Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 150–172

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 150–172

ОЦІНКИ СУПРЕМУМІВ НОРМ ВІДХИЛЕННЯ ОДНОРІДНОГО ТА ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ ВІД ЙОГО МОДЕЛІ

УДК 519.21

Н. В. ТРОШКІ

Анотація. В даній роботі отримано оцінки супремумів норм відхилень однорідного та ізотропного випадкового поля від побудованої моделі цього поля.

Abstract. In this paper we obtained the estimates in the supremum norm of the deviations of a homogeneous and isotropic random field from the constructed model of this field.

Аннотация. В данной работе получены оценки супремума норм отклонений однородного и изотропного случайного поля от построенной модели этого поля.

1. Вступ

Однією з найважливіших задач теорії випадкових процесів та полів є задача моделювання та апроксимації цих процесів та полів. Існує багато методів побудови моделей випадкових процесів. Для стаціонарних процесів найбільш відомим є метод розбиття та рандомізації спектру, розроблений Г. О. Михайловим та його учнями (див. [9], [10], [11], [12], [13]). Іншими методами користувався М. Й. Ядренко та його учні (див. роботи [16], [17], [18]).При побудові моделей випадкових процесів та полів важливо знати наскільки близькі побудовані моделі до цих процесів та полів в певних метриках. Побудові моделей, що наближають випадкові поля з заданою надійністю та точністю, присвячено ряд робіт Ю. В. Козаченка та його учнів (див. роботи [3], [4], [5], [6], [8]).

В цій роботі розглядається неперервне в середньому квадратичному, дійне гауссове однорідне та ізотропне випадкове поле на $\mathbb{R}^2$. Для цього поля модифікованим методом розбиття та рандомізації спектру, який був введений в роботах [8], [14], [15], побудована нова модель. При побудові моделей полів за допомогою модифікованого методу розбиття та рандомізації спектру отримуємо моделі, які є субгауссовими. Це є якісною відмінністю цього методу від інших, оскільки при цьому коваріаційна функція моделі співпадає з коваріаційною функцією поля, а для більшості інших методів ця властивість не виконується. В роботі використовується зображення однорідного та ізотропного випадкового поля, запропоноване М. Й. Ядренком в книзі [17]. Важливим завданням при моделюванні випадкових полів є оцінка ймовірності відхилення в рівномірній метриці моделі цього випадкового поля від самого поля на деякому компакті $\mathbb{T}$, а саме знаходження оцінки для ймовірності

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbb{T}} |X(t,x) - \hat{X}(t,x)| > \varepsilon\right\},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G07.

Ключові слова і фрази. Гауссові випадкові поля, однорідні та ізотропні поля, моделювання, точність та надійність.

де $X(t,x)$ – поле, а $\hat{X}(t,x)$ – його модель, тобто оцінка розподілу норми відхилення поля від його моделі в $C(T)$. Оскільки, $X(t,x) - \hat{X}(t,x) \in Sub(\Omega)$, то для оцінки надійності та точності побудованої моделі в просторі $C(T)$ необхідно отримати оцінки супремумів норм відхилень поля від його моделі. Саме цій задачі і присвячена дана робота. Саму ж оцінку розподілу норми відхилення поля від його моделі в просторі $C(T)$, плануємо отримати в наступній роботі.

Зауважимо, що подібні оцінки легко отримати для відхилення моделей від полів з $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, треба тільки подолати технічні труднощі.

Дана робота складається з чотирьох розділів. У вступній частині обгрунтовано актуальність і новизну досліджень, та окреслено основні результати роботи. Другий розділ містить необхідні означення та попередні результати з теорії субгауссових випадкових величин. В третьому розділі зосереджена основна частина дослідження. В цьому розділі у формі лем та теорем викладено отримані оцінки для супремумів норм відхилень випадкового поля від моделі та їх доведення. Підсумки роботи підведені в розділі 4.

2. Необхідні відомості

Означення 2.1. [1] Випадкову величину χ будемо називати субгаусовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\chi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Простір усіх субгаусових випадкових величин, заданих на стандартному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathbf{B}, \mathcal{P}\}$, будемо позначати $Sub(\Omega)$. Простір $Sub(\Omega)$ – простір Банаха з нормою $\tau(\chi) = \sup_{\lambda\neq 0}\left[\frac{2\ln \mathbf{E}\exp\{\lambda\chi\}}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Означення 2.2. [1] Випадковий процес $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ називається субгаусовим, якщо при всіх $t \in T$ $\xi(t) \in Sub(\Omega)$ та $\sup_{t\in T}\tau(\xi(t)) < \infty$.

Лема 2.1. [1] *Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні субгаусові випадкові величини. Тоді*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\tau^2(\xi_k)$$

Наслідок 2.1. [2] *Для довільних $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – незалежних субгауссових випадкових величин справедливою є нерівність*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\tau^2(\xi_k)$$

Лема 2.2. [1] *Нехай ξ – центрована випадкова величина, така що $\boldsymbol{E}\xi^{2k+1} = 0$ і $\theta(\xi) = \sup_{k\geq 1}\left[\frac{2^k k!}{(2k)!}\boldsymbol{E}\xi^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}} < \infty$. Тоді $\xi \in Sub(\Omega)$ і $\tau(\xi) \leq \theta(\xi)$.*

Нехай $J_k(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\varphi - u\sin\varphi)d\varphi$, де $k = 1, 2, \ldots$ інтегральне зображення функцій Бесселя першого роду.

Лема 2.3. [14] *Для будь-яких $0 < \alpha \leq 1$ має місце наступне співвідношення*

$$| J_k(u) | \leq 2^{1-\alpha} | u |^{\alpha} \pi^{\alpha}\frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Лема 2.4. [14] *Для будь-яких $0 < \alpha \leq 1$ справедлива наступна нерівність*

$$| J_k(t\lambda) - J_k(tu) | \leq 4^{1-\alpha}t^{\alpha} | \lambda - u |^{\alpha} \pi^{\alpha}\cdot\frac{1}{k^{\alpha}}\left(1 + \frac{t^{\alpha} | \lambda + u |^{\alpha}}{2^{\alpha}}\right).$$

Означення 2.3. [17] Випадкове поле $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^2\}$ називається однорідним в широкому розумінні в $\mathbb{R}^2$, якщо $\mathbf{E}X(t) = const, t \in \mathbb{R}^2$ та

$$\mathbf{E}X(t)X(s) = B(t-s) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda, t-s)} dF(\lambda), t, s \in \mathbb{R}^2.$$

