Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 130–142

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 130–142

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ

УДК 519.21

С. Я. МАХНО

Аннотация. Приведены достаточные условия слабой сходимости решений стохастических уравнений в пространстве с барьерами. Число барьеров неограниченно растет и в пределе они заполняют некоторый отрезок. Выписано уравнение для предельного процесса.

Анотація. Наведено достатні умови слабкої збіжності розв'язків стохастичних рівнянь у просторах з бар'єрами. Число бар'єрів необмежено зростає і вони заповнюють деякий відрізок. Виписано рівняння для граничного процесу.

Abstract. The sufficient conditions of weak convergence of solutions of stochastic equations in a space with barriers are obtained. The number of barriers grows to infinity and in a limit they fill some segment. The equation for the limit process is given.

1. Вступление.

В работе рассмаириваются одномерные диффузионные процессы в пространстве с барьерами (мембранами по терминологии [4]). Т.е. в некоторых точках фазового пространства располагаются барьеры, влияющие на движение процесса, пропуская или отталкивая его с определенными вероятностьями. Аналитическое описание таких процессов проводится в работах Н.И. Портенко, например в книге [4]. В статье указанные процессы описываются решениями стохастических уравнений, содержащих локальные времена процесса в n точках с соответствующими коэффициентами. Эти точки располагаются внутри заданного отрезка $[A, B]$. Будем называть такую область композитной. Изучается поведение процесса при $n \to \infty$. Рассматривается случай когда барьеры в пределе заполняют весь отрезок $[A, B]$. При этом оказывается, что у предельного процесса барьеры могут отсутствовать, постоянные коэффициенты у допредельных процессов изменяться на переменные у предельного процесса.

Автор благодарит рецензента, замечания которого помогли не только исправить ошибки в первоначальном варианте статьи, но и изменили всю ее концепцию.

Работа построена по следующему плану. В параграфе 2 вводятся обозначения, предположения и формулируется основной результат статьи. Доказательства проводятся в параграфе три. Параграф четыре содержит примеры, пятый параграф – выводы.

2. Обозначения. Предположения. Основной результат.

Через $\mathbb{C}[0, T]$, обозначим множество непрерывных функций $f(t)$, $t \in [0, T]$, с равномерной метрикой, $\mathbb{F}$ - борелевская σ-алгебра подмножеств данного множества, $\mathbb{F}_t = \sigma\{f \in \mathbb{C}[0, T] : f(s), s \leq t\}$ - наименьшая σ- алгебра, порожденная указанным множеством непрерывных функций. Будем говорить, что непрерывные случайные

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J60, 60J55, 60J65.

Ключевые слова и фразы. Стохастическое уравнение, локальное время процесса, предельная теорема, слабая сходимость.

Работа выполнена при поддержке гранта НАНУ-РФФИ №09-01-14.

процессы ζ_n слабо сходятся к непрерывному случайному процессу ζ, если при $n \to \infty$ слабо сходятся меры, порожденные этими процессами на пространстве $(\mathbb{C}[0,T],\mathbb{F})$. Будем обозначать эту сходимость символом $\Longrightarrow$: $\zeta_n \Longrightarrow \zeta$. Обозначим $I_G(x)$ индикатор множества G. Через $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$ обозначим полную вариацию функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $[[a]]$ – целая часть числа a.

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{F}_t,\mathbf{P})$, $t\geq 0$, определен непрерывный семимартингал $X(t)=x+B(t)+X^c(t)$, где $X^c(t)$ - непрерывный локальный мартингал, $B(t)$ - процесс локально ограниченной вариации, $B(0)=X^c(0)=0$. Через $L^X(t,\alpha)$ обозначим симметричное локальное время прцесса X в точке (t,α):

$$L^X(t,\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)}(X(s))d\langle X^c\rangle_s.$$

Здесь $\langle X^c\rangle_s$ - характеристика локального мартингала. При сделанных в статье предположениях существуют непрерывные по аргументам (t,a) модефикации вводимых локальных времен [3, лемма II.5.1]. Такие модефикации и будем рассматривать в дальнейшем. Математическое ожидание обозначим символом $\mathbf{E}$.

