Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 94, 2016, стор. 173–188

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 94, 2016, pp. 173–188

# ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМУ $\gamma$-ВІДОБРАЖЕНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ВХІДНИМ ПРОЦЕСОМ ІЗ ДЕЯКИХ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ТИПУ

УДК 519.21

Р. Є. ЯМНЕНКО

Анотація. Робота присвячена дослідженню властивостей $\gamma$-відображеного процесу, вхідний процес якого належить певному простору Орліча експоненційного типу, зокрема вивчаються субгауссові, $\varphi$-субгауссові та вхідні процеси із загальних класів $V(\varphi,\psi)$. $\gamma$-відображений процес – це випадковий процес вигляду $W_\gamma(t) = X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s\le t}(X(s) - f(s))$, $f(t)$ – дана функція. Цей процес виникає в страховій математиці як процес ризику, у якому податкові платежі на прибутки здійснюють відповідно схемі "loss-carry-forward", сплачуючи частку $\gamma \in [0,1]$ премій, які надходять, коли процес перебуває на своєму максимумі. Випадок $\gamma < 0$ можна розглядати як модель із заохоченням, пропорційним до зростання максимуму, а $\gamma > 1$ – як модель із відповідним стримуванням.

У роботі досліджуються оцінки банкрутства $\mathsf{P}\{\sup_t W_\gamma(t) > x\}$ відповідної моделі ризику для всіх $\gamma \in \mathbb{R}$. Отримані результати застосовано до узагальненого субгауссового процесу дробового броунівського руху.

Abstract. The paper is devoted to investigation of properties of a $\gamma$-reflected process with input process from a certain Orlicz space of exponential type, namely sub-Gaussian, $\varphi$-sub-Gaussian and random input processes from general classes $V(\varphi,\psi)$ are studied. The $\gamma$-reflected process is a random process of type $W_\gamma(t) = X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s\le t}(X(s) - f(s))$, where $f(t)$ is some function. This process arises in insurance mathematics as a risk process for which income taxing is conducted via loss-carry-forward scheme by paying a proportion $\gamma \in [0,1]$ of incoming premiums when the process is on its maximum. The case of $\gamma < 0$ can be considered as a model with stimulation proportional to the increase of maximum and a value $\gamma > 1$ can be interpreted as corresponding model with inhibition.

Ruin probability estimates $\mathsf{P}\{\sup_t W_\gamma(t) > x\}$ of the corresponding risk model are studied for all $\gamma \in \mathbb{R}$. Obtained results are applied to a sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion process.

Аннотация. Работа посвящена исследованию свойств $\gamma$-отображенного процесса, входящий процесс которого принадлежит некоторому пространству Орлича експоненциального типа, в частности изучаются субгауссовые, $\varphi$-субгауссовые и входящие процессы из общих классов $V(\varphi,\psi)$. $\gamma$-отображенный процесс – это случайный процесс вида $W_\gamma(t) = X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s\le t}(X(s) - f(s))$, $f(t)$ – данная функция. Этот процесс возникает в страховой математике как процесс риска, в котором налоговые платежи на прибыль осущесвляют соответственно схеме "loss-carry-forward", оплачивая долю $\gamma \in [0,1]$ входящих премий, когда процесс пребывает на своем максимуме. Случай $\gamma < 0$ можно рассматривать как модель с поощрением, пропорциональным к возрастанию максимума, а $\gamma > 1$ – как модель с соответствующим сдерживанием.

В работе изучаются оценки банкротства $\mathsf{P}\{\sup_t W_\gamma(t) > x\}$ соответствующей модели риска для всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Полученные результаты применяются к обобщенному субгауссовому процессу дробного броуновского движения.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 60K25.

*Ключові слова і фрази.* Узагальнений дробовий броунівський рух, метрична ентропія, оцінка розподілу, субгауссовий процес, простір Орліча.

