Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 116–129

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 116–129

МІНІМАКСНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ШУМОМ

УДК 519.21

М. М. ЛУЗ І М. П. МОКЛЯЧУК

Анотація. Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)\,dt$$

від невідомих значень випадкового процесу $\xi(t)$ зі стаціонарними приростами за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ в точках $t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$, де $\eta(t)$ – це некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес. Запропоновано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала у випадку, коли спектральні щільності процесів відомі. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оцінок функціонала.

Abstract. The problem of optimal estimation of the linear functional $A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt$ depending on the unknown values of a random process $\xi(t)$ with stationary increments from observations of the process $\xi(t)+\eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$, where $\eta(t)$ is a stationary random process uncorrelated with $\xi(t)$, is considered. Formulas for calculating the mean square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case where spectral densities are exactly known. Relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics are proposed for the given sets of admissible spectral densities.

Аннотация. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)\,dt$$

от неизвестных значений случайного процесса $\xi(t)$ со стационарными приращениями по наблюдениям процесса $\xi(t)+\eta(t)$ в точках $t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$. Найдено формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала, когда спектральные плотности процессов известны. Для заданных множеств допустимых спектральных плотностей приведены соотношения для определения наименее благоприятных спектральных плотностей и минимаксных спектральных характеристик оценок функционала.

1. Вступ

В статті досліджується задача оцінювання пропущених спостережень випадкового процесу зі стаціонарними приростами. Подібні задачі для стаціонарних процесів вперше були поставлені та розв'язані в роботах А. М. Колмогорова [10], Н. Вінера [23] та А. М. Яглома [25, 26]. У своїх роботах А. М. Яглом [24] та М. С. Пінскер [19] запропонували більш загальну модель процесів зі стаціонарними приростами n-го порядку. Зокрема, авторами були побудовані канонічні зображення процесів зі стаціонарними приростами та їх спектральних щільностей, знайдено розклад Вольда,

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Випадковий процес зі стаціонарними приростами, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

досліджено задачі екстраполяції та фільтрації. Ці та інші властивості процесів зі стаціонарними приростами, а також інші узагальнення поняття стаціонарності, достатньо детально описані в книгах А. М. Яглома [25, 26]. Задачу екстраполяції нестаціонарного сигналу за спостереженнями з шумом досліджував В. Белл [1].

Класичні методи екстраполяції, інтерполяції та фільтрації випадкових процесів використовують спектральні щільності для побудови відповідних оцінок. Проте на практиці точний вигляд спектральних щільностей невідомий, натомість, можливим є визначення деякої множини допустимих спектральних щільностей. У такому випадку обґрунтованим є застосування мінімаксного (робастого) методу оцінювання, який полягає в мінімізації значення середньоквадратичної похибки оцінки за всіма спектральними щільностями із заданого класу. Вперше такий підхід був запропонований У. Гренандером [4] для розв'язання задачі екстраполяції функціонала від невідомих значень деякого стаціонарного процесу. Ю. Франке [6] вивчав задачі мінімаксної екстраполяції та інтерполяції стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. Основні результати щодо робастних методів оцінювання, отримані до 1985 року, описані в оглядовій статті С. А. Кассама та Г. В. Пура [9]. В роботах М. П. Моклячука [16, 17], М. П. Моклячука та О.Ю Масютки [18] викладені результати сучасних досліджень задач мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів від стаціонарних процесів. Аналогічні задачі для періодично корельованих процесів досліджені в статті М. П. Моклячука та І. І. Дубовецької [5] (див. також книгу І. І. Голіченко та М. П. Моклячука [3]).

Класичні та мінімаксні задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації функціоналів від випадкових процесів зі стаціонарними приростами розглядаються у статтях М. М. Луза та М. П. Моклячука [11]–[14].

У даній статті досліджується задача інтерполяції функціонала

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)\,dt$$

від невідомих значень випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, зі стаціонарним приростами за спостереженнями випадкового процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\eta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес. Аналогічна задача у випадку дискретного часу розглянута в статті М. М. Луза та М. П. Моклячука [15].

2. Стаціонарні прирости. Спектральний розклад

У цьому розділі наводиться короткий огляд спектральної теорії випадкових процесів зі стаціонарними n-ми приростами, яка була розвинена А. М. Ягломом та М. С. Пінскером в статтях [19, 24] для випадкових процесів з неперервним часом.

Означення 2.1. Стохастичним n-м приростом з кроком $\tau \in \mathbb{R}$ випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, називається функція

$$\xi^{(n)}(t,\tau) = (1 - B_\tau)^n \xi(t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \xi(t - l\tau), \tag{1}$$

де B_τ оператор зсуву на величину τ, такий що $B_\tau\xi(t) = \xi(t-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Означення 2.2. Стохастичний n-й приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$ випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, називається стаціонарним (в широкому сенсі), якщо математичні сподівання

$$\mathsf{E}\xi^{(n)}(t_0,\tau) = c^{(n)}(\tau),$$

$$\mathsf{E}\xi^{(n)}(t_0+t,\tau_1)\xi^{(n)}(t_0,\tau_2) = D^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2)$$

існують при довільних дійсних t_0, τ, t, τ_1, τ_2 та не залежать від t_0. Функція $c^{(n)}(\tau)$ називається середнім значенням стаціонарного n-го приросту, а функція $D^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2)$

називається структурною функцією стаціонарного n-го приросту (або структурною функцією n-го порядку випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$).

Випадковий процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$ за формулою (1), називається процесом зі стаціонарними n-ми приростами.

Теорема 2.1. *Середнє значення $c^{(n)}(\tau)$ стаціонарного стохастичного n-го приросту $\xi^{(n)}(t,\tau)$ та його структурну функцію $D^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2)$ можна подати у вигляді*

$$c^{(n)}(\tau) = c\tau^n, \tag{2}$$

$$D^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}(1-e^{-i\tau_1\lambda})^n(1-e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF(\lambda), \tag{3}$$

де c – деяка константа, $F(\lambda)$ – неперервна зліва неспадна обмежена функція, $F(-\infty) = 0$, причому константа c та функція $F(\lambda)$ однозначно визначаються приростом $\xi^{(n)}(t,\tau)$.

