (53), (39), з (36) і (37) для $\gamma_s \equiv 1$, та з умови (34):

$$l_0(x) \leq E_{0x} \sum_{s=0}^{\infty} 1_{X_{s+1} \leq 0} \leq E_{0x} \sum_{s=0}^{\infty} \exp(-\delta X_{s+1}) = \gamma_0(\delta) \leq \exp(-\delta x) \rho / (1 - \rho). \quad (55)$$

Зауважимо, що застосування (55) у однорідній схемі, де $\rho = f_1(\delta) < 1$, гарантує для $l_0(x)$ експоненційний показник $\delta > 0$. Верхня межа таких δ дорівнює показнику Крамера–Лундберга δ_0 . Тому верхню оцінку (55) не можна покращити за порядком збіжності, навіть у однорідному випадку.

Доведення (53) ґрунтується на зображенні (30), як у Теоремі 4. Рівняння (54) виводиться методом першого стрибка з означення (53), та використовує незалежність приростів ($\eta_s, s \geq 1$). Нерівності (55) очевидні. Рівність у (55) отримуємо підстановкою $\gamma_s = 1$ у (39) \square

Оскільки за Теоремою 4 ймовірності ризиків $\alpha_s(i, j) \in \{0, 1\}$, для аналізу ймовірності банкрутства $\varphi_0(x)$ можна застосувати твердження (b), (d) Теоремі 3.

Теорема 9. *Припустимо, що для деякого $\delta > 0$ має місце умова Крамера–Лундберга (34). З неоднорідного рівняння відновлення (54) випливає така верхня оцінка*

$$\varphi_s(i) \leq \rho \exp(-\delta i), i \geq 0, s \geq 0. \quad (56)$$

Звідси з нерівності (26) Теоремі 3 виводимо двобічну нерівність

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq (1 - \rho) l_0(x), x \geq 0. \quad (57)$$

Тут та у (56) показник $\rho = \rho(\delta)$ є правою частиною (34). Зауважимо, що для оптимізації (57) слід обрати $\delta = \arg \min_{\delta > 0} \rho(\delta)$.

Цікаво, що з (57) та (56) випливає (55), хоча ці нерівності отримані різними методами.

Теорема 10. *Застосування (56) та рівняння відновлення (54) у тому ж припущенні (34) призводить до більш практичної двобічної оцінки*

$$\rho \exp(-\delta x) \geq \varphi_0(x) \geq b \exp(-\beta x), x \geq 0, \quad (58)$$

де показник $\beta \in (\delta, \delta_0)$ такий, що

$$\inf_{s \geq 1} f_s(\beta) \geq 1. \quad (59)$$

Стала b обчислена явно (у доведенні) через розподіли величин η_s . Доведено додатність $b > 0$, коли нерівність (59) є строгою. У однорідному випадку $b > 0$ при виборі β як показника Крамера–Лундберга, тобто права оцінка у (58) є точною за порядком.

6.3. Момент досягнення для однорідного процесу народження та загибелі.

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова X на $E = \mathbb{Z}_+$ з перехідною матрицею за один крок $P = P^{(s)} = (p_{ij}, i, j \in E)$, що складається з імовірностей $p_{i,i+1} = p_i > 0$, $i \geq 0$, $p_{i,i-1} = q_i > 0$, $i \geq 1$, $p_{00} = q_0 > 0$, $p_i + q_i = 1$, $i \geq 0$. Ланцюг є незвідним, горизонт $T = \infty$. Матрицю переходів за n кроків позначимо як $P^{[n]} = (P)^n$.

Розглянемо момент досягнення (банкрутства)

$$\tau = \tau_0 = \inf(t \geq 1 : X_t = 0).$$

Перехідна матриця (2) має вигляд (28), де

$$\alpha_s(i, j) = 1_{j=0},$$

відповідно у (11)

$$\lambda_t = \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_{s+1}=0}. \quad (60)$$

Визначимо показники

$$\theta_i = \prod_{s=1}^i \frac{q_s}{p_s}, i \geq 1, \theta_0 = 1.$$

Наведені нижче явні формули добре відомі.