## Вступ

Метою цієї роботи є дослідження деяких властивостей випадкових процесів із експоненціальних просторів Орліча, умотивоване задачами, що виникають у практичних застосуваннях страхової математики, фінансів, теорії черг та телекомунікацій. Зокрема, головним об'єктом дослідження виступає $\gamma$-відображений процес $\{W_\gamma(t), t \in \mathsf{T}\}$ [1], визначений на деякій параметричній множині $\mathsf{T}$ (наприклад, $\mathsf{T}$ – це відрізок $[a, b]$ чи піввісь $\mathbb{R}_+$).

Нагадаємо, що випадковий процес $\{W_\gamma(t), t \in \mathsf{T}\}$ називають $\gamma$-відображеним процесом, якщо він має вигляд

$$W_\gamma(t) = X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s \in \mathsf{T}:\, s \le t} (X(s) - f(s)), \tag{1}$$

де $\{X(t), t \in \mathsf{T}\}$ – вхідний процес, $\gamma \in [0, 1]$ – це параметр відображування, а $f(t)$ – дана неперервна монотонна функція.

У літературі з актуарної математики процес $R_\gamma(t) = u - W_\gamma(t)$ при $f(t) = ct$, $c > 0$, відомий як процес ризику з оподаткуванням типу "loss-carry-forward" (втрати, перенесені наперед) для довільного початкового резерву $u \ge 0$. А саме, $X(t)$ є процесом накопичення надлишків страхового портфелю, а податкові платежі на прибутки здійснюють відповідно згаданій схемі, сплачуючи частку $\gamma \in (0, 1)$ премій, які надходять, як тільки процес перебуває на своєму максимумі. Випадок $\gamma < 0$ можна розглядати як модель із заохоченням, пропорційним до зростання максимуму, а значення $\gamma > 1$ – як модель зі стримуванням. У теорії черг процес $W_1(t)$ з'являється як процес довжини черги чи відповідний процес накопичення.

У даній роботі ми припускатимемо, що вхідний процес $X(t)$ є випадковим процесом із певного загального простору Орліча експоненційного типу, зокрема, є субгауссовим чи $\varphi$-субгауссовим процесом, тобто отримані результати в частковому випадку матимуть місце і для гауссових процесів. Предметом дослідження є оцінка ймовірності банкрутства

$$\Psi_{\gamma,\mathsf{T}}(x) = \mathsf{P}\left\{\sup_{t \in \mathsf{T}} W_\gamma(t) > x\right\}. \tag{2}$$

Загальновідомим прикладом вхідного процесу $\gamma$-відображеного процесу є процес дробового броунівського руху (ДБР) [6], [18]. Зокрема у [6] отримано такий граничний результат для $\gamma$-відображеного ДБР при $\gamma \in (0, 1)$ і $\mathsf{T} = [0, T]$, де $T \in (0, \infty)$:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\Psi_{\gamma,\mathsf{T}}(x)}{\Psi_{0,\mathsf{T}}(x)} = \mathcal{M}_{H,\gamma,T},$$

де $\mathcal{M}_{H,\gamma,T} = \mathcal{P}_{2H}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, якщо $H < \frac{1}{2}$, $\mathcal{M}_{\frac{1}{2},\gamma,T} = \mathcal{P}_1^{\frac{2-\gamma}{\gamma}}$ і $\mathcal{M}_{H,\gamma,T} = 1$, якщо $H > \frac{1}{2}$. Причому точні значення $\mathcal{P}_{2H}^a$ наразі відомі лише для $H = \frac{1}{2}$ і $H = 1$, див. наприклад, [5], [13]. У цій роботі ми також застосуємо отримані результати до узагальненого субгауссового процесу ДБР $\{X_H(t), t \in \mathsf{T}\}$ із параметром Хюрста $H \in (0, 1)$, тобто $X_H(t)$ – субгауссовий випадковий процес, коваріаційна функція якого дорівнює

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}\right), \quad t, s \in \mathsf{T}.$$

Нагадаємо, що субгауссовість випадкової величини $\xi$ означає, що $\mathsf{E}\xi = 0$ та здайдеться така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\},$$

тобто твірна функція моментів випадкової величини $\xi$ мажорується твірною функцією моментів гаусової випадкової величини. Субгаусові випадкові величини вперше з'явились у статті Кахана [7] і далі широко досліджувались разом з іншими більш широкими класами випадкових величин та процесів із просторів Орліча, ніж гаусові випадкові величини і процеси (для детального огляду див., наприклад, монографію Булдигіна і Козаченка [4]).