Симметричная производная функции $f(x)$ определяется равенством

$$Df(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Для функции $f(x)$ определим заряд $n_f(dx)$ из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g''(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)n_f(dx),$$

если оно верно для любой бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$ с компактным носителем. Через $\delta_a(x)$ обозначим δ-функцию, сосредоточенную в точке a, т.е. для непрерывной в точке a функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_a(x)dx=f(a).$$

Пусть при, каждом $n\geq 1$ заданы последовательности $a_n(i)$, $\beta_n(i)$, $i=1,2,...,n$, и функции $b_n(x)$, $\sigma_n(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi_n(t)=x+\sum_{i=1}^n\beta_n(i)L^{\xi_n}(t,a_n(i))+\int_0^t b_n(\xi_n(s))ds+\int_0^t\sigma_n(\xi_n(s))dw_n(s),\ t\in[0,T]. \quad (1)$$

В уравнении (1) при каждом n, $w_n(t)$ - одномерный стандартный винеровский процесс, $L^{\xi_n}(t,a)$ – локальное время процесса ξ_n, определяемое, как сказано выше, равенством

$$L^{\xi_n}(t,a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{[a-\varepsilon,a+\varepsilon]}(\xi_n(s))\sigma_n^2(\xi_n(s))ds. \quad (2)$$

Уравнение (1) есть частный случай уравнения с зарядом $\nu_n(dx)$ и коэффициентом диффузии $\sigma_n(x)$ из параграфа 3 работы [2]. В [2, Theorem 3.1] в терминах этого заряда и коэффициента диффузии получены достаточные условия для сходимости процессов в среднем равномерно по времени

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}|\xi_n(t)-\xi(t)|=0.$$

При предположениях о расположении барьеров и поведении коэффициентов при локальных временах уравнения (1) ниже получены условия для сходимости процессов ξ_n к процессу ξ в смысле распределений. Дано качественное описание предельного процесса, не вытекающее непосредственно из результатов работы [2]. Так, указывается в каких точках возможно наличин барьеров и получены формулы для коэффициентов при них, выписываются коэффициенты сноса и диффузии.

Введем условия для коэффициентов уравнения (1).

Условие (I):

I_1. Существует постоянная $\Lambda \geq 1$ такая, что
$|b_n(x)| + \sigma_n^2(x) \leq \Lambda,\ \sigma_n^2(x) \geq \Lambda^{-1}$.

I_2. Числа $|\beta_n(i)| < 1,\ i = 1, 2, ..., n$.

I_3. Существуют ограниченные функции $b(x),\ \sigma(x),\ \sigma^2(x) \geq \Lambda^{-1}$ такие, что для любого $x \in (-\infty, \infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x b_n(y)dy = \int_0^x b(y)dy, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^x |\sigma_n^2(y) - \sigma^2(y)|dy = 0.$$

В [3, теорема II.5.4] доказывается, что при условиях I_1, I_2 при каждом n уравнение (1) имеет единственное слабое решение. Т.е. на стохастическом базисе $(\Omega = \mathbb{C}[0,T], \mathbb{F}, \mathbb{F}_t, \mathbf{P})$, $t \in [0,T]$, существуют одномерный винеровский процесс $(w_n(t), \mathbb{F}_t)$ и случайный процесс $(\xi_n(t), \mathbb{F}_t)$ такие, что равенства (2) и (1) выполняются с вероятностью 1. Кроме того, если $\mu_n^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$ - меры, порожденные двумя решениями уравнения (1) на пространстве $(\mathbb{C}[0,T], \mathbb{F})$, то они совпадают.

Определим величины

$$\theta_n(1) = 1 - \beta_n(1),$$
$$\theta_n(i) = \theta_n(1) \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 + \beta_n(j)}{1 - \beta_n(j)}, \quad i = 2, 3, ..., n+1,$$
$$c_n(1) = 0, \quad c_n(k) = c_n(k-1) + \frac{a_n(k) - a_n(k-1)}{\theta_n(k)}, \quad k = 2, 3, ..., n.$$

Не нарушая общности будем предполагать, что последовательность $\{a_n(i)\}$ при каждом n упорядачена так (перенормировуя ее, если нужно), что $a_n(i) < a_n(i+1)$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Тогда $c_n(k) < c_n(k+1)$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Введем условие (II) для точек $\{a_n\}$ и для коэффициентов при локальных временах $\{\beta_n\}$.

Условие (II):

II_1. Для последовательности $\{a_n(i)\} \in [A, B]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq i\leq n-1} \Big(a_n(i+1) - a_n(i) \Big) = 0$,
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(n) = B$.

II_2. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(1) = \beta$, $|\beta| < 1$.

II_3. Существует $\Theta \geq 1$ такое, что $\dfrac{1}{\Theta} \leq \theta_n(i) \leq \Theta$ для любого n и любого $i = 1, 2, ..., n+1$.

II_4. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{j=2}^{n} \dfrac{1 + \beta_n(j)}{1 - \beta_n(j)} = d$.

II_5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{a_n(j) - a_n(j-1)}{\theta_n(j)} = c > 0$.