Лема 4. *За умови збіжності ряду*

$$\theta \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s < \infty, \quad (61)$$

виконуються співвідношення

$$l_0(x) = \sum_{i=x}^{\infty} \theta_i, x > 0, \pi \equiv P_{01}(\tau_0 < \infty) = 1 - 1/\theta. \quad (62)$$

Теорема 11. *З Лем 4 та Теорем 3 (b) випливають за умови (61) нерівності*

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \theta^{-1} l_0(x), x \geq 0. \quad (63)$$

Гранична теорема для розподілу моменту $\tau_0 \rightarrow \infty$ у схемі серій наведена у [7, 2013].

7. ДОВЕДЕННЯ

Доведення Лема 1 спирається на формулу для ймовірності перетину t подій вигляду $A_s = \{\tau > s, X_1 = i_1, \dots, X_s = i_s\}$ та марковську властивість ланцюга X . Необхідність отримуємо шляхом підсумовування за i_1, \dots, i_{t-1} та ділення безумовної ймовірності A_{s+1} на ймовірність A_s . Нерівність (4) є наслідком монотонності

$$Q_{ij}^{(s)} \leq P(X_{s+1} = j \mid \tau > s, X_s = i) = P_{ij}^{(s)}$$

та марковської властивості τ . \square

Доведення Лема 2. Підстановкою тотожності означення (6) отримуємо

$$(1 - \alpha_s(i, j))P_{ij}^{(s)} = P_{ij}^{(s)} - R_{ij}^{(s)} = Q_{ij}^{(s)},$$

звідки за Лемою 1

$$P_{0i}(\tau > s, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod_{r=0}^{s-1} Q_{i_r, i_{r+1}}^{(r)} = \prod_{r=0}^{s-1} (1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1})) P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)} \square$$

Доведення Теорема 1.

За нерівностями Бонфероні для довільних $(a_s, 0 \leq s < T) \subset [0, 1]$

$$1 - \sum_{s \geq 0} a_s \leq \prod_{s \geq 0} (1 - a_s) \leq 1 - \sum_{s \geq 0} a_s + \sum_{s \geq 0} \sum_{r > s} a_s a_r,$$

$$1 - \sum_{s \geq 0} a_s \leq \prod_{s \geq 0} (1 - a_s) \leq \exp\left(-\sum_{s \geq 0} a_s\right).$$

Підстановка у ці нерівності значень $a_s = \alpha_s(X_s)$ при скінченному T та перехід до математичного сподівання E_{0i} призводить за означеннями (11), (12) до нерівностей

$$(a) E_{0i} \lambda_0 \geq \varphi_0(i) \geq E_{0i} \lambda_0 - E_{0i} \Lambda_0,$$

$$(b) E_{0i} \lambda_0 \geq \varphi_0(i) \geq E_{0i} (1 - \exp(-\lambda_0)),$$

Ці нерівності при $T = \infty$ виводимо граничним переходом за теоремою Лебега про монотонну збіжність з урахуванням скінченності $E_{0i} \lambda_0$.

(а). Шукана нерівність є очевидним наслідком останніх оцінок та означень (11), (12).

(б). За означеннями (14), (12)

$$L_t(i) = \sum_{s=t}^{T-1} E_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) 1_{X_{s+1} \in A_{s+1}} l_{s+1}(X_{s+1}) \leq \sum_{s=t}^{T-1} E_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) r_l = r_l l_t(i),$$

тому (б) випливає з (а) після підстановки у попередню нерівність $t = 0$, $i = x$.

(с). Шукана еквівалентність є простим наслідком (б).

(д). Аналогічно до доведення (б) з (а) та (18) виводимо, що

$$1 \geq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{L_0(x)}{l_0(x)}\right) = 1.$$

(е). Далі, з нерівності у доведенні (б) та умови отримуємо умову (18)

$$L_0(x)/l_0(x) \leq r_l \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

(ф) За означенням $P^{[s]} = P^{(0,s)}$ у (1), тому

$$P^{[s]} \beta_s(i) = P^{(0,s)} \beta_s(i) = E_{0i} \beta_s(X_s),$$

що за означенням (11) доводить першу рівність у (20). Друга виводиться аналогічно з урахуванням (12) \square

Доведення Теорема 2.