Означення 2.4. [17] Нехай $SO(2)$ група обертань $\mathbb{R}^2$ навколо початку координат. Однорідне випадкове поле $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$ називається ізотропним, якщо для кожного елемента g з групи $SO(2)$ для будь-яких $t, s \in \mathbb{R}^2$ виконується співвідношення

$$\mathbf{E}X(t)X(s) = \mathbf{E}X(gt)X(gs).$$

3. Основна частина

Нехай $X = \{X(t,x), t \in \mathbb{R}, x \in [0, 2\pi]\}$ - неперервне в середньому квадратичному, дійсне, гауссове, однорідне та ізотропне випадкове поле на $\mathbb{R}^2$. Тоді легко отримати, подібно до того як це робилось для комплексного поля в [17], таке зображення

$$X(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{2,k}(\lambda), \quad (1)$$

де $\eta_{i,k}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, ...$ - незалежні гауссові процеси з незалежними приростами, $\mathbf{E}\eta_{i,k}(\lambda) = 0$, $\mathbf{E}(\eta_{i,k}(b) - \eta_{i,k}(c))^2 = F(b) - F(c)$, $b > c$, $F(\lambda)$ – спектральна функція поля.

Побудуємо деяке розбиття $L = \{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_l < \lambda_{l+1}$, $\lambda_{N-1} = \Lambda$, $\lambda_N = \infty$ та $C = \max_{0 < l \le N-2} \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l} < \infty$.

За модель поля $X(t,x)$ будемо брати

$$\hat{X}(t,x) = \sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \eta_{1,k,l} J_k(t\zeta_l) + \sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \eta_{2,k,l} J_k(t\zeta_l),$$

де $\eta_{i,k,l}$, $i = 1, 2$ – незалежні гауссові випадкові величини, $\eta_{i,k,l} = \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} d\eta_{i,k}(\lambda)$ такі, що $\mathbf{E}\eta_{i,k,l} = 0$, $\mathbf{E}\eta_{i,k,l}^2 = F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l) = b_l^2$, $\zeta_l, l = 0, ..., N-2$ - незалежні випадкові величини, що незалежать від $\eta_{i,k,l}$ та приймають значення на відрізках $[\lambda_l, \lambda_{l+1}]$, $\zeta_{N-1} = \Lambda$, $b_l^2 > 0$ такі, що

$$F_l(\lambda) = P\{\zeta_l < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_l)}{F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l)}.$$

Якщо $b_l^2 = 0$, тоді $\zeta_l = 0$ з ймовірністю одиниця. Для простоти вважатимемо, що $b_l^2 > 0$, $l = 0, 1, ..., N-1$.

Отже $\hat{X}(t,x)$ матиме вигляд

$$\hat{X}(t,x) = \sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\zeta_l) d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\zeta_l) d\eta_{2,k}(\lambda). \quad (2)$$

Зауважимо, що $X(t,x)$ можна зобразити у вигляді

$$X(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} J_k(t\lambda) d\eta_{2,k}(\lambda).$$

Позначимо через

$$\chi_M(t,x) = X(t,x) - \hat{X}(t,x) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) + \right. \\ \left. + \sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) \right) + \\ + \left(\sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l)) d\eta_{2,k}(\lambda) + \right. \\ \left. + \sum_{k=M+1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{2,k}(\lambda) \right) =: \\ =: \chi_{M,1}(t,x) + \chi_{M,2}(t,x), \quad (3)$$

та розглянемо наступну різницю

$$\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y) = (\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y)) + (\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y)). \quad (4)$$

Тоді для довільних $t, s \in [0,T]$ та $x, y \in [0, 2\pi]$ справджується

$$\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y) = \sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) + \\ + \sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) - \sum_{k=1}^{M} \cos(ky) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - \\ - J_k(s\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) - \sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(ky) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) = \\ = \sum_{k=1}^{M} \left(\cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) - \cos(ky) \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - J_k(s\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) \right) + \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(\cos(kx) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} J_k(t\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) - \cos(ky) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \left(\cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l) - J_k(s\lambda) + J_k(s\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) + \right. \\ \left. + (\cos(kx) - \cos(ky)) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - J_k(s\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) \right) + \\ + \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(\cos(kx) \int_0^{\infty} (J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda)) d\eta_{1,k}(\lambda) + \right. \\ \left. + (\cos(kx) - \cos(ky)) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda) d\eta_{1,k}(\lambda) \right).$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y) = \sum_{k=1}^{M} \left(\sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l) - J_k(s\lambda) + \right.$$

$$+ J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda) + (\sin(kx) - \sin(ky)) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda) \Bigg) +$$

$$+ \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(\sin(kx) \int_0^{\infty} (J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda))d\eta_{2,k}(\lambda) + \right.$$

$$\left. + (\sin(kx) - \sin(ky)) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda) \right).$$

Тоді

$$\tau(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)) \le$$

$$\le \tau(\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y)) + \tau(\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y)),$$

а

$$\tau^2(\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y)) \le 4\tau^2 \left(\sum_{k=1}^{M} \cos(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l) - \right.$$

$$- J_k(s\lambda) + J_k(s\zeta_l))\, d\eta_{1,k}(\lambda)) + 4\tau^2 \left(\sum_{k=1}^{M} (\cos(kx) - \cos(ky)) \times \right.$$

$$\times \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - J_k(s\zeta_l))\, d\eta_{1,k}(\lambda)) +$$

$$+ 4\tau^2 \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \cos(kx) \int_0^{\infty} (J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda) \right) +$$

$$+ 4\tau^2 \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (\cos(kx) - \cos(ky)) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda)d\eta_{1,k}(\lambda) \right),$$

$$\tau^2(\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y)) \le 4\tau^2 \left(\sum_{k=1}^{M} \sin(kx) \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l) - \right.$$

$$- J_k(s\lambda) + J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda)) + 4\tau^2 \left(\sum_{k=1}^{M} (\sin(kx) - \sin(ky)) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} (J_k(s\lambda) - J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda) \right) +$$

$$+ 4\tau^2 \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\infty} (J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda))d\eta_{2,k}(\lambda) \right) +$$

$$+ 4\tau^2 \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (\sin(kx) - \sin(ky)) \int_0^{\infty} J_k(s\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda) \right).$$

Позначимо $\sigma_0 = \sup_{0 \le t \le T} \tau(\chi_M(t,x))$ та $\sigma(h) = \sup_{\substack{|t-s| \le h \\ |x-y| \le h}} \tau(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y))$.

При знаходженні оцінки σ_0, будуть використані наступні дві леми, доведення яких наведено в роботі [14].