З іншого боку, функція $c^{(n)}(\tau)$ вигляду (2) з деякою константою c та функція $D^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2)$ вигляду (3), де $F(\lambda)$ задовольняє вказаним вище умовам, є середнім значенням та структурною функцією деякого стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(t,\tau)$.

Використовуючи зображення (3) структурної функції стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(t,\tau)$ та теорему Карунена [8], [2] отримуємо зображення стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(t,\tau)$ у такому вигляді:

$$\xi^{(n)}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1-e^{-i\lambda\tau})^n \frac{(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n} dZ_{\xi^{(n)}}(\lambda), \tag{4}$$

де $Z_{\xi^{(n)}}(\lambda)$ – випадковий процес з ортогональними приростами на $\mathbb{R}$, що підпорядкований структурній функції $F(\lambda)$:

$$\mathsf{E}|Z_{\xi^{(n)}}(t_2) - Z_{\xi^{(n)}}(t_1)|^2 = F(t_2) - F(t_1) < \infty, \quad -\infty < t_1 < t_2 < \infty. \tag{5}$$

Скористаємося спектральним розкладом (4) для знаходження оптимальної лінійної оцінки невідомих значень випадкового процесу зі стаціонарними приростами.

3. Класичний метод інтерполяції

Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який породжує стаціонарний випадковий приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$ з абсолютно неперервною спектральною функцією $F(\lambda)$, що має спектральну щільність $f(\lambda)$. Також розглянемо стаціонарний випадковий процес $\eta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, некорельований з процесом $\xi(t)$, який має абсолютно неперервну спектральну функцію $G(\lambda)$ та спектральну щільність $g(\lambda)$. Не втрачаючи загальності припустимо, що випадковий приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$ та випадковий процес $\eta(t)$ центровані, $\mathsf{E}\xi^{(n)}(t,\tau) = 0$, $\mathsf{E}\eta(t) = 0$, а крок приросту $\tau > 0$.

Класична задача інтерполяції полягає в оптимальному в середньоквадратичному сенсі лінійному оцінюванню фунціонала

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt$$

від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$. Для розв'язання задачі будемо вимагати, щоб спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ задовольняли умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2 \lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^n (f(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n} g(\lambda))} d\lambda < \infty \tag{6}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу, тобто такої функції, що може бути представлена у вигляді $\gamma(\lambda)=\int_0^{T+\tau n}\alpha(t)e^{i\lambda t}dt$. Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб в задачі інтерполяції було неможливо знайти безпомилкову оцінку значення функціонала $A_T\xi$ [22].

Розв'яжемо поставлену задачу, застосовуючи метод ортогональних проекцій в гільбертовому просторі, який був запропонований А. М. Колмогоровим [10]. Розглянемо гільбертів простір $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та скінченною дисперсією. Скалярний добуток елементів $\gamma_1,\gamma_2\in H$ визначається формулою $(\gamma_1;\gamma_2)=\mathsf{E}\gamma_1\overline{\gamma_2}$. Застосування запропонованого методу складається з трьох кроків: крок 1 – задати підпростір $H^0\subset H$, породжений відомими спостереженнями процесу; крок 2 – задати елемент $\gamma\in H$, оцінку якого необхідно знайти; крок 3 – знайти ортогональну проекцію елемента $\gamma\in H$ на підпростір H^0.

Крок 1. Позначимо через $H^{0-}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)})$ замкнутий лінійний підпростір простору $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, що породжений приростами $\{\xi^{(n)}(t,\tau)+\eta^{(n)}(t,\tau):t<0\}$, а через $H^{T+}(\xi_{-\tau}^{(n)}+\eta_{-\tau}^{(n)})$ позначимо замкнутий лінійний підпростір у просторі H, який породжений приростами $\{\xi^{(n)}(t,-\tau)+\eta^{(n)}(t,-\tau):t>T\}$. Оскільки

$$\xi^{(n)}(t,-\tau)+\eta^{(n)}(t,-\tau)=(-1)^n(\xi^{(n)}(t+\tau n,\tau)+\eta^{(n)}(t+\tau n,\tau)),$$

то

$$H^{T+}(\xi_{-\tau}^{(n)}+\eta_{-\tau}^{(n)})=H^{(T+\tau n)+}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)}).$$

Тоді

$$H^0=H^{0-}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)})\oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)}).$$

Визначимо також підпростори $L_2^{0-}(p)$ та $L_2^{T+}(p)$ у гільбертовому просторі $L_2(p)$ квадратично інтегровних функцій, що задані на дійсній осі $\mathbb{R}$, які породжені відповідно наборами функцій

$$\left\{e^{i\lambda t}(1-e^{-i\lambda\tau})^n\frac{(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}:t<0\right\}\text{ та }\left\{e^{i\lambda t}(1-e^{-i\lambda\tau})^n\frac{(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}:t>T\right\},$$

де

$$p(\lambda)=f(\lambda)+\frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}g(\lambda)$$

– це спектральна щільність випадкового процесу $\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$ [13].

Крок 2. Позначимо $q_\tau(t)=\left[-\frac{t}{\tau}\right]$, $q'_\tau(t)=\left[-\frac{t}{\tau}\right]'$, $r_\tau(t,T)=\left[\frac{T-t}{\tau}\right]$, $r'_\tau(t,T)=\left[\frac{T-t}{\tau}\right]'$, де $[x]'$ позначає найменше ціле число серед чисел, що більші або рівні x. Функціонал $A_T\xi$ допускає наступне зображення:

$$A_T\xi=A_T\zeta-A_T\eta=B_T\zeta-A_T\eta-V_T\zeta=H_T\xi-V_T\zeta,\quad H_T\xi:=B_T\zeta-A_T\eta,$$

$$A_T\zeta=\int_0^T a(t)\zeta(t)dt,\quad A_T\eta=\int_0^T a(t)\eta(t)dt,$$

$$B_T\zeta=\int_0^T b_{\tau,T}(t)\zeta^{(n)}(t,\tau)dt,\quad V_T\zeta=\int_{-\tau n}^0 v_{\tau,T}(t)\zeta(t)dt,$$