(а). З урахуванням спадання функції $(1 - \exp(-x))/x \downarrow$, $x \geq 0$, з Лема 3 (b) отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &\geq E_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) = \\ &E_{0x} \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_0)}{\lambda_0} \lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b} \right) + E_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) 1_{\lambda_0 > b} \geq \\ &(1 - \exp(-b)) b^{-1} E_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b}) + E_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) 1_{\lambda_0 > b}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_0(x)/l_0(x) &\geq (1 - \exp(-b)) b^{-1} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b})/l_0(x) + \\ &\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) 1_{\lambda_0 > b}/l_0(x) = (1 - \exp(-b)) b^{-1} 1 + 0, \end{aligned}$$

де одночасно з умовою (21) використані співвідношення

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) 1_{\lambda_0 > b}/l_0(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 > b})/l_0(x) = 0.$$

(b). Для доведення (19) достатньо обрати $b \rightarrow 0$ у (22).

За умови (23) сім'я випадкових величин $(\lambda_0/l_0(x), \varepsilon > 0)$ є рівномірно інтегрованою, оскільки за критерієм Вале–Пусена з функцією $V(z) = z \ln^+ z$, $z \geq 0$, має місце зображення $E_{0x}V(\lambda_0/l_0(x)) = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 > b})/l_0(x) = 0$$

внаслідок збіжності $P_{0x}(\lambda_0 > b) \leq l_0(x)/b \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, для кожного $b > 0$.

(c). Визначимо такі функції

$$\bar{\alpha}_s(i, j) = -\ln(1 - \alpha_s(i, j)) < \infty$$

при $r_\alpha < 1$, та величини

$$\bar{\lambda}_0 = \sum_{s=0}^{T-1} \bar{\alpha}_s(X_s, X_{s+1}), \bar{l}_0(x) = E_{0x} \bar{\lambda}_0.$$

Тоді для сталої

$$K_\alpha \equiv \sup_{0 \leq \alpha \leq r_\alpha} (-\alpha^{-1} \ln(1 - \alpha)) = r_\alpha^{-1} \ln(1/(1 - r_\alpha)) < \infty \quad (64)$$

виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \alpha_s(i, j) &\leq \bar{\alpha}_s(i, j) \leq K_\alpha \alpha_s(i, j), \\ \lambda_0 &\leq \bar{\lambda}_0 \leq K_\alpha \lambda_0, \quad l_0(x) \leq \bar{l}_0(x) \leq K_\alpha l_0(x). \end{aligned} \quad (65)$$

Крім того, з означення $\bar{\alpha}_s$ та з Лема 2 впливає тотожність

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 - E_{0x} \prod_{s=0}^{T-1} (1 - \alpha_s(X_s, X_{s+1})) = \\ &1 - E_{0x} \exp \left(- \sum_{s=0}^{T-1} \bar{\alpha}_s(X_s, X_{s+1}) \right) = E_{0x}(1 - \exp(-\bar{\lambda}_0)). \end{aligned} \quad (66)$$

Позначивши $h(b) = b - 1 + \exp(-b) \geq 0$, для кожного $b > 0$ з (65), (66) виводимо

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_0(x)/l_0(x) + K_\alpha - 1 &\geq \\ 1 - \varphi_0(x)/l_0(x) + (\bar{l}_0(x) - l_0(x))/l_0(x) &= E_{0x} h(\bar{\lambda}_0) \bar{\lambda}_0^{-1} \bar{\lambda}_0 1_{\bar{\lambda}_0 \geq b} / \bar{l}_0(x) \geq \\ E_{0x} h(\bar{\lambda}_0) \bar{\lambda}_0^{-1} \bar{\lambda}_0 1_{\bar{\lambda}_0 \geq b} / \bar{l}_0(x) &\geq h(b) b^{-1} E_{0x} \bar{\lambda}_0 1_{\bar{\lambda}_0 \geq b} / K_\alpha l_0(x) \geq \\ h(b) b^{-1} K_\alpha^{-1} E_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq b} / l_0(x), \end{aligned}$$

де враховано, що функція $h(b)/b$ не зростає.

Якщо $\varphi_0(x)/l_0(x) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, з останніх нерівностей отримуємо

$$h(b)b^{-1}\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq b} / l_0(x) \leq 0 + \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} (K_\alpha - 1) = 0,$$

оскільки з умови $r_\alpha \rightarrow 0$ випливає, що $K_\alpha \rightarrow 1$ у (64) \square

Доведення Теорема 3.