Определим функцию $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x) = \Big[\theta_n(1)x + a_n(1)\Big] I_{(-\infty,0]}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\theta_n(j+1)\Big(x - c_n(j)\Big) + a_n(j)\Big] I_{[c_n(j),c_n(j+1)]}(x) + \\ + \Big[\theta_n(n+1)\Big(x - c_n(n)\Big) + a_n(n)\Big] I_{[c_n(n),\infty)}(x).$$

Функция $\psi_n(x)$ представляет собой непрерывную монотонно возрастающую ломаную с узлами в точках $(c_n(j), a_n(j))$, $j = 1, 2, ..., n$. Обратную функцию к функции $\psi_n(x)$ обозначим $\varphi_n(y)$. Из определения следует, что

$$\varphi_n(y) = \frac{y - a_n(1)}{\theta_n(1)} I_{(-\infty,a_n(1)]}(y) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y - a_n(j)}{\theta_n(j+1)} + c_n(j)\right) I_{[a_n(j),a_n(j+1)]}(y) + \\ + \left(\frac{y - a_n(n)}{\theta_n(n+1)} + c_n(n)\right) I_{([a_n(n),\infty)}(y).$$

Отметим, что

$$D\psi_n(x) = \begin{cases} \theta_n(1), & \text{если } x < 0, \\ \theta_n(j+1), & \text{если } x \in (c_n(j), c_n(j+1)),\ j = 1, 2, ..., n-1 \\ \theta_n(n+1), & \text{если } x > c_n(n), \\ \dfrac{\theta_n(j) + \theta_n(j+1)}{2}, & \text{если } x = c_n(j),\ j = 1, 2, ..., n; \end{cases} \tag{3}$$

$$D\varphi_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_n(1)}, & \text{если } y < a_n(1), \\ \dfrac{1}{\theta_n(j+1)}, & \text{если } y \in (a_n(j), a_n(j+1)), \\ & j = 1, 2, ..., n-1, \\ \dfrac{1}{\theta_n(n+1)}, & \text{если } y > a_n(n), \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\theta_n(j)} + \dfrac{1}{\theta_n(j+1)}\right), & \text{если } y = a_n(j),\ j = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{4}$$

В условии (III) вводятся дополнительные предположения об определенных выше функциях $\psi_n(x)$ и $D\varphi_n(x)$.

Условие (III):

III_1. Существует возрастающая функция $\rho(x)$ такая, что на отрезке $[0, c]$ ее вторая производная ограничена, $\rho(0) = A$, $\rho(c) = B$ и для $x \in [0, c]$ $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \rho(x)$.

III_2 Существует функция $\Phi(z) : \Theta^{-1} \le \Phi(z) \le \Theta$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n(1)}^{y} \frac{1}{D\varphi_n(z)} dz = \int_A^y \Phi(z) dz \quad \text{для любого } y \in (-\infty, \infty).$$

Из условий (II) и III_1 следует существование предела функции $\psi_n(x)$ для $x \in (-\infty, \infty)$ и вид предельной функции

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) = \begin{cases} (1-\beta)x + A, & \text{если } x \le 0, \\ \rho(x), & \text{если } x \in [0, c], \\ (1+\beta)d(x-c) + B, & \text{если } x \ge c. \end{cases}$$

Обозначим через $\varphi(x)$ функцию, обратную к функции $\psi(x)$. Тогда

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x-A}{1-\beta}, & \text{если } x \le A, \\ \kappa(x), & \text{если } x \in [A, B], \\ \dfrac{x-B}{(1+\beta)d} + c, & \text{если } x \ge B, \end{cases} \tag{5}$$

где $\kappa(x)$, $x \in [A, B]$ – обратная функция к функции $\rho(x)$, $x \in [0, c]$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия (I), (II), (III). Тогда* $\xi_n \Longrightarrow \xi$, *где*

$$\xi(t) = x + \gamma_1 L^\xi(t, A) + \gamma_2 L^\xi(t, B) + \int_0^t \Big[v(\xi(s)) - \\ - \frac{1}{2} I_{[A,B]}(\xi(s)) \frac{\varphi''(\xi(s))}{\varphi'(\xi(s))} m^2(\xi(s)) \Big] ds + \int_0^t m(\xi(s)) dw(s) \tag{6}$$

и

$$\gamma_1 = \frac{\psi'(0+) - \psi'(0-)}{\psi'(0+) + \psi'(0-)}, \quad \gamma_2 = \frac{\psi'(c+) - \psi'(c-)}{\psi'(c+) + \psi'(c-)}, \\ v(x) = \frac{b(x)}{\Phi(x) D\varphi(x)}, \qquad m^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{\Phi(x) D\varphi(x)}, \quad m(x) > 0. \tag{7}$$

Замечание. Как видно из формул (6), (7), коэффициенты сноса и диффузии предельного процесса, вообще говоря, не совпадают с предельными функциями из условия I_3. Примеры параграфа 4 показывают влияние барьеров на коэффициенты предельного процесса. Так, в примере 2 у допредельных процессов отсутствуют коэффициенты сноса, а у предельного процесса он увеличивается в зоне композитности, а в примере 3 коэффициент диффузии уменьшается в зоне композитности по сравнению с коэффициентами диффузий допредельных процессов. Достаточное условие равенства коэффициента диффузии предельного процесса функции из условия I_3 приведено в лемме 3.