де функції $v_{\tau,T}(t)$, $t\in[-\tau n;0)$, та $b_{\tau,T}(t)$, $t\in[0;T]$, обчислюються за формулами

$$v_{\tau,T}(t)=\sum_{l=q'_\tau(t)}^{\min\{r_\tau(t,T),n\}}(-1)^l\binom{n}{l}b_{\tau,T}(t+l\tau),\quad t\in[-\tau n;0),\tag{7}$$

та

$$b_{\tau,T}(t)=\sum_{k=0}^{r_\tau(t,T)}a(t+\tau k)d(k)=D_T^\tau\mathbf{a}(t),\ t\in[0;T],\tag{8}$$

відповідно [11, 12]. Коефіцієнти $\{d(k) : k \geq 0\}$ у формулі (8) визначаються зі співвідношення $\sum_{k=0}^{\infty} d(k)x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right)^n$, D_T^τ – лінійне перетворення, що діє на довільну функцію $x(t)$, $t \in [0;T]$, наступним чином:

$$D_T^\tau \mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{r_\tau(t,T)} x(t+\tau k)d(k).$$

Функціонал $H_T\xi$ має скінченний другий момент, тому до нього можуть бути застосовані методи опуклої оптимізації в гільбертових просторах. Позначимо через $\widehat{A}_T\xi$ оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $A_T\xi$, яка буде побудована, використовуючи відомі спостереження випадкового процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, а через $\widehat{H}_T\xi$ – оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $H_T\xi$ за спостереженнями стохастичного n-го приросту $\xi^{(n)}(t,\tau)+\eta^{(n)}(t,\tau)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T+\tau n]$. Позначимо через $\Delta(f,g;\widehat{A}_T\xi) = \mathsf{E}|A_T\xi - \widehat{A}_T\xi|^2$ та $\Delta(f,g;\widehat{H}_T\xi) = \mathsf{E}|H_T\xi - \widehat{H}_T\xi|^2$ середньоквадратичні похибки оцінок $\widehat{A}_T\xi$ та $\widehat{H}_T\xi$ відповдно. Оскільки функціонал $V_T\zeta$ залежить лише від відомих спостережень $\zeta(t)$, $-\tau n \leq t < 0$, виконуються співвідношення

$$\widehat{A}_T\xi = \widehat{H}_T\xi - V_T\zeta, \tag{9}$$

$$\Delta\left(f,g;\widehat{A}_T\xi\right) = \mathsf{E}\left|A_T\xi - \widehat{A}_T\xi\right|^2 = \mathsf{E}\left|H_T\xi - V_T\zeta - \widehat{H}_T\xi + V_T\zeta\right|^2$$
$$= \mathsf{E}\left|H_T\xi - \widehat{H}_T\xi\right|^2 = \Delta\left(f,g;\widehat{H}_T\xi\right).$$

Отже, для побудови оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$ достатньо побудуваати оцінку функціонала $H_T\xi$. Тоді лінійна оцінка $\widehat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ зображується у вигляді

$$\widehat{A}_T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(\lambda)dZ_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda) - \int_{-\tau n}^{0} v_{\tau,T}(t)(\xi(t)+\eta(t))dt, \tag{10}$$

де $h_\tau(\lambda)$ – спектральна характеристика оцінки $\widehat{H}_T\xi$.

Зазначимо, що функціонал $H_T\xi$ допускає спектральне зображення

$$H_T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} B_T^\tau(\lambda)(1-e^{-i\lambda\tau})^n \frac{(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n} dZ_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\lambda)dZ_\eta(\lambda),$$

де

$$B_T^\tau(\lambda) = \int_0^T b_{\tau,T}(t)e^{i\lambda t}dt = \int_0^T D_T^\tau \mathbf{a}(t)e^{i\lambda t}dt, \quad A_T(\lambda)dt = \int_0^T a(t)e^{i\lambda t}dt,$$

а також виконується властивість $dZ_{\eta^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n(1+i\lambda)^{-n}dZ_\eta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, [13].

Крок 3. Оптимальна оцінка $\widehat{H}_T\xi$ – це проекція елемента $H_T\xi$ простору H на підпростір $H^{0-}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)}) \oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)})$. Ця проекція характеризується наступними двома умовами:

1) $\widehat{H}_T\xi \in H^{0-}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)}) \oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)})$;

2) $(H_T\xi - \widehat{H}_T\xi) \perp H^{0-}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)}) \oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_\tau^{(n)}+\eta_\tau^{(n)})$.

Використовуючи умову 2), отримуємо співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(B_\tau(\lambda)(1-e^{-i\lambda\tau})^n - \frac{(i\lambda)^n h_\tau(\lambda)}{(1+i\lambda)^n}\right)\frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}}p(\lambda) - A(e^{i\lambda})g(\lambda)\right]$$
$$\times e^{-i\lambda t}(1-e^{i\lambda\tau})^n\, d\lambda = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0;T+\tau n],$$

звідки виводимо загальний вигляд спектральної характеристики $h_\tau(\lambda)$:

$$h_\tau(\lambda)=B_T^\tau(\lambda)\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^n(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n} - A_T(\lambda)\frac{(-i\lambda)^n g(\lambda)}{(1-i\lambda)^n p(\lambda)}-\frac{(-i\lambda)^n C_T^\tau(\lambda)}{(1-e^{i\lambda\tau})^n(1-i\lambda)^n p(\lambda)},$$

$$C_T^\tau(\lambda)=\int_0^{T+\tau n}\mathbf{c}_\tau(t)e^{i\lambda t}dt,$$

де $\mathbf{c}_\tau(t)$, $t\in[0;T+\tau n]$, – невідома функція, яку необхідно знайти. З умови 1) випливає співвідношення, яке справедливе для довільного $s\in[0;T+\tau n]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[B_T^\tau(\lambda)-\frac{A_T(\lambda)(1-e^{-i\lambda\tau})^{-n}\lambda^{2n}g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n p(\lambda)}-\frac{|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2n}\lambda^{2n}C_T^\tau(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n p(\lambda)}\right]e^{-i\lambda s}d\lambda=0. \tag{11}$$

Зі співвідношення (11) отримуємо наступне рівняння:

$$[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n}(s)-(\mathbf{T}_T^\tau\mathbf{a}_{\tau,T})(s)=(\mathbf{P}_T^\tau\mathbf{c}_\tau)(s),\quad s\in[0;T+\tau n], \tag{12}$$