(а). Зауважимо, що $l_0(x) = \mathbb{E}_{0x} \lambda_0 = \mathbb{E}_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq a}$ внаслідок (24). Тому за другою нерівністю у доведенні Теорема 1

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} &\geq \frac{\mathbb{E}_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0))}{l_0(x)} = \frac{\mathbb{E}_{0x}(1 - \exp(-\lambda_0)) 1_{\lambda_0 \geq a}}{\mathbb{E}_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq a}} \geq \\ &(1 - \exp(-a)) \frac{\mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 \geq a)}{\mathbb{E}_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq a}} = \frac{1 - \exp(-a)}{\mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)}. \end{aligned}$$

(б). З означення (11) виводимо, що $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_+$. Тому $a \in \mathbb{N}$.

Виходячи з елементарної тотожності для $a_s \in \{0, 1\}$

$$\prod_{s=0}^{\infty} (1 - a_s) = 1_{\sum_{s=0}^{\infty} a_s = 0},$$

за означенням (11) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0x} \lambda_0 \geq \varphi_0(x) &= 1 - \mathbb{E}_{0x} \prod_{s=0}^{T-1} (1 - \alpha_s(X_s, X_{s+1})) = \\ &\mathbb{E}_{0x}(1 - 1_{\lambda_0=0}) = \mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 > 0). \end{aligned} \quad (67)$$

Нарешті, як і в (а), виводимо з (67)

$$\begin{aligned} l_0(x) \geq \varphi_0(x) &= \frac{\mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 > 0)}{\mathbb{E}_{0x} \lambda_0} l_0(x) = \\ &\frac{\mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 \geq a)}{\mathbb{E}_{0x} \lambda_0 1_{\lambda_0 \geq a}} l_0(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)} l_0(x). \end{aligned}$$

(с). З нерівності (26) виводимо, що

$$1 \geq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq 1)}.$$

Тут права частина дорівнює одиниці тоді і тільки тоді, коли

$$1 = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq 1) = 1 + \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 - 1 \mid \lambda_0 \geq 1),$$

що і доводить (27).

(д) Обчислимо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 \geq t \mid \lambda_0 \geq a) = \\ a + \sum_{t=a+1}^{\infty} \mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 \geq t \mid \lambda_0 \geq a) &= a + \sum_{t=a+1}^{\infty} \prod_{s=a}^{t-1} \mathbb{P}_{0x}(\lambda_0 \geq s+1 \mid \lambda_0 \geq s) \square \end{aligned}$$

Доведення Лема 3.

Нехай $\mathbb{E}\eta_s \geq \mu > 0$, а функція

$$g(x, v) = x^2 \exp(v \max(-x, 0)), x \in \mathbb{R}.$$

За означенням при $\delta \leq u/2 < u$

$$\begin{aligned} g(x, \delta) \leq g(x, u/2) &= x^2 1_{x \geq 0} + x^2 \exp(x^- u/2) 1_{x < 0} \leq \\ &x^2 + C_u \exp(-ux). \end{aligned}$$

З нерівності $\exp(-x) - 1 + x \leq g(x, 1)$ вибором $x = \delta\eta_s$, $\delta \leq u/2$ знаходимо

$$f_s(\delta) = \mathbb{E} \exp(-\delta\eta_s) \leq 1 - \delta\mu + \delta^2 D,$$

де

$$D \leq \sup_{s \geq 1} \mathbb{E} g(\eta_s, \delta) \leq D_u \equiv \sup_{s \geq 1} \mathbb{E} [\eta_s^2 + C_u \exp(-u\eta_s)] < \infty,$$

а остання нерівність не залежить від вибору достатньо малого $\delta > 0$.

Нарешті, вибір $\delta = \min(u/2, \mu/2D_u)$ забезпечує оцінку $\rho \leq 1 - \delta\mu/2D_u < 1$ \square

Доведення Теорема 4.