3. Доказательства.

Доказательству теоремы предпошлем доказательство вспомогательного утверждения. Пусть для $y \in [R, Q]$ заданы, равномерно ограниченные постоянной K, функции $g_n(y)$, $g(y)$, $f_n(y)$, $f(y)$. Будем считать выполненными следующие условия

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in[R,Q]} |g_n(y) - g(y)| = 0. \tag{8}$$

Для любого $y \in [R, Q]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_R^y \Big(f_n(z) - f(z) \Big) dz = 0. \tag{9}$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (8), (9). Тогда для любого $y \in [R, Q]$ и любой последовательности $\{y_n\} \subset [R, Q]$ такой, что $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \int_R^{y_n} f_n(z) g_n(z) dz = \int_R^y f(z) g(z) dz.$$

Доказательство.

Положим $F_n(y) = \int_R^y f_n(z)g_n(z)dz$, $F(y) = \int_R^z f(z)g(z)dz$. Для фиксированного y

$$F_n(y) - F(y) = \int_R^y f_n(z)\Big(g_n(z) - g(z)\Big)dz + \int_R^y \Big(f_n(z) - f(z)\Big)g(z)dz. \tag{10}$$

Сходимость к нулю первого интеграла в правой части равенства (10) следует из (8) и равномерной ограниченности последовательности функций $\{f_n\}$. Условие (9) означает слабую сходимость последовательности $\{f_n - f\}$ к нулю в банаховом пространстве суммируемых по мере Лебега $\mathbb{L}(A)$ на $[R, Q]$ функций $L^1([R, Q], \mathbb{L})$. Отсюда следует [1, теорема V.1.4], что предел второго слагаемого в (10) равен нулю для любой измеримой ограниченной функции $g(z)$, $z \in [R, Q]$. Т.о. для любого фиксированного $y \in [R, Q]$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y). \tag{11}$$

Заметим теперь, что при сделанных предположениях функции $F_n(y)$ удовлетворяют равномерному по n условию Липшица

$$|F_n(y_2) - F_n(y_1)| \le K^2|y_2 - y_1|.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(y_n) - F_n(y)| \le K^2 \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

Отсюда и (11) следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Так как все числа $\psi'(0+)$, $\psi'(0-)$, $\psi'(c+)$, $\psi'(c-)$ положительны, то коэффициенты при локальных временах в уравнении (6) по модулю строго меньше единицы. Подинтегральные функции этого уравнения ограничены. Поэтому уравнение (6) имеет единственное слабое решение [3, теорема II.5.4].

Определим процесс $\eta_n(t)$ как решение стохастического уравнения

$$\eta_n(t) = \varphi_n(x) + \int_0^t \tilde{b}_n(\eta_n(s))ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_n(\eta_n(s))dw(s). \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{b}_n(x) = \frac{b_n(\psi_n(x))}{D\psi_n(x)}, \quad \tilde{\sigma}_n(x) = \frac{\sigma_n(\psi_n(x))}{D\psi_n(x)}.$$

В [3, лемма II.5.1] доказано, что процесс $\xi_n(t) = \psi_n(\eta_n(t))$. Установим слабую сходимость процессов $\eta_n(t)$ из (12) к процессу

$$\eta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \frac{v(\psi(\eta(s)))}{D\psi(\eta(s))}ds + \int_0^t \frac{m(\psi(\eta(s))}{D\psi(\eta(s))}dw(s). \tag{13}$$

Т.к. функции $\psi_n(x)$ монотонны, а предельная функция $\psi(x)$ непрерывна, то сходимость функций $\psi_n(x)$ к функции $\psi(x)$ является равномерной на компактах. Т.е. для любых $x_1 \le x_2$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[x_1,x_2]} |\psi_n(x) - \psi(x)| = 0. \tag{14}$$

Функция $\psi(x)$ возрастает и производная $\psi'(x)$ существует почти всюду. Непосредственно проверяется, что для любого x выполняются равенства

$$\int_0^x D\psi_n(y)dy = \psi_n(x) - a_n(1), \quad \int_0^x D\psi(y)dy = \psi(x) - A.$$

Следовательно, для любого $x \in [x_1, x_2]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \Big(D\psi_n(y) - D\psi(y)\Big)dy = 0. \tag{15}$$

Из (14) вытекает равномерноя сходимость и обратных функций, т.е. для любых $x_1 \le x_2$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0. \tag{16}$$

Из сделанных предположений следует, что коэффициенты в уравнении (12) удовлетворяют условиям

$$\tilde{b}_n^2(x) + \tilde{\sigma}_n^2(x) \le C_1,\ \tilde{\sigma}_n^2(x) \ge C_2,$$