Лема 3.1. *Для будь-яких* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ *мають місце співвідношення*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right) \leq \frac{1}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times$$
$$\times 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}t^{2\alpha}\sum_{l=0}^{N-2}\mid \lambda_{l+1}-\lambda_l\mid^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+4M(F(+\infty)-F(\Lambda)),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda)\right) \leq \frac{1}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times$$
$$\times 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}t^{2\alpha}\sum_{l=0}^{N-2}\mid \lambda_{l+1}-\lambda_l\mid^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+4M(F(+\infty)-F(\Lambda)),$$

де $C=\max_{0<l\leq N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$.

Лема 3.2. *Нехай при* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ *інтеграл* $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda) < \infty$, *тоді мають місце наступні нерівності*

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^\infty J_k(t\lambda)d\eta_{1,k}(\lambda)\right) \leq$$
$$\leq 2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^\infty J_k(t\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda)\right) \leq$$
$$\leq 2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right).$$

Теорема 3.1. *Нехай* $X(t,x)$ *та* $\hat{X}(t,x)$ *визначені в (1) та (2) відповідно і нехай при* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ *інтеграл* $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda) < \infty$. *Тоді виконується*

$$\sigma_0 \leq \left(\frac{2}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times\right.$$
$$\times\left(b_l^2+\left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+8M(F(+\infty)-F(\Lambda))+$$
$$\left.+2^{2(1-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{2}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $C=\max_{0<l\leq N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$.

Доведення. Використовуючи леми 3.1 та 3.2, а також те, що

$$\tau^2(\chi_M(t,x)) = [\tau(\chi_{M,1}(t,x)) + \tau(\chi_{M,2}(t,x))]^2 \le$$
$$\le 2[\tau^2(\chi_{M,1}(t,x)) + \tau^2(\chi_{M,2}(t,x))],$$

отримаємо

$$\tau^2(\chi_M(t,x)) \le 2\left[\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)+\right.$$
$$+\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda)\right)+$$
$$+\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)d\eta_{1,k}(\lambda)\right)+$$

$$\left.+\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^{\infty}J_k(t\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda)\right)\right]\le$$
$$\le 2\left[2\cdot 4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^{2\alpha}}\left(\cos^2(kx)+\sin^2(kx)\right)\times\right.$$
$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+4\sum_{k=1}^{M}\left(\cos^2(kx)+\sin^2(kx)\right)(F(+\infty)-F(\Lambda))+2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\times$$
$$\left.\times\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}\left(\cos^2(kx)+\sin^2(kx)\right)\times\left(\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)\right]\le$$
$$\le\frac{2}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(b_l^2+\left(\frac{t(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+8M(F(+\infty)-F(\Lambda))+$$
$$+2^{2(1-\alpha)}t^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{2}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda).$$

Звідси

$$\sigma_0=\sup_{0\le t\le T}\tau(\chi_M(t,x))\le\left[\frac{2}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)2\cdot 4^{2(1-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\times\right.$$
$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$\left.+8M(F(+\infty)-F(\Lambda))+2^{2(1-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\frac{2}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

□

Наслідок 3.1. *Нехай розбиття* $L=\{\lambda_0,...,\lambda_N\}$ *множини* $[0,\infty)$ *таке, що* $\lambda_l<\lambda_{l+1}$ *та* $\lambda_{l+1}-\lambda_l=\frac{\Lambda}{N-1}, l=0,...,N-2$ *і нехай виконуються умови теореми 3.1.*

Тоді

$$\sigma_0 \leq \left[\frac{4^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha}}{2\alpha - 1} \left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}} \right) \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right)^{2\alpha} \times \right.$$

$$\times \left(F(\Lambda) + \left(\frac{3T}{2} \right)^{2\alpha} \int_0^{\Lambda} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right) + 8M(F(+\infty) - F(\Lambda)) +$$

$$\left. + \frac{2^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha}}{(2\alpha - 1) M^{2\alpha-1}} \int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Лема 3.3. *Для будь-яких* $0 < \alpha \leq 1$ *та* $0 < \beta \leq 1$ *має місце співвідношення*

$$|J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda)| \leq 4^{1-\alpha} \pi^{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{\alpha}} \left(\lambda^{\alpha} |s-t|^{\alpha} + \lambda^{\alpha+\beta} |s-t|^{\beta} |s+t|^{\alpha} \right).$$

Доведення. В лемі роботи [14] показано, що

$$I_1 = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos\left(u \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos(u \sin\varphi) d\varphi,$$

$$I_2 = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin\left(u \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin(u \sin\varphi) d\varphi.$$

Використовуючи значення інтегралів I_1 та I_2 отримаємо

$$|J_k(t\lambda) - J_k(s\lambda)| = \frac{1}{\pi} \left| \left(-\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos\left(t\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos(t\lambda \sin\varphi) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos\left(s\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi -$$

$$\left. - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \cos(s\lambda \sin\varphi) d\varphi \right) + \left(-\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin\left(t\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin(t\lambda \sin\varphi) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin\left(s\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) d\varphi -$$

$$\left. - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin(s\lambda \sin\varphi) d\varphi \right) \Big| = \frac{1}{\pi} |S_1 + S_2| \leq \frac{1}{\pi} \left(|S_1| + |S_2| \right).$$

Знайдемо оцінку для виразу $|S_1|$

$$|S_1| = \frac{1}{4} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \left[\left(\cos(t\lambda \sin\varphi) - \cos(s\lambda \sin\varphi) \right) - \left(\cos\left(t\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \cos\left(s\lambda \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{k} \right) \right) \right) \right] d\varphi \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(k\varphi)| \cdot \left| \sin \frac{\lambda(s+t)\sin\varphi}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{\lambda(s-t)\sin\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda(s+t)\sin(\varphi + \frac{\pi}{k})}{2} \sin \frac{\lambda(s-t)\sin(\varphi + \frac{\pi}{k})}{2} \right| d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(k\varphi)| \left| \sin \frac{\lambda(s+t)\sin\varphi}{2} \left(\sin \frac{\lambda(s-t)\sin\varphi}{2} - \right. \right.$$

$$\left. - \sin \frac{\lambda(s-t)\sin(\varphi + \frac{\pi}{k})}{2} \right) + \sin \frac{\lambda(s-t)\sin(\varphi + \frac{\pi}{k})}{2} \left(\sin \frac{\lambda(s+t)\sin\varphi}{2} - \right.$$

$$-\sin\frac{\lambda(s+t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\Bigg)\Bigg|d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\cdot\Bigg|\sin\frac{\lambda(s+t)\sin\varphi}{2}\times$$
$$\times\cos\frac{\lambda(s-t)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\sin\frac{\lambda(s-t)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}+$$
$$+\cos\frac{\lambda(s+t)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\sin\frac{\lambda(s+t)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\times$$
$$\times\sin\frac{\lambda(s-t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\Bigg|d\varphi\le\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\sin\frac{\lambda(s-t)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\sin\frac{\lambda(s-t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{2}\sin\frac{\lambda(s+t)(\sin\varphi-\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\right|\right)d\varphi\le$$
$$\le 2\pi\left(\frac{\lambda^\alpha|s-t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha}+\frac{\lambda^\beta|s-t|^\beta\lambda^\alpha|s+t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\beta\cdot 2^\alpha}\right).$$