За умови (33) перетворення Лапласа $f_s(u)$ у (32) є скінченими, двічі диференційовними при $u \in (0, \delta_0)$ та мають внаслідок (31) обмежені другі похідні

$$f_s''(u) = \mathbb{E} \eta_s^2 \exp(-u\eta_s) \leq \sup_{s \geq 1} c_s^2 + C_{uv} \sup_{s \geq 1} f_s(v) < \infty \quad (68)$$

для довільного $v \in (u, \delta_0)$, де $C_{uv} = \sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 (\exp(-ux) - 1) \exp(vx)$.

Звідси стандартними обчисленнями виводимо логарифмічну опуклість (та просто опуклість) функції $f_s(u)$, оскільки

$$(\ln f_s(u))'' = (f_s''(u)f_s(u) - f_s'^2(u))/f_s^2(u) \geq 0$$

за нерівністю Коші.

З (33), опуклості, та (34) виводимо також, що при $0 < \beta < \delta < \delta_0$

$$f_s(\beta) \leq 1 - (1 - \rho)\beta/\delta = \gamma(\beta) < 1, \quad (69)$$

тобто умова (34) виконується також при кожному $\beta \in (0, \delta)$.

Для обґрунтування достатності (44) оцінимо з (34) при $\delta = \beta$ та з означення $\gamma_t(\delta)$ (36)

$$\gamma_t(\beta) \leq \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \rho^{s-t+1}(\beta) \leq 1.$$

Достатність (45) випливає з нерівності $\rho(\beta) < 1$ \square

Доведення Теорема 6.

Розглянемо за означеннями (11), (40), (38) з урахуванням вибору $\beta \in (0, \delta)$:

$$l_t(i) = \mathbb{E}_{ti} \lambda_t(\delta) \leq \mathbb{E}_{ti} \lambda_t(\beta) \leq \exp(-\beta i) \gamma_t(\beta) \leq \exp(-\beta i), \quad i \geq 0,$$

де використано також (39) та умову (43).

Далі, за означеннями (11), (12), (40) згідно з твердженням (а) Теорема 1 та останньої нерівності

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &\geq l_0(x) - L_0(x) = \mathbb{E}_{0x} \sum_{s=0}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) 1_{X_{s+1} \geq 0} (1 - l_{s+1}(X_{s+1})) \geq \\ &\mathbb{E}_{0x} \sum_{s=0}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) 1_{X_{s+1} \geq 0} (1 - \exp(-\beta X_{s+1})) \geq \\ &\mathbb{E}_{0x} \sum_{s=0}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) (1 - \exp(-\beta X_{s+1})) = \\ &\exp(-\delta x) [\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)] = \underline{L}_0(x), \end{aligned} \quad (70)$$

де також враховане співвідношення (39) \square

Доведення Теорема 7.

Як вказано у доведенні Теорема 6, функції $f_s(u)$ у (32) логарифмічно опуклі та двічі диференційовні на $(0, \delta)$. Тому їх добуток у (36) має такі ж властивості, а їх опукла комбінація $\gamma_0(u)$ є опуклою та двічі диференційовною. Скінченність $\gamma_0(u) < \infty$ при $u \in (0, \delta)$ випливає з нерівності (69).

Далі, з умови транзйентності (31) виводимо, що $f'_s(0) = -E\eta_s < 0$, а з опуклості випливає, що похідна $f'_s(u)$ не спадає. Внаслідок (68) друга похідна $f''_s(u) \leq F$, $u \in [0, \delta)$, $s \geq 0$ - рівномірно обмежена. Тому у непорожньому околі нуля

$$f'_s(u) < 0, u \in (0, \inf_{s \geq 1} (E\eta_s)/F), s \geq 1.$$

Отже, функція $\gamma_0(u)$ також спадає у тому ж інтервалі для u .

Додатність δ_1 у (48) випливає з неперервності похідної $\gamma'_0(u)$, $u \in (0, \delta)$.

Додатність приросту $\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)$ є наслідком спадання функції $\gamma_0(u)$ при $u \in (0, \delta_1)$.

Нарешті, з (47) виводимо нерівність

$$-\delta + x^{-1} \ln \gamma_0(\delta) \leq x^{-1} \ln \varphi_0(x) \leq -\delta + x^{-1} \ln(\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)),$$

звідки при $x \rightarrow \infty$ отримуємо (49) \square

Доведення Теорема 8.