с некоторыми постоянными $C_i > 0$, независящими от n. Чтобы доказать сходимость $\eta_n \Longrightarrow \eta$ согласно [3, теорема V.1.2] необходимо установить следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{\tilde{b}_n(y)}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \int_0^x \frac{v(\psi(y))}{m^2(\psi(y))} D\psi(y)dy, \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \int_0^x \frac{(D\psi(y))^2}{m^2(\psi(y))} dy. \tag{18}$$

Используем формулу замены переменной для кусочно дифференцируемой функции $\chi(x)$

$$\int_h^H f(\chi(x))D\chi(x)dx = \int_{\chi(h)}^{\chi(H)} f(x)dx. \tag{19}$$

Из (19), (14), I_3 и леммы 1 получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{\tilde{b}_n(y)}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\psi_n(0)}^{\psi_n(x)} \frac{b_n(y)}{\sigma_n^2(y)} dy = \int_{\psi(0)}^{\psi(x)} \frac{b(y)}{o^2(y)} dy =$$
$$= \int_0^x \frac{b(\psi(y))}{\sigma^2(\psi(y))} D\psi(y)dy = \int_0^x \frac{v(\psi(y))}{m^2(\psi(y))} D\psi(y)dy.$$

Равенство (17) установлено. Проверим (18). Пусть $x \in [c_n(k), c_n(k+1)]$. Тогда в силу (19)

$$\int_0^x \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \int_0^x \frac{(D\psi_n(y))^2}{\sigma_n^2(\psi_n(y))} dy = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{c_n(j)}^{c_n(j+1)} \theta_n(j+1) \frac{D\psi_n(y)}{\sigma_n^2(\psi_n(y))} dy +$$
$$+ \int_{c_n(k)}^x \theta_n(k+1) \frac{D\psi_n(y)}{\sigma_n^2(\psi_n(y))} dy = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\psi_n(c_n(j))}^{\psi_n(c_n(j+1))} \frac{1}{\sigma_n^2(y) D\varphi_n(y)} dy +$$
$$+ \int_{\psi_n(c_n(k))}^{\psi_n(x)} \frac{1}{\sigma_n^2(y) D\varphi_n(y)} dy = \int_{\psi_n(0)}^{\psi_n(x)} \frac{1}{\sigma_n^2(y) D\varphi_n(y)} dy.$$

Таким образом, для любого $x \in (-\infty, \infty)$

$$\int_0^x \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \int_{\psi_n(0)}^{\psi_n(x)} \frac{1}{\sigma_n^2(y) D\varphi_n(y)} dy. \tag{20}$$

Воспользуемся леммой 1, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2(y)} dy = \int_{\psi(0)}^{\psi(x)} \frac{\Phi(y)}{\sigma^2(y)} dy = \int_0^x \frac{\Phi(\psi(y))D\psi(y)}{\sigma^2(\psi(y))} dy = \int_0^x \frac{(D\psi(y))^2}{m^2(\psi(y))} dy.$$

Равенство (18) установлено.

Для процесса $\eta_n(t)$ верна стандартная в теории стохастических уравнений оценка второго момента

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} |\eta_n(t)|^2 \le C(T)(1+|x|)^2,$$

с постоянной $C(T)$, независящей от n.

Теперь отсюда, сходимости $\eta_n \Longrightarrow \eta$ и (14) следует:

$$\xi_n(t) = \psi_n(\eta_n(t)) \Longrightarrow \psi(\eta(t)) = \xi(t).$$

Чтобы получить уравнение для процесса $\xi(t)$ применим формулу Танака [3, теорема II.2.3] к процессу (13) и функции $\psi(x)$. Имеем,

$$\xi(t) = x + \int_0^t v(\xi(s))ds + \int_0^t m(\xi(s))dw(s) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L^\eta(t,y)n_\psi(dy). \tag{21}$$

Для функции $\psi(x)$ очевидно чему равно $D\psi(x)$ при $x<0$, $x\in(0,c)$, $x>c$ и

$$D\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho'(0+)+1-\beta}{2}, & \text{если } x=0, \\ \dfrac{(1+\beta)d+\rho'(c-)}{2}, & \text{если } x=c. \end{cases}$$

Далее,

$$n_\psi(dy) = (\rho'(0+)-1+\beta)\delta_0(y)dy + ((1+\beta)d-\rho'(c-))\delta_c(y)dy + \\ + I_{[0,c]}(y)\rho''(y)dy.$$

Последний интеграл в правой части (21) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} L^\eta(t,y)n_\psi(dy) = (\rho'(0+)-1+\beta)L^\eta(t,0) + ((1+\beta)d-\rho'(c-))L^\eta(t,c) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,c]}(y)L^\eta(t,y)\rho''(y)dy.$$