У 1985 році Козаченко та Островський [8] представили банахові простори типу субгаусових, а саме простори випадкових величин та процесів, які природнім чином узагальнюють простори субгаусових випадкових величин. $\varphi$-субгаусова випадкова величина $\xi$ – це центрована випадкова величина, для якої існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(a\lambda)\},$$

де $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – певна N-функція Орліча.

Простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простори $\varphi$-субгаусових випадкових величин) – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами. Такі простори є підпросторами просторів Орліча експоненціального типу, які детально вивчаються в книгах Булдигіна та Козаченка [4], Козаченка, Василик і Ямненка [11]. Більш загальними є класи $V(\varphi, \psi)$ випадкових процесів, уведені в роботі Козаченка та Василик [9]. Детально властивості випадкових процесів із цих класів досліджувалися в роботах [3], [10, 11, 12, 14, 15, 16, 17] та ін.

Робота має наступну структуру. У першому розділі наведені необхідні поняття з теорії $\varphi$-субгауссових випадкових величин та процесів. Розділ 2 містить основні результати, одержані за допомогою методу метричної ентропії для всіх $\gamma \in \mathbb{R}$. У третьому розділі наведено приклад застосування отриманих оцінок (2) до субгауссових процесів, які, зокрема, мають місце для процесів ДБР.

## 1. Випадкові процеси з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та класів $V(\varphi, \psi)$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ – стандартний імовірнісний простір, $\mathsf{T}$ – деяка параметрична множина.

### 1.1. $N$-функції Орліча.

**Означення 1.1.** [4] Функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається $N$-функцією Орліча, якщо $U$ – неперервна парна опукла функція така, що $U(0) = 0$, $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$, $\frac{U(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{U(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

**Лема 1.1.** [11] *Для будь-якої N-функції $\varphi$ мають місце такі твердження:*

(1) $\varphi(\alpha x) \le \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$ *та* $\alpha \in [0, 1]$;
(2) $\varphi(\alpha x) \ge \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$ *та* $\alpha > 1$;
(3) $\varphi(|x| + |y|) \ge \varphi(x) + \varphi(y)$, *коли* $x, y \in \mathbb{R}$;
(4) *існує така стала* $c > 0$, *що* $\varphi(x) \ge c|x|$, *коли* $x > 1$;
(5) *функція* $\zeta(x) = \varphi(x)/x$ *є монотонно неспадною при* $x > 0$.

**Умова** Q. Для $N$-функції $\varphi$ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \tag{3}$$

**Означення 1.2.** $N$-функція $\varphi_1$ підпорядкована $N$-функції $\varphi_2$ ($\varphi_1 \prec \varphi_2$), якщо існують певні сталі $c > 0$ та $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$. $N$-функції $\varphi_1$ та $\varphi_2$ еквівалентні, якщо $\varphi_1 \prec \varphi_2$ та $\varphi_2 \prec \varphi_1$.