де $[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n}(t)=D_T^\tau\mathbf{a}(t)$ при $t\in[0;T]$ та $[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n}(t)=0$ при $t\in(T;T+\tau n]$, $\mathbf{a}(t)=0$ при $t>T$, функція $\mathbf{a}_{\tau,T}(t)$, $t\in[0;T+\tau n]$, обчислюється за формулою [14]

$$\mathbf{a}_{\tau,T}(t)=\sum_{l=\max\{r_\tau'(t,T),0\}}^{\min\{q_\tau(t),n\}}(-1)^l\binom{n}{l}a(t-\tau l),\quad 0\le t\le T+\tau n. \tag{13}$$

Лінійні оператори $\mathbf{T}_T^\tau$, $\mathbf{P}_T^\tau$ в просторі $L_2[0;T+\tau n]$ задаються наступними формулами:

$$(\mathbf{T}_T^\tau\mathbf{x})(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{T+\tau n}\mathbf{x}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t-s)}\lambda^{2n}g(\lambda)}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^n p(\lambda)}d\lambda dt,\ s\in[0;T+\tau n],$$

$$(\mathbf{P}_T^\tau\mathbf{y})(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{T+\tau n}\mathbf{y}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t-s)}\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^n p(\lambda)}d\lambda dt,\ s\in[0;T+\tau n].$$

Тоді невідома функція $\mathbf{c}_\tau(t)$, $t\in[0;T+\tau n]$, обчислюється за формулою

$$\mathbf{c}_\tau(t)=\left((\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n}-(\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}\mathbf{T}_T^\tau\mathbf{a}_{\tau,T}\right)(t).$$

Отже, спектральну характеристику $h_\tau(\lambda)$ оптимальної оцінки $\widehat{H}_T\xi$ функціонала $H_T\xi$ можна обчислити за формулою

$$h_\tau(\lambda)=B_T^\tau(\lambda)\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^n(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}-\frac{A_T(\lambda)(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)} -\frac{(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n C_T^\tau(\lambda)}{(1-e^{i\lambda\tau})^n\left((1+\lambda^2)^n f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)\right)}, \tag{14}$$

$$C_T^\tau(\lambda)=\int_0^{T+\tau n}\left((\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n}-(\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}\mathbf{T}_T^\tau\mathbf{a}_{\tau,T}\right)(t)e^{i\lambda t}dt.$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta\left(f,g;\widehat{A}_T\xi\right)=\Delta\left(f,g;\widehat{H}_T\xi\right)=\mathsf{E}\left|H_T\xi-\widehat{H}_T\xi\right|^2$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f(\lambda)-\lambda^{2n}C_T^{\tau}(\lambda)\right|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^{2n}(f(\lambda)+\frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}g(\lambda))^2}g(\lambda)d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g(\lambda)+(-i\lambda)^n C_T^{\tau}(\lambda)\right|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^{n}(f(\lambda)+\frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}g(\lambda))^2}f(\lambda)d\lambda$$
$$=\left\langle[D_T^{\tau}\mathbf{a}]_{+\tau n}-\mathbf{T}_T^{\tau}\mathbf{a}_{\tau,T},(\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}[D_T^{\tau}\mathbf{a}]_{+\tau n}-(\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}\mathbf{T}_T^{\tau}\mathbf{a}_{\tau,T}\right\rangle+\langle\mathbf{Q}_T\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle,\quad(15)$$

де лінійний оператор $\mathbf{Q}_T$ в просторі $L_2[0;T]$ визначається за формулою

$$(\mathbf{Q}_T\mathbf{z})(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^T\mathbf{z}(t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-s)}\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{p(\lambda)}d\lambda dt,\quad s\in[0;T].$$

Обгрунтуємо існування оберненого оператора $(\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}$. Розглянемо замість рівняння (12) рівняння

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{\tau}(t)=(\mathbf{P}_T^{\tau}\mathbf{c}_{\tau})(t),\quad t\in[0;T+\tau n].\quad(16)$$

Отримаємо задачу побудови проекції елемента

$$B_{T+\tau n}\eta=\int_0^{T+\tau n}\widetilde{\mathbf{b}}_{\tau}(t)\eta^{(n)}(t,\tau)dt$$

простору H на підпростір $H^{0-}(\xi_{\tau}^{(n)}+\eta_{\tau}^{(n)})\oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_{\tau}^{(n)}+\eta_{\tau}^{(n)})$. Оскільки підпростір $H^{0-}(\xi_{\tau}^{(n)}+\eta_{\tau}^{(n)})\oplus H^{(T+\tau n)+}(\xi_{\tau}^{(n)}+\eta_{\tau}^{(n)})$ замкнутий і опуклий, то шукана проекція однозначно визначається для довільної функції $\widetilde{\mathbf{b}}_{\tau}(t)$, яка тотожно не рівна нулю на $[0;T+\tau n]$. Тобто, для довільної функції $\widetilde{\mathbf{b}}_{\tau}(t)$ система (16) має єдиний розв'язок, звідки випливає, що опратор $\mathbf{P}_T^{\tau}$ має обернений $(\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}$.

Сформулюємо отримані результати у вигляді теореми.

Теорема 3.1. *Нехай $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, – випадковий процес, який визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$, а $\eta(t)$, $t\in\mathbb{R}$, – некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес. Припустимо, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ задовольняють умову мінімальності (6). Тоді оптимальна лінійна оцінка $\widehat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$ обчислюється за формулою (10). Спектральна характеристика $h_{\tau}(\lambda)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f,g;\widehat{A}_T\xi)$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюються за формулами (14) та (15) відповідно.*

Зауваження 3.1. Спектральну характеристику $h_{\tau}(\lambda)$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ можна подати у вигляді $h_{\tau}(\lambda)=h_{\tau}^1(\lambda)-h_{\tau}^2(\lambda)$, де

$$h_{\tau}^1(\lambda)=B_T^{\tau}(\lambda)\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^n(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}$$
$$-\frac{(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n\int_0^{T+\tau n}((\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}[D_T^{\tau}\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt}{(1-e^{i\lambda\tau})^n\left((1+\lambda^2)^n f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)\right)},\quad(17)$$

$$h_{\tau}^2(\lambda)=-\frac{A_T(\lambda)(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)}$$
$$-\frac{(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n\int_0^{T+\tau n}((\mathbf{P}_T^{\tau})^{-1}\mathbf{T}_T^{\tau}\mathbf{a}_{\tau,T})(t)e^{i\lambda t}dt}{(1-e^{i\lambda\tau})^n\left((1+\lambda^2)^n f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)\right)}.\quad(18)$$

Функції $h^1_\tau(\lambda)$ та $h^2_\tau(\lambda)$ є спектральними характеристиками оптимальних оцінок $\widehat{B}_T\zeta$ та $\widehat{A}_T\eta$ функціоналів $B_T\zeta$ та $A_T\eta$ відповідно за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$.