Используем формулу преобразования локальных времен при преобразованиях процессов [3, теорема II.3.7] :

$$L^\xi(t,\psi(\alpha)) = D\psi(\alpha)L^\eta(t,\alpha)$$

и "occupation time" формулу [3, следствие II.2.2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)L^X(t,y)dy = \int_0^t g(X(s))d\langle M^c\rangle_s$$

для непрерывного семимартингала $X(t)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L^\eta(t,y)n_\psi(dy) &= \gamma_1 L^\xi(t,A) + \gamma_2 L^\xi(t,B) + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t I_{[0,c]}(\eta(s))\rho''(\eta(s))\frac{m^2(\psi(\eta(s)))}{[D\psi(\eta(s))]^2}ds, \end{aligned} \tag{22}$$

величины γ_1, γ_2 определены в (6). Формула (4) следует из формул (21) и (22).

Теорема доказана.

Следующее утверждение фактически доказано в [5], хотя и не сформулировано там явно.

Лемма 2. Пусть для последовательности функций $\{f_n(x)\}$, $x\in[a,b]$, существует постоянная K, независящая от n, и $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f_n) \le K$. Если для любого отрезка $[a_1,b_1]\subseteq [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{b_1} f_n(y)dy = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(y)|dy = 0.$$

Доказательство. Установим оценку

$$\int_a^b |f(y)|dy \le (b-a)\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \left|\int_a^b f(y)dy\right|. \tag{23}$$

Пусть вначале $\int_a^b f(y)dy = 0$. Тогда

$$|f(x)| = \left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)dy\right| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-f(y)|dy \le \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f).$$

Отсюда следует (23) при сделанном дополнительном предположении. Пусть теперь $\int_a^b f(y)dy = I$. Тогда

$$\int_a^b |f(y)|dy \le \int_a^b |f(y)-I|dy + (b-a)|I| \le (b-a)\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + |I|.$$

Оценка (23) установлена. Для любого ε выберем разбиение $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N(\varepsilon)} = b$ такое, чтобы $\max\limits_{1\le i\le N(\varepsilon)-1}(x_{i+1}-x_i) \le \varepsilon$. Используя оценку (3), получим

$$\int_a^b |f_n(y)|dy = \sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(y)|dy \le \sum_{i=1}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)\overset{x_{i+1}}{\underset{x_i}{\mathbf{V}}}(f_n) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(y)dy\right| \le \varepsilon\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f_n) + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(y)dy\right|.$$

Отсюда, для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_a^b |f_n(y)|dy \le K\varepsilon.$$

Т.к. ε сколь угодно мало, отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия II_3 и III_1. Если существует постоянная K такая, что для любого n

$$\sum_{i=1}^{n} |\theta_n(i+1) - \theta_n(i)| \le K, \tag{24}$$

то выполнено условие III_2 с функцией $\Phi(x) = (D\varphi(x))^{-1}$. В этом случае в утверждении теоремы $v(x) = b(x)$ и $m(x) = \sigma(x)$.

Доказательство. При доказательстве теоремы установлено равенство (15). В условиях леммы $\overset{x}{\underset{0}{\mathbf{V}}}(D\psi_n) \le \sum_{j=1}^n |\theta_n(j+1) - \theta_n(j)| \le K$ для любого x. На основании леммы 3

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \left|D\psi_n(y) - D\psi(y)\right|dy = 0,$$

а в силу равномерной ограниченности функций $D\psi_n(y)$ и $D\psi(y)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \left(\left(D\psi_n(y)\right)^2 - \left(D\psi(y)\right)^2\right)dy = 0. \tag{25}$$

Из формул (20), (16), (25) и леммы 1 следует

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n(1)}^{y}\frac{1}{D\varphi_n(z)}dz = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\varphi_n(y)}(D\psi_n(z))^2dz = \int_0^{\varphi(y)}(D\psi(z))^2dz = \int_A^y \frac{1}{D\varphi(z)}dz.$$

Поэтому $\Phi(x) = (D\varphi(x))^{-1}$ и утверждение леммы следует из формул (7).

Лемма доказана.

Очевидно, что условие (24) выполняется если при каждом n последовательность $\{\theta_n(k)\}_k$ монотонна и выполняется II_3.

4. Примеры.

Рассмотрим поведение винеровского процесса в пространстве с композитной областью. Процесс $\xi_n(t)$ описывается уравнением

$$\xi_n(t) = x + \sum_{i=1}^{n} \beta_n(i) L^{\xi_n}(t, a_n(i)) + w(t). \tag{26}$$

Достигнув уровня $a \neq a_n(i)$ траектория процесса $\xi_n(t)$ с вероятностями равными 0,5 может продолжить движение как вниз, так и вверх. С уровня $a_n(i)$ эта траектория может двинуться вверх с вероятностью $\frac{1+\beta_n(i)}{2}$ и вниз с вероятностью $\frac{1-\beta_n(i)}{2}$ [3, стр.169]. Обозначим через $k(n)$ функцию, принимающую значения из $\{1, 2, ..., n\}$ и такую, что $\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = l \in [0, 1]$. Для доказательства сходимости функции $\psi_n(x)$ к функции $\psi(x)$ при $x \in [0, c]$ достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} (\psi(c_n(k(n)) - \rho(c_n(k(n))) = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим три случая.