### 1.2. $\varphi$-субгауссові випадкові величини і процеси.

**Означення 1.3.** [4] Нехай $\varphi$ – $N$-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{4}$$

**Теорема 1.1.** [4] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є банаховим простором з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda>0} \frac{\varphi^{(-1)}(\log \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\})}{\lambda}, \tag{5}$$

*де* $\varphi^{(-1)}$ *– функція, обернена до функції* $\varphi$, *і для всіх* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконується наступна нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}, \tag{6}$$

*існує константа* $c > 0$ *така, що*

$$(\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} \le c\tau_\varphi(\xi). \tag{7}$$

**Лема 1.2.** [2] *Нехай* $\xi \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\tau_\varphi(\xi) > 0$, $\varepsilon > 0$. *Тоді виконуються такі нерівності:*

$$\mathsf{P}\{\xi > \varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathsf{P}\{\xi < -\varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathsf{P}\{|\xi| > \varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$

*де* $\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$ *– перетворення Юнга-Фенхеля функції* $\varphi$.

*Приклад* 1.1. [4] Центровані гауссові випадкові величини $\xi = N(0, \sigma^2)$ належать до простору $\mathrm{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega)$ і $\tau(\xi) = (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}}$.

*Приклад* 1.2. Нехай $\xi$ є центрованою обмеженою випадковою величиною, тобто $\mathbf{E}\xi = 0$ та існує таке число $c > 0$, що $|\xi| \le c$ майже напевно. Тоді $\xi \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ і $\tau(\xi) \le c$.

**Означення 1.4.** Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називають $\varphi$-субгауссовим, якщо випадкові величини $X(t)$, $t \in T$, є $\varphi$-субгауссовими ($X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$).

Якщо при цьому $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то такі процеси називають субгауссовими. Очевидно, що центровані гауссові випадкові процеси є і субгауссовими.

## 1.3. Випадкові процеси з класу $V(\varphi, \psi)$.

**Означення 1.5.** [11] Нехай $\varphi \prec \psi$ – дві $N$-функції Орліча. Будемо казати, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ процес $X(t)$ належить простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ та для всіх $s, t \in T$ прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

*Приклад* 1.3. [4] Субгауссові процеси належать класу $V(\varphi, \varphi)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$.

*Приклад* 1.4. [11] Нехай $X(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, де випадкова величина $\xi_0 \in \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{Sub}\varphi(\Omega)$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_\varphi(\xi_k)|f_k(t)| < \infty$. Тоді випадковий процес $X(t)$ належить класу $V(\varphi, \psi)$.

## 2. Оцінка розподілу супремуму $\gamma$-відображеного процесу з класу $V(\varphi, \psi)$

Нехай $(\mathsf{T}, \rho)$ – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) $\rho$.

Припустимо, що вхідний процес $\{X(t),\ t \in \mathsf{T}\}$ є сепарабельним випадковим процесом із $\varphi$-субгауссовими приростами, зокрема процесом із класу $V(\varphi, \psi)$, $\varphi \prec \psi$. Припустимо також, що для нього виконується умова $\Sigma$.

**Умова $\Sigma$.** Будемо казати, що для випадкового процесу $\{X(t),\ t \in \mathsf{T}\}$ виконується умова $\Sigma$, якщо знайдеться така неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$, що монотонно зростає, $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \tag{8}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)),$$

якщо процес $X(t)$ неперервний у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

**Умова $\Delta$.** Функція $\{f(t), t \in \mathsf{T}\}$ задовольняє умові $\Delta$, якщо це така неперервна функція, що монотонно зростає та

$$|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v)), \tag{9}$$

де $\{\delta(u), u \geq 0\}$ – деяка неперервна невід'ємна функція, яка монотонно зростає.

Нехай $B$ – компактна множина, $B \subseteq T$. Позначимо через $\mathsf{N}(u) = \mathsf{N}_{(B,\rho)}(u)$ метричну масивність простору $(B, \rho)$, тобто мінімальна кількість замкнених куль радіуса $u$, що покривають простір $(B, \rho)$.