Розглянемо задачу інтерполяції лінійного функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями випадкового процесу $\xi(t)$ без шуму при $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$. Лінійна оцінка $\widehat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ зображується у вигляді

$$\widehat{A}_T\xi=\int_{-\infty}^{\infty}h^\xi_\tau(\lambda)dZ_{\xi^{(n)}}(\lambda)-\int_{-\tau n}^{0}v_{\tau,T}(t)\xi(t)dt, \tag{19}$$

де спектральна характеристика оцінки обчислюється за формулою

$$h^\xi_\tau(\lambda)\;=\;B^\tau_T(\lambda)\frac{(1-e^{-i\lambda\tau})^n(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}-\frac{(-i\lambda)^n\int_0^{T+\tau n}((\mathbf{F}^\tau_T)^{-1}[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt}{(1-i\lambda)^n(1-e^{i\lambda\tau})^nf(\lambda)}. \tag{20}$$

Для довільної функції $\mathbf{x}(t)\in L_2[0;T+\tau n]$ лінійний оператор $\mathbf{F}^\tau_T$ визначається співвідношенням

$$(\mathbf{F}^\tau_T\mathbf{x})(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{T+\tau n}\mathbf{x}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t-s)}\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^nf(\lambda)}d\lambda dt,\quad s\in[0;T+\tau n].$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\Delta\left(f;\widehat{A}_T\xi\right)=\Delta\left(f;\widehat{B}_T\xi\right)&=\mathsf{E}\left|B_T\xi-\widehat{B}_T\xi\right|^2\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}\left|\int_0^{T+\tau n}((\mathbf{F}^\tau_T)^{-1}[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt\right|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^nf(\lambda)}d\lambda\\&=\left\langle[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n},(\mathbf{F}^\tau_T)^{-1}[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n}\right\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

Сформулюємо одержані результати у вигляді теореми.

Теорема 3.2. *Нехай $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, – випадковий процес, який визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(t,\tau)$. Припустимо, що спектральна щільність $f(\lambda)$ випадкового процесу $\xi(t)$ задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\gamma(\lambda)|^2\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^nf(\lambda)}d\lambda<\infty. \tag{22}$$

Тоді оптимальна лінійна оцінка $\widehat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t)$ при $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$ обчислюється за формулою (19). Спектральна характеристика $h^\xi_\tau(\lambda)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f;\widehat{A}_T\xi)$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюються за формулами (20) та (21) відповідно.

4. Мінімаксний (робастний) метод інтерполції

Значення середньоквадратичної похибки $\Delta(h_\tau(f,g);f,g):=\Delta(f,g;\widehat{A}_T\xi)$ та спектральна характеристика $h_\tau(f,g):=h_\tau(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень випадкового процесу $\xi(t)$ зі стаціонарними n-ми приростами за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ (або процесу $\xi(t)$) можна обчислити за формулами, отриманими в попередньому розділі, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі. Якщо ж задано лише множину $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$ допустимих спектральних щільностей, то застосовується мінімакний підхід до задачі оцінювання функціонала, тобто визначається оцінка, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для кожної пари спектральних щільностей класу $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$.

Означення 4.1. Для заданого класу спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ називаються найменш сприятливими в класі $\mathcal{D}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 4.2. Для заданого класу спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} L_2^{0-}(p) \oplus L_2^{(T+\tau n)+}(p),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}} \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h^0; f, g).$$

Враховуючи запропоновані означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксної спектральної характеристики, а також теореми 3.1, 3.2, отримаємо такі результати.

Лема 4.1. *Спектральні щільності $f^0 \in \mathcal{D}_f$, $g^0 \in \mathcal{D}_g$, що задовольняють умову мінімальності (6), найменш сприятливі в класі $\mathcal{D}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, якщо оператори $(\mathbf{P}_T^\tau)^0$, $(\mathbf{T}_T^\tau)^0$, $\mathbf{Q}_T^0$, утворені за допомогою коефіцієнтів Фур'є функцій*

$$\frac{\lambda^{2n}|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2n}}{(1+\lambda^2)^n p^0(\lambda)}, \quad \frac{\lambda^{2n} g^0(\lambda)|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2n}}{(1+\lambda^2)^n p^0(\lambda)}, \quad \frac{f^0(\lambda)g^0(\lambda)}{p^0(\lambda)}, \tag{23}$$

$$p^0(\lambda) = f^0(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n} g^0(\lambda),$$

визначають розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Big(\big\langle [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} - \mathbf{T}_T^\tau \mathbf{a}_\tau, (\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}[D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} - (\mathbf{P}_T^\tau)^{-1}\mathbf{T}_T^\tau \mathbf{a}_{\tau,T} \big\rangle + \langle \mathbf{Q}_T \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \Big)$$
$$= \big\langle [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} - (\mathbf{T}_T^\tau)^0 \mathbf{a}_\tau, ((\mathbf{P}_T^\tau)^0)^{-1}[D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} - ((\mathbf{P}_T^\tau)^0)^{-1}(\mathbf{T}_T^\tau)^0 \mathbf{a}_{\tau,T} \big\rangle + \langle \mathbf{Q}_T^0 \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle. \tag{24}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h_\tau(f^0, g^0)$ обчислюється за формулою (14), якщо $h_\tau(f^0, g^0) \in H_{\mathcal{D}}$.