1. Этот пример показывает, что даже при неограниченном увеличении числа барьеров, они могут не оказывать влияния на предельный процесс. Пусть $a_n(i) = \frac{i}{n+1}$, $i = 1, 2, ..., n$. В этом случае $A = 0$, $B = 1$. Далее предположим, $\beta_n(i) = \frac{(-1)^i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда

$$\theta_n(i) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}, \text{ если } i \text{ четное,} \\ \dfrac{n+1}{n}, \text{ если } i \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Поскольку для любого $i = 1, 2, ..., n-1$, разность $|\theta_n(i+1) - \theta_n(i)| = \frac{2}{n}$, то условие (24) выполнено. Для $k = 2, 3, ..., n$,

$$c_n(k) = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n+1}\left\{\left[\left[\frac{k}{2}\right]\right] + \left(k - 1 - \left[\left[\frac{k}{2}\right]\right]\right)\frac{n-1}{n+1}\right\}.$$

Находим, $\beta = 0$, $d = 1$, $c = 1$. Установим равенство $\rho(x) = x$. Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = l \in [0, 1]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n(c_n(k(n))) - \rho(c_n(k(n))) = \lim_{n\to\infty} (a_n(k(n)) - c_n(k(n))) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k(n)}{n+1} - c_n(k(n))\right) = l - l = 0.$$

Равенство (27) установлено. Из теоремы получим $\xi(t) = x + w(t)$.

2. В этом примере у предельного процесса отсутствуют барьеры, но появляется снос, действующий только в области композитности. Пусть $a_n(i)$ такие, как в примере 1 и $\beta_n(i) = \frac{1}{n}$ для любого $i = 1, 2, ..., n$. В этом случае $\beta = 0$,

$$\theta_n(i) = \frac{(n+1)^{i-1}}{n(n-1)^{i-2}}, \quad i = 3, 4, ...n+1,$$

$$c_n(k) = \frac{n}{(n+1)^2}\sum_{j=2}^{k}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{j-2} = \frac{n}{n+1}\frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{k-1}}{2}.$$

Так как $\theta_n(i) < \theta_n(i+1)$ и $\lim_{n\to\infty} \theta_n(n+1) = e^{-2}$, то. условие (24) выполнено. Находим

$$d = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} = e^2.$$

Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=l\in[0,1]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} c_n(k(n))=\frac{1-e^{-2l}}{2}.$$

Поэтому $c=\frac{1-e^{-2}}{2}$. Установим, что

$$\rho(x)=-0.5\ln(1-2x),\ x\in[0,c];\ \kappa(x)=0.5\Big(1-e^{-2x}\Big), x\in[0,1].$$

Имеем,

$$\lim_{n\to\infty}(\psi_n(c_n(i))-\rho(c_n(i))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k(n)}{n+1}+0.5\ln(1-2c_n(k(n))\right)=0.$$

Равенство (27) установлено. Из теоремы получим, что процесс $\xi(t)$ является решением уравнения

$$\xi(t)=x+\int_0^t I_{[0,1]}(\xi(s))ds+w(t).$$

3. Предложен рецензентом. Здесь у предельного процесса есть два барьера, а коэффициент диффузии становится переменным и уменьшается в зоне композитности по сравнению с коэффициентами диффузий допредельных процессов. Число барьеров равно $2n$ и $a_{2n}(i)=\frac{i}{2n}$, $\beta_{2n}(i)=\frac{(-1)^i}{2}$, $i=1,2,...,2n$. Находим $\beta=-0.5$, для $i=1,2,...,2n$,

$$\theta_{2n}(i)=\begin{cases}0.5, & \text{если i – четное,}\\ 1.5, & \text{если i – нечетное.}\end{cases}$$

Далее, для $k=2,3,...,2n$,

$$c_{2n}(k)=\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\theta_n(j)}=\frac{1}{2n}\left(2\left[\left[\frac{k}{2}\right]\right]+\frac{2}{3}\left(k-\left[\left[\frac{k}{2}\right]\right]-1\right)\right).$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{2n}=l\in[0,1],\quad \text{тогда}\quad \lim_{n\to\infty}c_{2n}(k(n))=\frac{4}{3}l.$$

Поэтому

$$c=\lim_{n\to\infty}c_{2n}(2n)=\frac{4}{3}.$$

Как и выше показывается, что $\rho(x)=\frac{3}{4}x$, $x\in[0,\frac{4}{3}]$.