Наступне твердження містить оцінку розподілу супремуму $\gamma$-відображеного процесу $W_\gamma(t)$

$$\sup_{t \in B} W_\gamma(t) = \sup_{t \in B} \left( X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s \in B:\ s \leq t} (X(s) - f(s)) \right), \gamma \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

**Лема 2.1.** *Припустимо, що для вхідного процесу $\{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi, \psi)$ $\gamma$-відображеного процесу $W_\gamma(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, виконується умова $\Sigma$, а для функції $\{f(t), t \in B\}$ – умова $\Delta$. Нехай послідовність $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $q_k > 1$ і $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{q_k} \leq 1$, а $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ – така монотонно спадна послідовність, що $\varepsilon_k > 0$ і $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, $\tau_B = \sup_{t \in B} X(t) < \infty$, $f_B = \sup_{t \in B} f(t) < \infty$ та $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \leq \sigma \left( \inf\limits_{s \in B} \sup\limits_{t \in B} \rho(t, s) \right)$. Тоді для всіх $x > 0$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \mathsf{E} \exp \left\{ \sup_{t \in B} \lambda W_\gamma(t) \right\} \leq \prod_{k=2}^\infty \left( \mathsf{L}(\varepsilon_k) \right)^{\frac{1}{q_k}} G_\gamma(\lambda) \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{k=2}^\infty \left( \frac{1}{2q_k} (\varphi(2q_k \lambda \sigma(\varepsilon_{k-1})) + \varphi(2q_k \gamma \lambda \sigma(\varepsilon_{k-1}))) + \lambda(1 + |\gamma|)\delta(\varepsilon_{k-1}) \right) \right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

*де*

$$\begin{aligned} G_\gamma(\lambda) = \Bigg( \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1} (\mathsf{N}(\varepsilon_1) - l) \times \\ \times \exp \left\{ \varphi(q_1 \lambda(\sigma(2\varepsilon_1 l) + |1 - \gamma| \tau_B)) + q_1 \lambda(\delta(2\varepsilon_1 l) + |1 - \gamma| f_B) \right\} \Bigg)^{\frac{1}{q_1}}, \end{aligned} \tag{12}$$

$\mathsf{L}(u) = \frac{(\mathsf{N}(u))^2 + \mathsf{N}(u)}{2}$.

*Доведення.* Позначимо через $V_{\varepsilon_k}$ множину центрів замкнених куль радіусу $\varepsilon_k$, яка утворює мінімальне покриття простору $(B, \rho)$. Кількість точок у множині $V_{\varepsilon_k}$ дорівнює $\mathsf{N}(\varepsilon_k)$. Позначимо також $D_A = \{(u,v)\colon u \le v,\ u,v \in A\}$, де $A$ – довільна множина.

З умови $\Sigma$ і леми 1.2 випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \\ &\quad \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(X(t) - X(s))}\right)\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\rho(t,s))}\right)\right\}. \end{aligned}$$

За припущенням процес $X(t)$ сепарабельний. Отже, $X(t)$ і, відповідно, $Y(t) = X(t) - f(t)$ неперервні за ймовірністю. Тому будь-яка зліченну скрізь щільну по відношенню до $\rho$ множину можна розглядати як множину сепарабельності цього процесу. Зокрема, множина $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ є $\rho$-сепарантою процесу $Y(t)$, і з імовірністю одиниця виконуються рівності

$$\sup_{t\in B} Y(t) = \sup_{t\in V} Y(t), \qquad \sup_{(s,t)\in D_B} (Y(t) - \gamma Y(s)) = \sup_{(s,t)\in D_V} (Y(t) - \gamma Y(s))$$

та, відповідно,

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in B} W_\gamma(t) \\ &\quad = \sup_{t\in B}\left(Y(t) - \gamma \inf_{s\in B\,:\, s\le t} Y(s)\right) = \sup_{t\in V}\left(Y(t) - \gamma \inf_{s\in V\,:\, s\le t} Y(s)\right) = \sup_{t\in V} W_\gamma(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(u), n = 0, 1, \ldots\}$ множини $V$ в $V_{\varepsilon_n}$, де $\alpha_n(u)$ – точка з множини $V_{\varepsilon_n}$ така, що $\rho(u, \alpha_n(u)) \le \varepsilon_n$. Якщо $u \in V_{\varepsilon_n}$, тоді $\alpha_n(u) = u$. Якщо ж існує кілька таких точок з множини $V_{\varepsilon_n}$, що $\rho(u, \alpha_n(u)) \le \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них за деяким правилом, таким, що не порушується умова $\alpha_n(v) \le \alpha_n(u)$ для будь-яких $v \le u$, $v, u \in V$, і позначимо її через $\alpha_n(u)$.