Оцінка для $|S_2|$ отримується аналогічно. Тоді матимемо

$$|J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda)|\le\frac{1}{\pi}\left[2\pi\left(\frac{\lambda^\alpha|s-t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha}+\frac{\lambda^\beta|s-t|^\beta\lambda^\alpha|s+t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\beta\cdot 2^\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+2\pi\left(\frac{\lambda^\alpha|s-t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\alpha}+\frac{\lambda^\beta|s-t|^\beta\lambda^\alpha|s+t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha}{2^\beta\cdot 2^\alpha}\right)\right]=$$
$$=4^{1-\alpha}\pi^\alpha\frac{1}{k^\alpha}\left(\lambda^\alpha|s-t|^\alpha+\lambda^{\alpha+\beta}|s-t|^\beta|s+t|^\alpha\right).$$

□

Лема 3.4. *Для будь-яких* $0<\alpha\le 1$ *справедлива наступна нерівність*

$$|J_k(t\lambda)-J_k(tu)-J_k(s\lambda)+J_k(su)|\le 2\cdot 4^{1-\alpha}|\lambda-u|^\alpha|s-t|^\alpha\left(\frac{\pi}{2k}\right)^\alpha\times$$
$$\times\left(1+\frac{|\lambda+u|^\alpha|s-t|^\alpha}{4^\alpha}+\frac{|t+s|^\alpha(\lambda^\alpha+2u^\alpha)}{2^\alpha}+\frac{|t+s|^{2\alpha}u^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{4^\alpha\cdot 2^\alpha}\right).$$

Доведення. Оскільки

$$J_k(t\lambda)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\cos\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)d\varphi+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\times\right.$$
$$\times\cos(t\lambda\sin\varphi)d\varphi-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)d\varphi+$$
$$\left.+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\sin(t\lambda\sin\varphi)d\varphi\right),\quad(5)$$

тоді справедливі наступні співвідношення

$$|J_k(t\lambda)-J_k(tu)-J_k(s\lambda)+J_k(su)|=\frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\varphi)\left(\cos\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)-\right.\right.$$
$$-\cos\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)-\cos(tu\sin\varphi)+\cos(t\lambda\sin\varphi)-$$

$$
-\cos(s\lambda\sin\varphi)+\cos\left(s\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)+\cos(su\sin\varphi)-
$$
$$
-\cos\left(su\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\Big)\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\varphi)\left(\sin\left(tu\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)-\right.
$$
$$
-\sin\left(t\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)-\sin(tu\sin\varphi)+\sin(t\lambda\sin\varphi)-
$$
$$
-\sin(s\lambda\sin\varphi)+\sin\left(s\lambda\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)+\sin(su\sin\varphi)-
$$
$$
\left.-\sin\left(su\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{k}\right)\right)\right)d\varphi\Big|=\frac{1}{\pi}|K_1+K_2|\le\frac{1}{\pi}\left(|K_1|+|K_2|\right).
$$

Для оцінки виразів $|K_1|$ та $|K_2|$ використано тригонометричні тотожності, подібні до тих, що були використані при оцінці виразів $|S_1|$ та $|S_2|$, тобто

$$
|K_1|\le 2\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(k\varphi)|\cdot\Bigg[\Bigg|\sin\frac{\lambda(t+s)\sin\varphi}{2}\cos\frac{(\lambda-u)(s-t)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{8}\times
$$
$$
\times\sin\frac{(\lambda-u)(s-t)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin(-\frac{\pi}{2k})}{4}\cos\frac{(\lambda+u)(s-t)\sin\varphi}{4}\Bigg|+
$$
$$
+\Bigg|\sin\frac{(\lambda-u)(s-t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\sin\frac{(\lambda+u)(s-t)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{8}\times
$$
$$
\times\sin\frac{\lambda(t+s)\sin\varphi}{2}\sin\frac{(\lambda+u)(s-t)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin\frac{\pi}{2k}}{4}\Bigg|+
$$
$$
+\Bigg|\sin\frac{(\lambda-u)(s-t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\cos\frac{(\lambda+u)(s-t)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\times
$$
$$
\times\cos\frac{\lambda(t+s)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\sin\frac{\lambda(t+s)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin(-\frac{\pi}{2k})}{2}\Bigg|+
$$
$$
+\Bigg|\sin\frac{u(s-t)\sin\varphi}{2}\cos\frac{(\lambda-u)(t+s)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{8}\times
$$
$$
\times\sin\frac{(\lambda-u)(t+s)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin(-\frac{\pi}{2k})}{4}\cos\frac{(\lambda+u)(t+s)\sin\varphi}{4}\Bigg|+
$$
$$
+\Bigg|\sin\frac{(\lambda-u)(t+s)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\sin\frac{u(s-t)\sin\varphi}{2}\times
$$
$$
\times\sin\frac{(\lambda+u)(t+s)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{8}\sin\frac{(\lambda+u)(t+s)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin\frac{\pi}{2k}}{4}\Bigg|+
$$
$$
+\Bigg|\sin\frac{(\lambda-u)(t+s)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\cos\frac{(\lambda+u)(t+s)\sin(\varphi+\frac{\pi}{k})}{4}\times
$$
$$
\times\cos\frac{u(s-t)(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{\pi}{k}))}{4}\sin\frac{u(s-t)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2k})\sin(-\frac{\pi}{2k})}{2}\Bigg|\Bigg]\,d\varphi\le \tag{6}
$$

$$
\le 4^{1-\alpha}\pi|\lambda-u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{|\lambda+u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}}{4^{\alpha}}+\right.
$$
$$
\left.+\frac{|t+s|^{\alpha}(\lambda^{\alpha}+2u^{\alpha})}{2^{\alpha}}+\frac{|t+s|^{2\alpha}u^{\alpha}|\lambda+u|^{\alpha}}{4^{\alpha}\cdot 2^{\alpha}}\right),
$$

аналогічним чином отримано

$$|K_2| \le 4^{1-\alpha}\pi|\lambda-u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{|\lambda+u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}}{4^{\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\frac{|t+s|^{\alpha}(\lambda^{\alpha}+2u^{\alpha})}{2^{\alpha}}+\frac{|t+s|^{2\alpha}u^{\alpha}|\lambda+u|^{\alpha}}{4^{\alpha}\cdot 2^{\alpha}}\right).$$