Наслідок 4.1. *Спектральна щільність $f^0 \in \mathcal{D}_f$, що задовольняє умову мінімальності (22), найменш сприятлива серед щільностей класу $\mathcal{D}_f$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, якщо оператор $(\mathbf{F}_T^\tau)^0$, утворений за допомогою перетворення Фур'є функції $\lambda^{2n}|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2n}(1+\lambda^2)^{-n}(f^0(\lambda))^{-1}$, визначає розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\max_{f\in\mathcal{D}_f} \left\langle (\mathbf{F}_T^\tau)^{-1} [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n}, [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} \right\rangle = \left\langle \left((\mathbf{F}_T^\tau)^0\right)^{-1} [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n}, [D_T^\tau \mathbf{a}]_{+\tau n} \right\rangle. \tag{25}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h_\tau^\xi(f^0)$ обчислюється за формулою (20), якщо $h_\tau^\xi(f^0) \in H_{\mathcal{D}}$.

Мінімаксна (робастна) спектральна характеристика h^0, та пара найменш сприятливих спектральних щільностей (f^0, g^0), формують сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f^0, g^0) \geq \Delta(h^0; f^0, g^0) \geq \Delta(h^0; f, g) \quad \forall f \in \mathcal{D}_f, \forall g \in \mathcal{D}_g, \forall h \in H_{\mathcal{D}}$$

виконуються, якщо $h^0 = h_\tau(f^0, g^0)$ та $h_\tau(f^0, g^0) \in H_{\mathcal{D}}$, а пара (f^0, g^0) визначає розв'язок наступної задачі на умовний екстремум:

$$\widetilde{\Delta}(f,g) = -\Delta(h_\tau(f^0,g^0); f,g) \to \inf, \quad (f,g) \in \mathcal{D},$$

де

$$\begin{aligned}\Delta\left(h_\tau(f^0,g^0); f,g\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) - \lambda^{2n}C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^{2n}(f^0(\lambda)+\frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}g^0(\lambda))^2} g(\lambda)d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g^0(\lambda) + (-i\lambda)^n C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n}(1+\lambda^2)^n(f^0(\lambda)+\frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}g^0(\lambda))^2} f(\lambda)d\lambda,\end{aligned}$$

$$C^0_{\tau,T}(e^{i\lambda}) = \int_0^{T+\tau n} \left(\left((\mathbf{P}^\tau_T)^0\right)^{-1}[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n} - \left((\mathbf{P}^\tau_T)^0\right)^{-1}(\mathbf{T}^\tau_T)^0\mathbf{a}_{\tau,T}\right)(t)e^{i\lambda t}dt.$$

Наведена задача на умовний екстремум еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f,g) = \widetilde{\Delta}(f,g) + \delta(f,g|\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g) \to \inf,$$

де $\delta(f,g|\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g)$ – це індикаторна функція множини $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. Розв'язок (f^0, g^0) останньої задачі характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, яка є необхідною і достатньою умовою того, що пара функцій (f^0, g^0) належить множині мінімумів опуклого функціонала $\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)$ [6, 16, 20, 21].

5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $\mathcal{D}^0_{1/f} \times \mathcal{D}^0_{1/g}$

Розгллянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень процесу зі стаціонарними приростами $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$ на множині допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0_{1/f} \times \mathcal{D}^0_{1/g}$, де

$$\mathcal{D}^0_{1/f} = \left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(\lambda)}d\lambda \geq P_1\right.\right\}, \quad \mathcal{D}^0_{1/g} = \left\{g(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{g(\lambda)}d\lambda \geq P_2\right.\right\}. \quad (26)$$

Припустимо, що спектральні щільності $f^0 \in \mathcal{D}^0_{1/f}$, $g^0 \in \mathcal{D}^0_{1/g}$ та функції

$$h_{\tau,f}(f^0,g^0) = \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g^0(\lambda) + (-i\lambda)^n C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|}{|1-e^{i\lambda\tau}|^n(1+\lambda^2)^{-n/2}((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))}, \quad (27)$$

$$h_{\tau,g}(f^0,g^0) = \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) - \lambda^{2n}C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|}{|1-e^{i\lambda\tau}|^n((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))} \quad (28)$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta(h_\tau(f^0,g^0); f,g)$ є неперервним і обмеженим в просторі $L_1 \times L_1$. З умови $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ отримуємо наступні співвідношення, що визначають спектральні щільності $f^0 \in \mathcal{D}^0_{1/f}$, $g^0 \in \mathcal{D}^0_{1/g}$:

$$\begin{aligned}g^0(\lambda)\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) - \lambda^{2n}C^0_{\tau,T}(\lambda)\right| \\ = \alpha_2|1-e^{i\lambda\tau}|^n\left((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda)\right), \quad (29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^0(\lambda)\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g^0(\lambda) + (-i\lambda)^n C^0_{\tau,T}(\lambda)\right| \\ = \alpha_1|1-e^{i\lambda\tau}|^n(1+\lambda^2)^{-n/2}\left((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda)\right), \quad (30)\end{aligned}$$

де константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$; $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\int_{-\infty}^{\infty} f^0(\lambda)d\lambda = 2\pi P_1$, $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\int_{-\infty}^{\infty} g^0(\lambda)d\lambda = 2\pi P_2$.

Отримані результати дозволяють сформулювати наступні теореми.

Теорема 5.1. *Припустимо, що спектральні щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}^0_{1/f}$ та $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}^0_{1/g}$ задовольняють умову (6), а функції $h_{\tau,f}(f^0, g^0)$ та $h_{\tau,g}(f^0, g^0)$, що обчислені за формулами (27),(28), обмежені. Спектральні щільності $f^0(\lambda)$ та $g^0(\lambda)$, визначені з рівнянь (29), (30), є найменш сприятливими серед щільностей класу $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0_{1/f} \times \mathcal{D}^0_{1/g}$ для лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (24). Функція $h_\tau(f^0, g^0)$, визначена співвідношенням (14), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.*

У тому випадку, коли одна із щільностей відома, матимемо такі твердження.

Теорема 5.2. *Припустимо, що спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, спектральна щільність $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}^0_{1/g}$, і вони задовольняють умову (6). Припустимо також, що функція $h_{\tau,g}(f, g^0)$, що обчислена за формулою (28), обмежена. Тоді спектральна щільність*

$$g^0(\lambda) = f(\lambda)\left[f_1(\lambda) - \frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n}\right]_+^{-1},$$

$$f_1(\lambda) = \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f(\lambda) - \lambda^{2n} C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|}{\alpha_2|1-e^{i\lambda\tau}|^n(1+\lambda^2)^n}, \tag{31}$$

є найменш сприятливою в класі $\mathcal{D}^0_{1/g}$ для лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо функції $f(\lambda) + (1+\lambda^2)^{-n}\lambda^{2n}g^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ визначають розв'язок екстремальної задачі (24). Функція $h_\tau(f, g^0)$, визначена співвідношенням (14), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.