Замети теперь, что в условии II_4 $d=3$, т.к. $\prod_{j=2}^{2n}\frac{1+\beta_{2n}(j)}{1-\beta_{2n}(j)}=3$ для любого $n\geq 1$. Далее,

$$D\varphi_n(y)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & \text{если } y<a_{2n}(1), \text{ или } y>a_{2n}(2n),\\ 2, & \text{если } y\in(a_{2n}(2j-1),a_{2n}(2j)),\ j=1,2,...,n,\\ \frac{2}{3}, & \text{если } y\in(a_{2n}(2j),a_{2n}(2j+1)),\ j=1,2,...,n-1.\end{cases}$$

По определению

$$\psi(x)=\begin{cases}1.5x, & \text{если } x\leq 0,\\ \frac{3}{4}x, & \text{если } 0\leq x\leq\frac{4}{3},\\ \frac{3}{2}x-1, & \text{если } x\geq\frac{4}{3},\end{cases}$$

и

$$\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}y, & \text{если } y\le 0,\\ \dfrac{4}{3}y, & \text{если } y\in[0,1],\\ \dfrac{2}{3}(y+1), & \text{если } y\ge 1.\end{cases}$$

Пусть y фиксированно и $y<a_n(1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n(1)}^{y}\frac{1}{D\varphi_n(z)}dz=1.5y.$$

Фиксируем y из $[0,1]$. Выберем $k(n)=[[2ny]]$. Тогда $y\in[a_{2n}(k(n)),a_{2n}(k(n)+1)]$ при любом n и $\lim_{n\to\infty}a_{2n}(k(n))=y$. Имеем

$$\int_{a_{2n}(1)}^{y}\frac{1}{D\varphi_n(z)}dz=\sum_{j=1}^{k(n)-1}\theta_{2n}(j+1)\Big[a_{2n}(j+1)-a_{2n}(j)\Big]+\theta_{2n}(k(n))\Big[y-a_{2n}(k)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2n}\bigg(0.5\bigg[\bigg[\frac{k(n)}{2}\bigg]\bigg]+1.5\bigg(k(n)-\bigg[\bigg[\frac{k(n)}{2}\bigg]\bigg]-1\bigg)\bigg)+\theta_{2n}(k(n))\Big[y-a_{2n}(k(n))\Big].$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$. При сделанных предположениях

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\bigg(0.5\bigg[\bigg[\frac{k(n)}{2}\bigg]\bigg]+1.5\bigg(k(n)-\bigg[\bigg[\frac{k(n)}{2}\bigg]\bigg]-1\bigg)\bigg)=y.$$

Следовательно, для $y\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_{2n}(1)}^{y}\frac{1}{D\varphi_n(z)}dz=y.$$

Пусть $y>a_{2n}(2n)=1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_{2n}(1)}^{y}\frac{1}{D\varphi_n(z)}dz=y+\int_1^y 1.5dz.$$

Т.о. условие III_2 выполнено с функцией

$$\Phi(y)=\begin{cases}1.5, & \text{если } y<0, \text{ или } y\ge 1,\\ 1, & \text{если } y\in[0,1).\end{cases}$$

Формулы (7) дают следующий результат $\gamma_1=-\frac{1}{3}$, $\gamma_2=\frac{1}{3}$,

$$m^2(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<0, \text{ или } x\ge 1,\\ \dfrac{3}{4}, & \text{если } x\in[0,1).\end{cases}$$

Предельный процесс является решением уравнения

$$\xi(t)=x-\frac{1}{3}L^{\xi}(t,0)+\frac{1}{3}L^{\xi}(t,1)+\int_0^t m(\xi(s))dw(s).$$

5. Выводы.

В работе приведены достаточные условия слабой сходимости решений стохастических уравнений в фазовом пространстве с барьерами. Выписаны уравнения для предельных процессов когда барьеры заполняют в пределе некоторый отрезок.

Список литературы

1. К. Иосида, *Функциональный анализ* , “Мир”, Москва, 1967.
2. J. F. Le Gall, *On one dimensional stochastic equations involving local time of unknown processes*, Lecure Notes in Mathematics, vol. 1095, 1983, pp. 51–82.
3. С. Я. Махно, *Стохастические уравнения. Предельные теоремы*, “Наукова Думка”, Киев, 2012.
4. Н. И. Портенко, *Процеси дифузії у середовищах з мембранами*, Інститут математики НАН України, Киев, 1995.
5. С. Б. Стечкин, *Уточнение одного доказательства в книге В. И. Гливенко Интеграл Стильтьеса*, Успехи математических наук **3б** (1948), №6, 213–215.

Институт математики НАН Украины
Адрес электронной почты: smakhno@gmail.com

Поступила 09/06/2015