Тоді матимемо

$$|J_k(t\lambda)-J_k(tu)-J_k(s\lambda)+J_k(su)| \le 2\cdot 4^{1-\alpha}|\lambda-u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(1+\frac{|\lambda+u|^{\alpha}|s-t|^{\alpha}}{4^{\alpha}}+\frac{|t+s|^{\alpha}(\lambda^{\alpha}+2u^{\alpha})}{2^{\alpha}}+\frac{|t+s|^{2\alpha}u^{\alpha}|\lambda+u|^{\alpha}}{4^{\alpha}\cdot 2^{\alpha}}\right).$$

□

Лема 3.5. *Нехай при* $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ *інтеграл* $\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)<\infty$. *Тоді мають місце наступні співвідношення*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\le$$
$$\le 4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}M\left(\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(b_l^2+\left[\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^{\alpha})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+18\cdot 4^{3-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\left(\int_{\Lambda}^{\infty}|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda)\right)\le$$
$$\le 4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}M\left(\sum_{k=1}^{M}\sin^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(b_l^2+\left[\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^{\alpha})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+18\cdot 4^{3-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}\sin^2(kx)\left(\int_{\Lambda}^{\infty}|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right),$$

де $C=\max_{0<l\le N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$.

Доведення. Застосувавши леми 2.1 та 2.2, а також врахувавши, що для будь-яких дійсних $a_1,a_2,...,a_n$ має місце нерівність

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2\le n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2),$$

отримаємо

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\tau^2\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\theta^2\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)=$$

$$=M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\sup_{m\geq1}\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Використовуючи те, що для центрованої гауссової випадкової величини ξ $\mathbf{E}\xi=0$, $\mathbf{E}\xi^{2k+1}=0$, $\mathbf{E}\xi^{2k}=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\sigma^{2k}$ та те, що випадкові величини ζ_l не залежать від $\eta_{i,k}(\lambda)$, $i=1,2$, тоді з теореми Фубіні, нерівності Коші-Буняковського та леми 3.4 для $l\leq N-2$, отримаємо

$$\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\leq$$

$$\leq\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l)|^2dF(\lambda)\right)^m\leq$$

$$\leq\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\left(4\cdot4^{2(1-\alpha)}|\lambda-\zeta_l|^{2\alpha}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2\alpha}\left(1+\frac{|\lambda+\zeta_l|^\alpha|s-t|^\alpha}{4^\alpha}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|t+s|^\alpha(\lambda^\alpha+2\zeta_l^\alpha)}{2^\alpha}+\frac{|t+s|^{2\alpha}\zeta_l^\alpha|\lambda+\zeta_l|^\alpha}{4^\alpha\cdot2^\alpha}\right)^2\right)dF(\lambda))^m=\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}4^m\times$$

$$\times4^{2m(1-\alpha)}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha}|s-t|^{2m\alpha}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|\lambda-\zeta_l|^{2\alpha}\left(1+\frac{|\lambda+\zeta_l|^\alpha|s-t|^\alpha}{4^\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|t+s|^\alpha(\lambda^\alpha+2\zeta_l^\alpha)}{2^\alpha}+\frac{|t+s|^{2\alpha}\zeta_l^\alpha|\lambda+\zeta_l|^\alpha}{4^\alpha\cdot2^\alpha}\right)^2dF(\lambda)\right)^m=\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}4^m\times$$

$$\times4^{2m(1-\alpha)}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha}|s-t|^{2m\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}|\lambda-u|^{2\alpha}\left(1+\frac{|\lambda+u|^\alpha|s-t|^\alpha}{4^\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|t+s|^\alpha(\lambda^\alpha+2u^\alpha)}{2^\alpha}+\frac{|t+s|^{2\alpha}u^\alpha|\lambda+u|^\alpha}{4^\alpha\cdot2^\alpha}\right)^2dF(\lambda)\right)^m dF_l(u)\leq$$

$$\leq\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}4^m\cdot4^{2m(1-\alpha)}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha}|s-t|^{2m\alpha}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2m\alpha}\times$$

$$\times \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(1 + \frac{\lambda^\alpha \left(1+\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha |s-t|^\alpha}{4^\alpha} + \frac{|t+s|^\alpha \lambda^\alpha (1+2\left(\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha)}{2^\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|t+s|^{2\alpha} u^\alpha \lambda^\alpha \left(1+\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha}{4^\alpha \cdot 2^\alpha} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_l(u)$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^m \cdot 4^{2m(1-\alpha)} \times$$

$$\times \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha} |s-t|^{2m\alpha} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2m\alpha} \left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(1 + \frac{\lambda^\alpha \left(1+\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\right)^\alpha |s-t|^\alpha}{4^\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|t+s|^\alpha \lambda^\alpha \left(1+2\left(\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\right)^\alpha\right)}{2^\alpha} + \frac{|t+s|^{2\alpha} \lambda_{l+1}^\alpha \lambda^\alpha \left(1+\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\right)^\alpha}{4^\alpha \cdot 2^\alpha} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^m \cdot 4^{2m(1-\alpha)} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha} |s-t|^{2m\alpha} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2m\alpha} \times$$

$$\times \left(4 \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \left(1 + \frac{\lambda^{2\alpha}(1+C)^{2\alpha}|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} + \frac{|t+s|^{2\alpha}\lambda^{2\alpha}(1+2C^\alpha)^2}{2^{2\alpha}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|t+s|^{4\alpha}\lambda_{l+1}^{2\alpha}\lambda^{2\alpha}(1+C)^{2\alpha}}{4^{2\alpha}\cdot 2^{2\alpha}} \right) dF(\lambda) \right)^m = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^m \cdot 4^{2m(1-\alpha)} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2m\alpha} \times$$

$$\times |s-t|^{2m\alpha} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2m\alpha} 4^m \left[b_l^2 + \left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) + \left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times (1+2C^\alpha)^2 \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) + \left(\frac{|t+s|^2 \lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right]^m.$$