З нерівності Чебишова, теореми 1.1 й умови $\Sigma$ випливає, що

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{|X(u) - X(\alpha_n(u))| > p^{\frac{n}{2}}\right\} \\ &\quad \le \frac{\mathsf{E}(X(u) - X(\alpha_n(u)))^2}{p^n} \le \frac{c^2\tau_\varphi^2(X(u) - X(\alpha_n(u)))}{p^n} \le \frac{c^2\sigma^2(\varepsilon_n)}{p^n} = c^2\beta^2 p^n, \end{aligned}$$

де $c = \frac{2e}{\varphi^{(-1)}(2)}$. А це означає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|X(u) - X(\alpha_n(u))| > p^{\frac{n}{2}}\right\} < \infty$.

Із леми Бореля-Кантеллі випливає, що $X(u) - X(\alpha_n(u)) \to 0$ при $n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Оскільки функція $f$ неперервна, то і $Y(u) - Y(\alpha_n(u)) \to 0$ при $n \to \infty$ з імовірністю одиниця. Множина $V$ зліченна, отже, $X(u) - X(\alpha_n(u)) \to 0$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$ для всіх $u$ одночасно.

Нехай $(s,t) \in D_V$. Позначимо через $s_m = \alpha_m(s)$, $s_{m-1} = \alpha_{m-1}(s_m)$, …, $s_1 = \alpha_1(s_2)$ та $t_m = \alpha_m(t)$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, …, $t_1 = \alpha_1(t_2)$ для будь-якого $m \ge 1$. Тоді для всіх $m \ge 2$ виконуються такі співвідношення

$$\gamma Y(s) = \gamma Y(s_1) + \sum_{k=2}^{m}(\gamma Y(s_k) - \gamma Y(s_{k-1})) + \gamma Y(s) - \gamma Y(\alpha_m(s)),$$

$$Y(t) = Y(t_1) + \sum_{k=2}^{m}(Y(t_k) - Y(t_{k-1})) + Y(t) - Y(\alpha_m(t)),$$

і, відповідно,

$$Y(t)-\gamma Y(s)\le \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))+$$
$$+\sum_{k=2}^{m}\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v)))+$$
$$+Y(t)-\gamma Y(s)-Y(\alpha_m(t))+\gamma Y(\alpha_m(s)). \tag{14}$$

Звідси випливає, що з імовірністю одиниця

$$\sup_{t\in V}W_\gamma(t)=\sup_{t\in V}(Y(t)-\gamma\inf_{s\in V:\,s\le t}Y(s))=\sup_{(s,t)\in D_V}(Y(t)-\gamma Y(s))$$
$$\le \liminf_{m\to\infty}\Big(\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))$$
$$+\sum_{k=2}^{m}\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v)))$$
$$+Y(t)-\gamma Y(s)-Y(\alpha_m(t))+\gamma Y(\alpha_m(s))\Big). \tag{15}$$