Теорема 5.3. *Припустимо, що спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, спектральна щільність $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}^0_{1/f}$, і вони задовольняють умову (6). Припустимо також, що функція $h_{\tau,f}(f^0, g)$, що обчислена за формулою (27), обмежена. Тоді спектральна щільність*

$$f^0(\lambda) = \frac{\lambda^{2n} g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n[g_2(\lambda) - 1]_+},$$

$$g_2(\lambda) = \frac{\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g(\lambda) + (-i\lambda)^n C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|}{\alpha_1|1-e^{i\lambda\tau}|^n(1+\lambda^2)^{n/2}}, \tag{32}$$

є найменш сприятливою в класі $\mathcal{D}^0_{1/f}$ для лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо функція $f^0(\lambda) + (1+\lambda^2)^{-n}\lambda^{2n}g(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (24). Функція $h_\tau(f^0, g)$, визначена співвідношенням (14), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.

Як наслідок отриманих результатів отримаємо співвідношення, що визначають найменш сприятливу щільність в класі $\mathcal{D}^0_{1/f}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t)$ без шуму в точках $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$. Припустимо, що спектральна щільність $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}^0_{1/f}$, а функція

$$h_f(f^0) = \frac{\lambda^n\left|C^0_{\tau,T}(\lambda)\right|}{|1-e^{i\lambda\tau}|^n|1+i\lambda|^n f^0(\lambda)} \tag{33}$$

обмежена. Тоді найменш сприятлива спектральна щільність задовольняє співвідношення

$$\left|\int_0^{T+\tau n}(((\mathbf{F}^\tau_T)^0)^{-1}[D^\tau_T\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt\right| = \beta|\lambda|^{-n}|1-e^{i\lambda\tau}|^n|1+i\lambda|^n, \tag{34}$$

де константа $\beta \geq 0$ і $\beta \neq 0$, якщо $\int_{-\infty}^{\infty} f^0(\lambda)d\lambda = 2\pi P$. Наведені міркування дозволяють сформулювати наступний наслідок.

Наслідок 5.1. *Нехай спектральна щільність $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_{1/f}$ задовольняє умову мінімальності (22), функція $h_f(f^0)$, що обчислена за формулою (33), обмежена. Тоді спектральна щільність $f^0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_{1/f}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за даними спостережень випадкового процесу $\xi(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, якщо лінійний оператор $(\mathbf{F}_T^{\tau})^0$, утворений за допомогою перетворення Фур'є функції $\lambda^{2n}|1-e^{i\lambda\tau}|^{-2n}(1+\lambda^2)^{-n}(f^0(\lambda))^{-1}$, задовольняє співвідношення (34) та визначає розв'язок екстремальної задачі (25). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h_\tau^\xi(f^0)$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюється за формулою (20).*

6. Найменш сприятливі щільності в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксної інтерполяції лінійного функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями випадкового процесу $\xi(t)+\eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ на множині допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$, де

$$\mathcal{D}_v^u = \left\{ f(\lambda) \middle| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda = P_1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \middle| g(\lambda) = (1-\varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)d\lambda = P_2 \right\}.$$

Спектральні щільності $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі, а спектральні щільності $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ обмежені.

Використовуючи умову $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ отримуємо наступні співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності $f^0 \in \mathcal{D}_v^u$, $g^0 \in \mathcal{D}_\varepsilon$:

$$\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) - \lambda^{2n}C^0_{\tau,T}(\lambda)\right| \\ = |1-e^{i\lambda\tau}|^n\left((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n}g^0(\lambda)\right)(\beta(\lambda)+\alpha_2), \quad (35)$$

$$\left|A_T(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g^0(\lambda) + (-i\lambda)^n C^0_{\tau,T}(\lambda)\right| \\ = |1-e^{i\lambda\tau}|^n(1+\lambda^2)^{-n/2}\left((1+\lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n}g^0(\lambda)\right)(\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda)+\alpha_1), \quad (36)$$

де функції $\gamma_1(\lambda) \leq 0$ та $\gamma_1(\lambda) = 0$, якщо $f^0(\lambda) \geq v(\lambda)$; функція $\gamma_2(\lambda) \geq 0$ та $\gamma_2(\lambda) = 0$, якщо $f^0(\lambda) \leq u(\lambda)$; функція $\beta(\lambda) \leq 0$ та $\beta(\lambda) = 0$, якщо $g^0(\lambda) \geq (1-\varepsilon)g_1(\lambda)$.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 6.1. *Нехай спектральні щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_v^u$ та $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_\varepsilon$ задовольняють умову (6), а функції $h_{\tau,f}(f^0, g^0)$ та $h_{\tau,g}(f^0, g^0)$, що обчислені за формулами (27),(28), обмежені. Тоді спектральні щільності $f^0(\lambda)$ and $g^0(\lambda)$, визначені за допомогою співвідношень (35) та (36), є найменш сприятливими спектральнми щільностями в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо вони задають розв'язок оптимізаційної задачі (24). Фунція $h_\tau(f^0, g^0)$, обчислена за формулою (14), є мінімаксною (робастною) спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.*

Теорема 6.2. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, спектральна щільність $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_\varepsilon$ та задовольняє умову мінімальності (6). Припустимо також, що функція $h_{\tau,g}(f, g^0)$, що обчислена за формулою (28), обмежена. Тоді спектральна щільність*

$$g^0(\lambda) = \max\left\{(1-\varepsilon)g_2(\lambda), f_1(\lambda) - (1+\lambda^2)^n\lambda^{-2n}f(\lambda)\right\},$$

де функція $f_1(\lambda)$ визначається за формулою (31), є найменш сприятливою в класі $\mathcal{D}_\varepsilon$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо функції $f(\lambda)+(1+\lambda^2)^{-n}\lambda^{2n}g^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ задають розв'язок оптимізаційної задачі (24). Функція $h_\tau(f,g^0)$, обчислена за формулою (14), є мінімаксною (робастною) спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.