Розглянемо випадок коли $l = N-1$. Застосувавши оцінку $|\sin x| \leq x^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ до множників у (6), які не містять $|\lambda + u|$ і $|t+s|$, а решту синусів та косинусів обмеживши одиницею, отримаємо

$$\mathbf{E} \left(\int_\Lambda^\infty (J_k(t\lambda) - J_k(t\zeta_l) - J_k(s\lambda) + J_k(s\zeta_l)) d\eta_{1,k}(\lambda) \right)^{2m} \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \left(\int_\Lambda^\infty |J_k(t\lambda) - J_k(t\Lambda) - J_k(s\lambda) + J_k(s\Lambda)|^2 dF(\lambda) \right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \left(64 \int_\Lambda^\infty \left(3\frac{|\lambda-\Lambda|^\alpha |s-t|^\alpha}{4^\alpha} + 3\frac{\Lambda^\alpha |s-t|^\alpha}{2^\alpha} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m =$$

$$= \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^{(3-2\alpha)m} 9^m |s-t|^{2m\alpha} \left(\int_\Lambda^\infty \left(|\lambda-\Lambda|^\alpha + 2^\alpha\Lambda^\alpha\right)^2 dF(\lambda) \right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^{(3-2\alpha)m} 18^m |s-t|^{2m\alpha} \left(\int_\Lambda^\infty \left(|\lambda-\Lambda|^{2\alpha} + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}\right) dF(\lambda) \right)^m =$$

$$= \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^{(3-2\alpha)m} 18^m |s-t|^{2m\alpha} \left(\int_\Lambda^\infty |\lambda-\Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + \int_\Lambda^\infty 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right)^m =$$

$$= \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} 4^{(3-2\alpha)m} 18^m |s-t|^{2m\alpha} \left(\int_\Lambda^\infty |\lambda-\Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty) - F(\Lambda)) \right)^m.$$

Отже

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(t\lambda)-J_k(t\zeta_l)-J_k(s\lambda)+J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\left[4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{2\alpha}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times\right.$$

$$\times\left(b_l^2+\left(\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^{\alpha})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right)\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+18\cdot 4^{3-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}\times$$

$$\left.\times\left(\int_{\Lambda}^{\infty}|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)\right]=4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\times$$

$$\times M\sum_{k=1}^{M}\left(\cos^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\ \lambda_{l+1}-\lambda_l\ |^{2\alpha}\left(b_l^2+\left[\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^{\alpha})+\left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+18\cdot 4^{3-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}\cos^2(kx)\left(\int_{\Lambda}^{\infty}|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right).$$

Друга нерівність доводиться аналогічно. □

Лема 3.6. *Нехай для всіх $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ збігається інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)$, тоді справджуються наступні нерівності*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$

$$\leq 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2\frac{1}{k^{2\alpha}}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$

$$\times\left(b_l^2+\left(\frac{s(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+4M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2(F(+\infty)-F(\Lambda)),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}(\sin(kx)-\sin(ky))\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{2,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}(\sin(kx)-\sin(ky))^2\frac{1}{k^{2\alpha}}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(b_l^2+\left(\frac{s(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+4M\sum_{k=1}^{M}(\sin(kx)-\sin(ky))^2(F(+\infty)-F(\Lambda)).$$

Доведення. З лем 2.1 та 2.2 випливають наступні співвідношення

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2\sum_{l=0}^{N-1}\tau^2\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2\sum_{l=0}^{N-1}\theta^2\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)=M\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2\sum_{l=0}^{N-1}\sup_{m\geq1}\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Для оцінки $\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}$ використано лему 2.4 та міркування аналогічні як в лемі 3.1. Врахувавши це, отримаємо

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}(J_k(s\lambda)-J_k(s\zeta_l))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq 2\cdot 4^{2(1-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2\frac{1}{k^{2\alpha}}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(b_l^2+\left(\frac{s(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$
$$+4M\sum_{k=1}^{M}(\cos(kx)-\cos(ky))^2(F(+\infty)-F(\Lambda)).$$

Аналогічно доводиться і друга нерівність. □

Лема 3.7. *Нехай при* $\nu>\frac{1}{2}$ *збігається інтеграл* $\int_0^\infty\lambda^{2\nu}dF(\lambda)$*. Тоді виконуються*

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq\frac{2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=M+1}^{\infty}\left(\cos^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}|s+t|^{2\alpha}\int_0^{\infty}\lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{2,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq\frac{2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=M+1}^{\infty}\left(\sin^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}|s+t|^{2\alpha}\int_0^{\infty}\lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right),$$

де $\frac{\alpha}{\delta}\leq 1$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $\delta>0$ *та* $0<\beta\leq 1$.

Доведення. З лем 2.1 та 2.2 випливають наступні співвідношення

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos^2(kx)\tau^2\left(\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)\leq$$
$$\leq\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos^2(kx)\theta^2\left(\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)=$$
$$=\sum_{k=M+1}^{\infty}\cos^2(kx)\sup_{m\geq 1}\left[\frac{2^m\cdot m!}{(2m)!}\mathbf{E}\left(\int_0^{\infty}(J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Для довільного $h>0$ та $0<\gamma\leq 1$ справджується

$$\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{\gamma}\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)^{\gamma}\leq\frac{1}{\gamma}\ln\left(1+\left(\frac{1}{h}\right)^{\gamma}\right)\leq\frac{1}{h^{\gamma}\cdot\gamma},$$

звідси $h^{\gamma}\leq\frac{1}{\gamma\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)}$, тоді $h^{\gamma\delta}\leq\frac{1}{\gamma^{\delta}\left(\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)\right)^{\delta}}$, $\delta>0$. Покладемо $\gamma\cdot\delta=\alpha$, тоді

$$h^{\alpha}\leq\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\delta}\left(\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)\right)^{\delta}}. \tag{7}$$

Використовуючи лему 3.3 та нерівність (7), ми отримаємо

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty (J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right)^{2m} \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\left(\int_0^\infty (J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))dF(\lambda)\right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\left(\int_0^\infty \left(4^{1-\alpha}\pi^\alpha \frac{1}{k^\alpha}(\lambda^\alpha|s-t|^\alpha+\lambda^{\alpha+\beta}|s-t|^\beta\cdot|s+t|^\alpha)\right)^2 dF(\lambda)\right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\frac{2\cdot 4^{2m(1-\alpha)}\pi^{2m\alpha}}{k^{2m\alpha}}\times$$

$$\times\left(|s-t|^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+|s-t|^{2\beta}\cdot|s+t|^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2(\alpha+\beta)}dF(\lambda)\right)^m \leq$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\frac{2\cdot 4^{2m(1-\alpha)}\pi^{2m\alpha}}{k^{2m\alpha}}\frac{1}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2m\delta}}\times$$

$$\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\cdot|s+t|^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2(\alpha+\beta)}dF(\lambda)\right)^m.$$

Визначимо α та β наступним чином $\alpha=\frac{1}{2}+\beta$, $\beta=\frac{\nu-\frac{1}{2}}{2}$, де $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$ та $\nu>\frac{1}{2}$, тоді

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^\infty \cos(kx)\int_0^\infty (J_k(t\lambda)-J_k(s\lambda))d\eta_{1,k}(\lambda)\right) \leq$$

$$\leq \frac{2\cdot 4^{2(1-\alpha)}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=M+1}^\infty\left(\cos^2(kx)\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}|s+t|^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right).$$