Із нерівностей Гельдера і (15) та леми Фату для всіх $\lambda>0$ маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in V}W_\gamma(t)\right\}=\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{(s,t)\in D_V}(Y(t)-\gamma Y(s))\right\}$$
$$\le \mathsf{E}\liminf_{m\to\infty}\exp\left\{\lambda\Big(\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{m}\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}\Big(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v))\Big)\Big)\right\}$$
$$\le \liminf_{m\to\infty}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\Big(\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{m}\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}\Big(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v))\Big)\Big)\right\}$$
$$\le \liminf_{m\to\infty}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\times$$
$$\times\prod_{k=2}^{m}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}\Big(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v))\Big)\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}$$
$$\le\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}}(Y(u)-\gamma Y(v))\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\times$$
$$\times\prod_{k=2}^{\infty}\left(\mathsf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}\Big(Y(u)-\gamma Y(v)-Y(\alpha_{k-1}(u))+\gamma Y(\alpha_{k-1}(v))\Big)\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}$$
$$=(J_1)^{\frac{1}{q_1}}\cdot\prod_{k=2}^{\infty}(J_k)^{\frac{1}{q_k}}. \tag{16}$$

Розглянемо окремо кожен множник у правій частині (16). Із теореми 1.1 й умови $\Sigma$ випливає, що

$$\mathsf{E}\exp\{q_1\lambda(X(u)-\gamma X(v))\} \le \exp\{\varphi(q_1\lambda\tau_\varphi(X(u)-\gamma X(v)))\}$$

$$= \exp\{\varphi(q_1\lambda\tau_\varphi(X(u)-X(v)+(1-\gamma)X(v)))\} \le \exp\left\{\varphi(q_1\lambda\sigma(\rho(u,v))+|1-\gamma|\tau_B)\right\}.$$

Тоді, використовуючи умову $\Delta$, маємо

$$\begin{aligned} J_1 &\le \sum_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} \mathsf{E}\exp\Big\{q_1\lambda(X(u)-\gamma X(v))\Big\}\exp\Big\{q_1\lambda(f(v)-\gamma f(u))\Big\} \qquad (17)\\ &\le \sum_{(v,u)\in V_{\varepsilon_1}} \exp\Big\{\varphi(q_1\lambda(\sigma(\rho(v,u))+|1-\gamma|\tau_B))+q_1\lambda(\delta(\rho(v,u))+|1-\gamma|f_B)\Big\}\\ &= \sum_{i=1}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}\sum_{j=1}^{i}\exp\Big\{\varphi(q_1\lambda\sigma(2\varepsilon_1(i-j))+|1-\gamma|\tau_B)+q_1\lambda(\delta(2\varepsilon_1(i-j))+|1-\gamma|f_B)\Big\}\\ &= \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-l)\exp\Big\{\varphi(q_1\lambda(\sigma(2\varepsilon_1 l)+|1-\gamma|\tau_B)+q_1\lambda(\delta(2\varepsilon_1 l)+|1-\gamma|f_B)\Big\}. \end{aligned}$$

Далі, з теореми 1.1, нерівності Коші-Буняковського й умови $\Sigma$ маємо, що

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\exp\{q_k\lambda(X(u)-\gamma X(v)-X(\alpha_{k-1}(u))+\gamma X(\alpha_{k-1}(v)))\}\\ &\quad\le\Big(\mathsf{E}\exp\Big\{2q_k\lambda(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u)))\Big\}\mathsf{E}\exp\Big\{2q_k\lambda\gamma(X(\alpha_{k-1}(v))-X(v))\Big\}\Big)^{\frac12}\\ &\quad\le\exp\left\{\frac12\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))+\frac12\varphi(2q_k\gamma\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))\right\}. \qquad (18) \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} J_k &\le \sum_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}}\mathsf{E}\exp\Big\{q_k\lambda\Big(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))-\gamma X(v)+\gamma X(\alpha_{k-1}(v))\Big)\Big\}\times\\ &\quad\times\exp\Big\{q_k\lambda(f(u)-f(\alpha_{k-1}(u)))\Big\}\exp\Big\{q_k\lambda\gamma(f(\alpha_{k-1}(v))-f(v))\Big\}\\ &\le\frac{\mathsf{N}(\varepsilon_k)^2+\mathsf{N}(\varepsilon_k)}{2}\exp\Big\{\frac12\varphi(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1}))+\frac12\varphi(2q_k\lambda\gamma\sigma(\varepsilon_{k-1}))\\ &\quad+q_k\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}\delta(\rho(u,\alpha_{k-1}(u)))+q_k|\gamma|\lambda\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}\delta(\rho(u,\alpha_{k-1}(u)))\Big\}\\ &\le\mathsf{L}(\varepsilon_k)\exp\Big\{\frac12\varphi\big(2q_k\lambda\sigma(\varepsilon_{k-1})\big)+\frac12\varphi\big(2q_k\lambda\gamma\sigma(\varepsilon_{k-1})\big)+q_k\lambda(1+|\gamma|)\delta(\varepsilon_{k-1})\Big\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Нарешті, з нерівностей (16)–(19) отримуємо твердження леми. □