Позначимо $i_0 = x \notin D_0$. Розглянемо при $i_s \in E$ за означеннями (28), (51)

$$\begin{aligned} \prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} &= \prod_{s=0}^{t-1} \left([1_{i_s \notin D_s, i_{s+1} \notin D_{s+1}} + 1_{i_s \in D_s}] P_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} \right) = \\ \prod_{s=0}^{t-1} \left([1_{i_s \notin D_s, i_{s+1} \notin D_{s+1}}] P_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} \right) &= P_{0x}(X_1 = i_1 \notin D_1, \dots, X_t = i_t \notin D_t) = \\ &= P_{0x}(\tau_C > t, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t). \end{aligned}$$

З іншого боку, при $i_t = i$

$$\begin{aligned} P_{0x}(\tau_C > t+1, X_{t+1} = j \mid \tau_C > t, X_t = i) &= \\ \frac{P_{0x}(\tau_C > t+1, X_{t+1} = j, X_t = i)}{P_{0x}(\tau_C > t, X_t = i)} &= \frac{\sum_{i_1, \dots, i_{t-1} \in E} [\prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}] Q_{ij}^{(t)}}{\sum_{i_1, \dots, i_{t-1} \in E} [\prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}]} = Q_{ij}^{(t)}. \end{aligned}$$

Отже, (51) є наслідком (3) \square

Доведення Теорема 9.

Зауважимо, що функція банкрутства $\varphi_s(i)$ у моделі (30) задовольняє неоднорідне рівняння відновлення

$$\varphi_{s-1}(i) = P(\eta_s < -i) + E\varphi_s(i + \eta_s) 1_{i+\eta_s \geq 0}, s \geq 1, i \geq 0. \quad (71)$$

Розглянемо Банахів простір \mathfrak{N}_δ функцій $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою

$$\|g\| = \sup_{s \geq 0} \sup_{i \geq 0} \exp(\delta i) |g_s(i)|,$$

та лінійний субстохастичний оператор T на \mathfrak{N}_δ

$$(Tg)_{s-1}(i) = E g_s(i + \eta_s) 1_{i+\eta_s \geq 0}, s \geq 1, i \geq 0.$$

Оскільки $|g_s(i)| \leq \exp(-\delta i) \|g\|$, то

$$\begin{aligned} \|Tg\| / \|g\| &\leq \sup_{s \geq 1} \sup_{i \geq 0} \exp(\delta i) E \exp(-\delta(i + \eta_s)) 1_{i+\eta_s \geq 0} \leq \\ &\leq \sup_{s \geq 1} E \exp(-\delta \eta_s) = \sup_{s \geq 1} f_s(\delta) \leq \rho < 1, \end{aligned}$$

за умовою (34).

Отже, оператор T - строго стискаючий. Тому рівняння вигляду $g = h + Tg$ при $h \in \mathfrak{N}_\delta$ має у \mathfrak{N}_δ єдиний розв'язок g , що збігається з мінімальним [5], [2, 1996]: $g = \sum_{s \geq 0} T^s h$. Звідси випливає такий принцип порівняння: якщо $\bar{g} = \bar{h} + T\bar{g}$ для деякого $\bar{h} \in \mathfrak{N}_\delta$ та поточково $h \leq \bar{h}$, то $g \leq \bar{g}$.

Рівняння (71) має вигляд $\varphi = \psi + T\varphi$, де $\psi_{s-1}(i) = P(i + \eta_s < 0)$, $s \geq 1$. Оберемо $\bar{\varphi}_s(i) = \rho \exp(-\delta i)$. Тоді $\bar{\varphi} = \bar{\psi} + T\bar{\varphi}$, де $\bar{\psi} = \bar{\varphi} - T\bar{\varphi}$. Звідси з використанням (32) та нерівностей

$$\exp(\delta i)P(i + \eta_s < 0) \leq E \exp(-\delta \eta_s)1_{i+\eta_s < 0} \leq f_s(\delta)$$