Аналогічно доводиться і друга нерівність. □

Лема 3.8. *Нехай при* $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ *збігається інтеграл* $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)$. *Тоді мають місце наступні нерівності*

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^\infty (\cos(kx)-\cos(ky))\int_0^\infty J_k(s\lambda)d\eta_{1,k}(\lambda)\right) \leq$$

$$\leq 2^{2(1-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{k=M+1}^\infty (\cos(kx)-\cos(ky))^2\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda),$$

$$\tau^2\left(\sum_{k=M+1}^\infty (\sin(kx)-\sin(ky))\int_0^\infty J_k(s\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda)\right) \leq$$

$$\leq 2^{2(1-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\sum_{k=M+1}^\infty (\sin(kx)-\sin(ky))^2\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda).$$

Доведення. Доведення леми 3.8 випливає з леми 2.3. □

Теорема 3.2. *Нехай $X(t,x)$ та $\hat{X}(t,x)$ визначені в (1) та (2) відповідно,*

$$\sigma(h) = \sup_{\substack{|t-s|\le h\\ |x-y|\le h}} \tau(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)),$$

де $\chi_M(t,x)$ задається як (3) і нехай при $\nu > \frac{1}{2}$ інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2\nu} dF(\lambda) < \infty$, тоді

$$\sigma(h) \le \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{\delta}} \left[2\cdot 4^{2(2-\alpha)} \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha} \frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times\right.$$
$$\times \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha} \left(b_l^2 + \left(\left(\frac{T(1+C)}{4}\right)^{2\alpha} + T^{2\alpha}(1+2C^\alpha) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{T^2\Lambda(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\right) \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right) + 9\cdot 4^{4-2\alpha}\cdot M^2 \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\times$$

$$\times\left(\int_\Lambda^\infty |\lambda-\Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right) + 4^{4-2\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\times$$
$$\times \sum_{k=1}^{M} \frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}} \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha} \left(b_l^2 + \left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right) +$$
$$+ 16M(F(+\infty)-F(\Lambda)) \sum_{k=1}^{M} \left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta} + \frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) + (2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\nu} dF(\lambda)\right) +$$
$$\left. + 2^{2(2-\alpha)} T^{2\alpha}\pi^{2\alpha} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $C = \max_{0<l\le N-2} \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}$, $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, $\frac{\alpha}{\delta} \le 1$, $\delta > 0$ та $0 < \beta \le 1$.

Доведення. Використовуючи леми 3.5 - 3.8 отримаємо

$$\tau^2(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)) \le [\tau(\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y)) +$$
$$+ \tau(\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y))]^2 \le 2\tau^2(\chi_{M,1}(t,x) - \chi_{M,1}(s,y)) +$$
$$+ 2\tau^2(\chi_{M,2}(t,x) - \chi_{M,2}(s,y)) \le 2\cdot 4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha} M\times$$
$$\times \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha} \left(b_l^2 + \left[\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^\alpha) + \left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right] \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right) +$$

$$+ 9 \cdot 4^{4-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}M^2 \left(\int_{\Lambda}^{\infty} |\lambda - \Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty) - F(\Lambda)) \right) +$$

$$+ 4^{3-2\alpha} s^{2\alpha}\pi^{2\alpha} M \left(\sum_{k=1}^{M} \big((\cos(kx) - \cos(ky))^2 + \right.$$

$$\left. + \ (\sin(kx) - \sin(ky))^2 \big) \frac{1}{k^{2\alpha}} \right) \sum_{l=0}^{N-2} |\lambda_{l+1} - \lambda_l|^{2\alpha} \times$$

$$\times \left(b_l^2 + \left(\frac{s(1+C)}{2} \right)^{2\alpha} \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right) + 8M(F(+\infty) - F(\Lambda)) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{M} \big((\cos(kx) - \cos(ky))^2 + (\sin(kx) - \sin(ky))^2 \big) +$$

$$+ \frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{|s-t|}\right) \right)^{2\delta}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{2\alpha}} \right) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^{2\delta} \int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) + \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{2\delta} |s+t|^{2\alpha} \int_0^{\infty} \lambda^{2\nu} dF(\lambda) \right) +$$

$$+ 2^{3-2\alpha} s^{2\alpha}\pi^{2\alpha} \int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \big((\cos(kx) - \cos(ky))^2 +$$

$$+ (\sin(kx) - \sin(ky))^2 \big) .$$

Використаємо нерівність (10) наслідка 2 з роботи [7], а саме

$$|\cos(kx) - \cos(ky)| \leq \frac{\left(\ln\left(k^2 + e^{\delta}\right) \right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|x-y|} + e^{\delta} \right) \right)^{\delta}},$$

для деякого $\delta > 0$, а також те, що для довільного $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ мають місце наступні співвідношення

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^{2\alpha}} \leq 1 + \sum_{k=2}^{M} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx = 1 + \int_1^M \frac{1}{x^{2\alpha}} dx =$$

$$= 1 + \left. \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right|_1^M = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1} - \frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}},$$

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx = \int_M^{\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx = \left. \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right|_M^{\infty} = \frac{1}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}},$$

тоді матимемо

$$\tau^2(\chi_M(t,x)-\chi_M(s,y)) \le 2\cdot 4^{2(2-\alpha)}|s-t|^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left[\left(\frac{|s-t|(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{|t+s|}{2}\right)^{2\alpha}(1+2C^\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{|t+s|^2\lambda_{l+1}(1+C)}{8}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+9\cdot 4^{4-2\alpha}|s-t|^{2\alpha}\cdot M^2\times$$

$$\times\left(\int_\Lambda^\infty|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)+\frac{4^{4-2\alpha}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M}{\left(\ln\left(\frac{1}{|x-y|}+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{s(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+\frac{16M(F(+\infty)-F(\Lambda))}{\left(\ln\left(\frac{1}{|x-y|}+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}+\frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2\delta}}\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}|s+t|^{2\alpha}\int_0^\infty\lambda^{2æ}dF(\lambda)\right)+$$

$$+\frac{2^{2(2-\alpha)}s^{2\alpha}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|x-y|}+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}.$$

Звідси

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\|x-y|\le h}}\tau(\chi_M(t,x)-\chi_M(s,y))\le\left[2\cdot 4^{2(2-\alpha)}h^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times\right.$$

$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left[\left(\frac{T(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+T^{2\alpha}(1+2C^\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{T^2\Lambda(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+9\cdot 4^{4-2\alpha}h^{2\alpha}\cdot M^2\times$$

$$\times\left(\int_\Lambda^\infty|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)+\frac{4^{4-2\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+\frac{16M(F(+\infty)-F(\Lambda))}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}+\frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+(2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty\lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right)+$$

$$+\frac{2^{2(2-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\Bigg]^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи нерівність (7) отримаємо, що