Теорема 6.3. *Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_v^u$ та задовольняє умову мінімальності (6). Нехай також функція $h_{\tau,f}(f^0,g)$, що обчислена за формулою (27), обмежена. Тоді спектральна щільність*

$$f^0(\lambda)=\min\left\{u(\lambda),\max\left\{v(\lambda),g_2(\lambda)-(1+\lambda^2)^{-n}\lambda^{2n}g(\lambda)\right\}\right\},$$

де функція $g_2(\lambda)$ обчислюється за формулою (32), є найменш сприятливою серед щільностей класу $\mathcal{D}_v^u$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_T\xi$, якщо функція $f^0(\lambda)+(1+\lambda^2)^{-n}\lambda^{2n}g(\lambda)$ задає розв'язок оптимізаційної задачі (24). Функція $h_\tau(f^0,g)$, обчислена за формулою (14), є мінімаксною (робастною) спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$.

Розглянемо задачу мінімаксної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за спостереженнями процесу $\xi(t)$ без шуму в точках $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$ в класі $\mathcal{D}_v^u$ допустимих спектральних щільностей. Найменш сприятлива спектральна щільність $f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_v^u$ задовольняє наступне співвідношення:

$$\left|\int_0^{T+\tau n}(((\mathbf{F}_T^\tau)^0)^{-1}[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt\right|=\frac{f^0(\lambda)(\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda)+\beta)}{|\lambda|^n|1-e^{i\lambda\tau}|^{-n}|1+i\lambda|^{-n}},\tag{37}$$

де $\gamma_1(\lambda)\leq 0$ і $\gamma_1(\lambda)=0$, якщо $f^0(\lambda)\geq v(\lambda)$; $\gamma_2(\lambda)\geq 0$ і $\gamma_2(\lambda)=0$, якщо $f^0(\lambda)\leq u(\lambda)$. Отримані результати можна сформулювати у вигляді наступного наслідку.

Наслідок 6.1. *Нехай спектральна щільність $f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_v^u$ задовольняє умову мінімальності (22), функція $h_f(f^0)$, що обчислена за формулою (33), обмежена. Тоді спектральна щільність $f^0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_v^u$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_T\xi$ за даними спостережень випадкового процесу $\xi(t)$ при $t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]$, якщо*

$$f^0(\lambda)=\max\left\{v(\lambda),\min\left\{u(\lambda),\frac{|\lambda|^n\left|\int_0^{T+\tau n}(((\mathbf{F}_T^\tau)^0)^{-1}[D_T^\tau\mathbf{a}]_{+\tau n})(t)e^{i\lambda t}dt\right|}{\beta|1-e^{i\lambda\tau}|^n|1+i\lambda|^n}\right\}\right\}$$

і $f^0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (25). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h_\tau^\xi(f^0)$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_T\xi$ обчислюється за формулою (20).

7. Висновки

В статті досліджено задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A_T\xi=\int_0^T a(t)\xi(t)dt$, який залежить від невідомих значень випадкового процесу $\xi(t)$ зі стаціонарними приростами n-го порядку, за спостереженнями випадкового процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\setminus[0,T]$ у випадку стаціонарного шуму $\eta(t)$, некорельованого з процесом $\xi(t)$. Застосовано класичний та мінімаксний (робастний) методи оцінювання для випадків спектральної визначеності та спектральної невизначеності. Зокрема, знайдено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки. У тому випадку, коли точний вигляд спектральних щільностей невідомий, проте задано класи допустимих спектральних щільностей, виведено співвідношення, що визначать найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

Література

1. W. Bell, *Signal extraction for nonstationary time series*, The Annals of Statistics **12(2)** (1984), 646–664.
2. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *The Theory of Stochastic Processes. I*, Springer, Berlin, 2004.
3. І. І. Голіченко, М. П. Моклячук, *Оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних процесів*, "Інтерсервіс", Київ, 2014.
4. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
5. I. Dubovets'ka and M. Moklyachuk, *On minimax estimation problems for periodically correlated stochastic processes*, Contemporary Mathematics and Statistics **2(1)** (2014), 123–150.
6. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **68** (1985), 337–364.
7. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, "Наука", Москва, 1974.
8. K. Karhunen, *Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, (1947), no. 37.
9. S. A. Kassam and H. V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proceedings of the IEEE **73(3)** (1985), 433–481.
10. A. N. Kolmogorov, *Selected works by A. N. Kolmogorov*, vol. II, Probability theory and mathematical statistics (A. N. Shiryayev, ed.), Mathematics and Its Applications. Soviet Series **26** (1992), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
11. M. Luz and M. Moklyachuk, *Robust Extrapolation Problem for Stochastic Processes with Stationary Increments*, Mathematics and Statistics **2(2)** (2014), 78–88.
12. M. Luz and M. Moklyachuk, *Minimax Interpolation problem for random processes with stationary increments*, Stat. Optim. Inf. Comput. **3(1)** (2015), 30–41.
13. M. Luz and M. Moklyachuk, *Filtering problem for random processes with stationary increments*, Contemporary Mathematics and Statistics **3(1)** (2015), 8–27.
14. M. Luz and M. Moklyachuk, *Minimax prediction of random processes with stationary increments from observations with stationary noise*, Cogent Mathematics **3(1):1133219** (2016), 1–17.
15. M. Luz and M. Moklyachuk, *Minimax interpolation of sequences with stationary increments and cointegrated sequences*, Modern Stochastics: Theory and Applications **3(1)** (2016), 59–78.
16. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
17. M. Moklyachuk, *Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences*, Stat. Optim. Inf. Comput. **3(4)** (2015), 348–419.
18. M. P. Moklyachuk and A. Yu. Masyutka, *Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
19. М. С. Пинскер, *Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями*, ИАН СССР **19(3)** (1955), 319–344.
20. Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, "Наука", Москва, 1982.
21. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.
22. Y. A. Rozanov, *Stationary Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco, 1967.
23. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications*, The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1966.
24. А. М. Яглом, *Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями*, Математический сборик **37(79)** (1955), №1, 141–196.
25. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions*, vol. 1, Basic results, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
26. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions*, vol. 2, Suplementary notes and references, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: maksim_luz@ukr.net

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Надійшла 12/04/2016