отримуємо при $s \geq 1$, $i \geq 0$

$$\begin{aligned} \exp(\delta i)[\bar{\psi}_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] &= \\ \exp(\delta i)[\bar{\varphi}_{s-1}(i) - (T\bar{\varphi})_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] &= \\ \rho[1 - E \exp(-\delta \eta_s)1_{i+\eta_s \geq 0}] - \exp(\delta i)P(i + \eta_s < 0) &\geq \\ \rho[1 - f_s(\delta) + E \exp(-\delta \eta_s)1_{i+\eta_s < 0}] - E \exp(-\delta \eta_s)1_{i+\eta_s < 0} &= \\ \rho[1 - f_s(\delta)] - (1 - \rho)E \exp(-\delta \eta_s)1_{i+\eta_s < 0} &\geq \\ \rho[1 - f_s(\delta)] - (1 - \rho)f_s(\delta) = \rho - f_s(\delta) &\geq 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Отже, $\bar{\psi} \geq \psi$ поточково. Тому за принципом порівняння $\bar{\varphi} \geq \varphi$, що доводить (56)

□

Доведення Теорема 10.

Визначимо при $n \geq 0$ марковські моменти

$$\theta_0 = 0, \tau_{n+1} = \inf(t > \theta_n : X_t < 0), \theta_{n+1} = \inf(t > \tau_n : X_t \geq 0),$$

де за означенням $\inf \emptyset = \infty$.

Зауважимо, що $\tau_1 = \tau$ та $\theta_n < \infty$ на множині $\tau_{n-1} < \infty$ внаслідок транзйентності (31).

Визначимо максимальну з імовірностей банкрутства

$$\pi = \sup_{s \geq 0} \sup_{i \geq 0} P_{si}(\tau < \infty) = \sup_{s \geq 0} \sup_{i \geq 0} \varphi_s(i) \leq \rho < 1, \quad (73)$$

де використано нерівність (56).

Оскільки $\{\lambda_0 \geq n\} = \{\tau_n < \infty\}$, то за марковською властивістю ланцюга X

$$\begin{aligned} P_{0x}(\lambda_0 \geq n+1 \mid \lambda_0 \geq n) &= P_{0x}(\tau_{n+1} < \infty \mid \tau_n < \infty) = \\ E_{0x}(P_{\theta_n, X_{\theta_n}}(\tau < \infty)1_{\theta_n < \infty}) &\leq \pi < 1 \end{aligned}$$

за означенням (73).

З останньої нерівності, зокрема,

$$P_{0x}(\lambda_0 = 1) \geq \varphi_0(x)(1 - \pi) > 0,$$

тому $a = 1$ у Теоремі 3.

Отже, згідно з Теоремою 3 (d)

$$E(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) \leq a + \sum_{t=a+1}^{\infty} \pi^{t-a} = 1/(1 - \pi).$$

Тому за (26)

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq (1 - \pi)l_0(x). \quad (74)$$

Нарешті, з (74) та нерівності (73) отримуємо (57) □

Доведення Теорема 11.

Скористаємося методом доведення (56), а саме принципом порівняння для розв'язків інтегральних рівнянь $\varphi = \psi + T\varphi$ та $\bar{\varphi} = \bar{\psi} + T\bar{\varphi}$, з тим же оператором T та функцією $\bar{\varphi}_s(i) = b \exp(-\beta i)$. Для доведення нерівності $\varphi \geq \bar{\varphi}$ у (58) достатньо перевірити, що $\psi \geq \bar{\psi}$.

Визначимо сталу

$$\begin{aligned} b &= \inf_{s \geq 1} b_s, \\ b_s^{-1} &= \sup_{j \in (j_s, 0]} [1 - E \exp(-\beta \eta_s)1_{\eta_s \geq j}] \exp(\beta j) / P(\eta_s < j), \end{aligned} \quad (75)$$

де номери

$$j_s = \sup(j \leq 0 : E \exp(-\beta \eta_s) 1_{\eta_s \geq j} \geq 1),$$

і за означенням $\sup \emptyset = -\infty$. Зауважимо: якщо $f_s(\beta) > 1$ у (59), то $j_s > -\infty$, тобто верхня межа у (75) є строго додатним максимумом, оскільки при $j > j_s$ чисельник і знаменник у (75) є додатними. Дійсно, якщо знаменник $P(\eta_s < j) = 0$, то з умови (59) випливає, що $j \leq j_s$. Якщо $f_s(\beta) > 1$, то скінченність j_s випливає зі збіжності ряду вибором $j \leq 0$ такого, що

$$E \exp(-\beta \eta_s) 1_{\eta_s < j} \leq (f_s(\beta) - 1)/2.$$

Як у (72), розглянемо при $j = -i \leq 0$

$$\exp(\delta i) [\bar{\psi}_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] =$$

$$b[1 - E \exp(-\beta \eta_s) 1_{\eta_s \geq j}] - \exp(-\beta j) P(\eta_s < j) \leq 0,$$

оскільки за означенням у (75) $b \leq b_s$, а при $j \leq j_s$ нерівність очевидна.