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\|x-y|\le h}}\tau(\chi_M(t,x)-\chi_M(s,y))\le\Bigg[2\cdot 4^{2(2-\alpha)}\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{2\delta}\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\times$$

$$\times\frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left[\left(\frac{T(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+T^{2\alpha}(1+2C^\alpha)+\left(\frac{T^2\Lambda(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+\frac{9\cdot 4^{4-2\alpha}\cdot M^2}{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{2\delta}\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\times$$

$$\times\left(\int_\Lambda^\infty|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)+\frac{4^{4-2\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+\frac{16M(F(+\infty)-F(\Lambda))}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}+$$

$$+\frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+\right.$$

$$\left.+(2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty\lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right)+\frac{2^{2(2-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{2\delta}}\int_0^\infty\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\times$$

$$\times\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\Bigg]^{\frac{1}{2}}.$$

Звідси матимемо

$$\sigma(h)\le\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{\delta}}\Bigg[2\cdot 4^{2(2-\alpha)}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left[\left(\frac{T(1+C)}{4}\right)^{2\alpha}+T^{2\alpha}(1+2C^\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{T^2\Lambda(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\right]\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+9\cdot 4^{4-2\alpha}\cdot M^2\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\times$$

$$\times\left(\int_\Lambda^\infty|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)+4^{4-2\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{l=0}^{N-2}|\lambda_{l+1}-\lambda_l|^{2\alpha}\left(b_l^2+\left(\frac{T(1+C)}{2}\right)^{2\alpha}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+16M(F(+\infty)-F(\Lambda))\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^\delta\right)\right)^{2\delta}+\frac{4^{3-2\alpha)}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+(2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right)+$$

$$\left.+2^{2(2-\alpha)}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

□

Наслідок 3.2. *Нехай розбиття* $L=\{\lambda_0,...,\lambda_N\}$ *множини* $[0,\infty)$ *таке, що* $\lambda_l<\lambda_{l+1}$ *та* $\lambda_{l+1}-\lambda_l=\frac{\Lambda}{N-1}$ *і нехай виконуються умови теореми 3.2. Тоді*

$$\sigma(h)\le\frac{C_1}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{\delta}},$$

де

$$C_1=\left[2\cdot 4^{2(2-\alpha)}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M}{2\alpha-1}\left(2\alpha-\frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha}\times\right.$$

$$\times\left(F(\Lambda)+\left[\left(\frac{3T}{4}\right)^{2\alpha}+(1+2^{\alpha+1})T^{2\alpha}+\left(\frac{3T^2\Lambda}{2}\right)^{2\alpha}\right]\int_0^\Lambda \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+9\cdot 4^{4-2\alpha}\times$$

$$\times M^2\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\left(\int_\Lambda^\infty|\lambda-\Lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)+2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}(F(+\infty)-F(\Lambda))\right)+4^{4-2\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}M\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha}\left(F(\Lambda)+\left(\frac{3T}{2}\right)^{2\alpha}\int_0^\Lambda \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+$$

$$+16M(F(+\infty)-F(\Lambda))\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}+\frac{4^{3-2\alpha)}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+(2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right)+2^{4-\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\times$$

$$\left.\times\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$, $\frac{\alpha}{\delta}\le 1$, $\delta>0$ *та* $0<\beta\le 1$.

4. Висновки

В даній роботі побудовано модель гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля за допомогою модифікованого методу розбиття та рандомізації спектру. Також отримано оцінки супремумів норм відхилень однорідного та ізотропного поля від побудованої моделі, які в подальшому можуть бути використані при дослідженні надійності та точності побудованої моделі в просторі $C(T)$.

Подяка. Автор щиро вдячний рецензенту за цінні зауваження, які покращили роботу.

Література

1. V. Buldygin, Yu. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
2. R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, and T. Nikitina, *Spaces of φ-subgaussian random variables*, Memorie di Matematica e Applicazioni **XXVII (1)** (2003), 95–124.

3. Ю. В. Козаченко, Л. Ф. Козаченко, *О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских случайных процессов*, Вычисл. и прикладн. математика **75** (1991), 108–115.
4. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, *Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орліча I*, Теор. ймовірн. та матем. стат. **58** (1988), 45–60.
5. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів та полів*, ВПЦ "Задруга", Київ, 2007.
6. Ю. В. Козаченко, О. О. Погоріляк, А. М. Тегза, *Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса*, Карпати, Ужгород, 2012.
7. Yu. Kozachenko and A. Slyvka-Tylyshchak, *The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$*, Applied Mathematics **5** (2014), 2318–2333.
8. Yu. V. Kozachenko and N. V. Troshki, *Accuracy and reliability of a model of Gaussian random process in $C(\mathbb{T})$ space*, International Journal of Statistics and Management System **10** (2015), no. 1–2, 1–15.
9. Г. А. Михайлов, *Моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма*, Докл. АН СССР **262** (1982), № 3, 531–535.
10. Г. А. Михайлов, *Некоторые вопросы теории и методов Монте-Карло*, "Наука", Новосибирск, 1974.
11. Г. А. Михайлов, К. К. Сабельфельд, *О численном моделировании диффузии примеси в стохастических полях скоростей*, Изв. АН СССР, Сер. ФАО **16** (1980), № 3, 229–235.
12. Г. А. Михайлов, *Приближенные модели случайных процессов и полей*, Журн. вычисл. математики и мат. физики **23** (1983), № 3, 558–566.
13. Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек, *Численное статистическое моделирование*, "Академия", Москва, 2006.
14. Н. В. Трошкі, *Точність та надійність моделі гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля у просторі $L_p(\mathbb{T}), p \geq 1$* Теорія ймовір. та матем. статист. **90** (2014), 161–176.
15. N. Troshki, *Construction models of Gaussian random processes with a given accuracy and reliability in $L_p(\mathbb{T}), p \geq 1$*, Journal of Classical Analysis **3** (2013), № 2, 157–165.
16. Z. O. Vyzhva, *On Aprocsimation of 3-D Isotropic Random Fields on the Sphere and Statistical Simulation*, Theory of Stochastic Processes **3** (1997), no. 3–4, 463–467.
17. М. Й. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа", Київ, 1980.
18. М. Й. Ядренко, Г. К. Рахімов, *Статистичне моделювання однорідного та ізотропного поля на площині*, Теорія ймовірностей та математична статистика **49** (1993), 245–251.

Кафедра теорії ймовірностей та математичного аналізу, ДВНЗ "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: FedoryanichNatali@ukr.net

Надійшла 20/04/2016