Тому за принципом порівняння $\varphi \geq \bar{\varphi}$ \square

Доведення Лема 4.

Зауважимо, що розподіл моменту τ_0 першого досягнення нуля не містить імовірностей p_0, q_0 виходу з цього стану. Тому вважатимемо, що $p_0 = 1, q_0 = 0$.

Розглянемо суму матричного ряду (потенціал)

$$R = \sum_{s \geq 1} P^{[s]}.$$

Її елементи - скінченні, оскільки умова (61) достатня (та необхідна) для транзйентності ланцюга X . Матриця R є мінімальним розв'язком рівняння $R = P + PR$.

Тому функція $r(i) \equiv R_{i0}$ задовольняє рівняння

$$r(i) = R_{i0} = \sum_{s \geq 1} P_{i0}^{[s]} = \sum_{s \geq 0} P_{0i}(X_{s+1} = 0) = l_0(i), \quad (76)$$

та

$$r(i) = P_{i0} + (PR)_{i0} = q_1 \delta_{i1} + \sum_{j \geq 0} p_{ij} r(j).$$

Звідси отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} r(i) &= q_1 \delta_{i1} + p_i r(i+1) + q_i r(i-1), \quad i \geq 1, \\ r(0) &= r(1). \end{aligned} \quad (77)$$

З (77) множенням лівої частини на $p_i + q_i = 1$ та послідовними ітераціями виводимо, що

$$\begin{aligned} r(i) - r(i-1) &= -\theta_{i-1}, \quad i > 1, \\ r(1) - r(0) &= 0, \end{aligned}$$

та остаточно

$$r(i) = r(0) - \sum_{s=1}^{i-1} \theta_s, \quad i \geq 1.$$

Спрямувавши тут $i \rightarrow \infty$, з урахуванням $r(i) \rightarrow 0$ знаходимо

$$l_0(0) = r(0) = \sum_{s \geq 1} \theta_s = \theta - 1, \quad l_0(i) = r(i) = \sum_{s \geq i} \theta_s, \quad i \geq 1. \quad (78)$$

Друга тотожність у (62) випливає з марковської властивості та однорідності ланцюга, та рівностей (77) і $p_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \pi &= P(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 1) = P(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 0) = \\ &= 1 - 1 / \sum_{s \geq 0} P_{00}^{[s]} = 1 - 1 / (1 + r(0)) = 1 - \theta^{-1}, \end{aligned}$$

$$\pi = P(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 0) = P(\lambda_0 \geq s + 1 \mid \lambda_0 \geq s), s \geq 0,$$

де використано тотожність (76).

Застосування двох останніх тотожностей, оцінки (26) з урахуванням Теорема 3 (d), де $a = 1$, доводить (63):

$$E(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) = 1 + \sum_{t \geq 1} \pi^{t-1} = 1/(1 - \pi) = \theta \square$$

Автор вдячний рецензенту за його час та суттєві зауваження, що дозволили покращити рівень викладу.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1973.
2. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
3. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, “Наука”, Москва, 1986.
4. S. P. Maun and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
5. V. M. Shurenkov, *Markov's Ergodic Processes*, “Nauka”, Moscow, 1989. (Russian)
6. М. В. Карташов, *Асимптотика проріджених марковських моментів на неоднорідних за часом дискретних ланцюгах Маркова*, Теорія ймовір. та матем. статист. **88** (2013), 83–94.
7. М. В. Карташов, *Quantitative and qualitative limits for exponential asymptotics of hitting times for birth-and-death chains in a scheme of series*, Теорія ймовір. та матем. статист. **89** (2013), 41–51.

КАФЕДРА ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКИ ТА АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, 01033, КИЇВ, УКРАЇНА

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Надійшла 04/03/2015