*Зауваження* 2.1. Вираз $J_1$ у нерівності (17) можна оцінити іншими простішими способами, отримуючи відповідно дві грубші оцінки для $G_\gamma(\lambda)$ з (12):

$$G_\gamma(\lambda)\le\big(\mathsf{L}(\varepsilon_1)\big)^{\frac{1}{q_1}}\exp\left\{\frac{1}{q_1}\varphi(q_1\gamma\lambda\sigma(2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1)))+\lambda\gamma\delta(2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1))\right\}, \qquad (20)$$

чи так:

$$G_\gamma(\lambda)^{q_1}\le\int_0^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-x)\exp\Big\{\varphi(q_1\lambda\gamma\sigma(2\varepsilon_1 x))+q_1\lambda\gamma\delta(2\varepsilon_1 x)\Big\}\mathsf{d}x. \qquad (21)$$

**Теорема 2.1.** *Нехай для вхідного процесу $\{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi, \psi)$ $\gamma$-відображеного процесу $W_\gamma(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, виконується умова $\Sigma$, а для функції $\{f(t), t \in B\}$ – умова $\Delta$, і*

$$\int_0^\beta \zeta_\varphi \left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right) \mathsf{d}u < \infty, \tag{22}$$

*де $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$, $\mathsf{L}(u) = \frac{(\mathsf{N}(u))^2 + \mathsf{N}(u)}{2}$. Нехай також $\tau_B = \sup_{t\in B} X(t) < \infty$, $f_B = \sup_{t\in B} f(t) < \infty$ та $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf\limits_{s\in B}\sup\limits_{t\in B}\rho(t,s)\right)$. Тоді для всіх $x > 0$ та $p \in (0,1)$ виконуються нерівності*

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in B} W_\gamma(t) > x\Big\} \le \inf_{\lambda>0} \Bigg( & G_1(\lambda,\gamma,p)\times \\
& \times \exp\left\{\frac{(1+|\gamma|)p}{2}\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \frac{2\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\beta p^2} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)\mathsf{d}u\right\}\times \\
& \times \exp\left\{\lambda(1+|\gamma|)\sum_{k=1}^\infty \delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right) - \lambda x\right\}\Bigg), \qquad |\gamma| \le 1,
\end{aligned} \tag{23}$$

*та*

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in B} W_\gamma(t) > x\Big\} \le \inf_{\lambda>0} \Bigg( & G_1(\lambda,\gamma,p)\times \\
& \times \exp\left\{\frac{(1+|\gamma|)p}{2|\gamma|}\varphi\left(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\right) + \frac{2\lambda|\gamma|}{p(1-p)}\int_0^{\beta p^2} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right)\mathsf{d}u\right\}\times \\
& \times \exp\left\{\lambda(1+|\gamma|)\sum_{k=1}^\infty \delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right) - \lambda x\right\}\Bigg), \qquad |\gamma| > 1,
\end{aligned} \tag{24}$$

*де*

$$\begin{aligned}
G_1(\lambda,\gamma,p) = \inf_{v\ge\frac{1}{1-p}} \Bigg( & \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1} \left(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) - l\right)\times \\
& \times \exp\left\{\varphi(\lambda v(\sigma(2l\sigma^{(-1)}(\beta p)) + |1-\gamma_B|\tau_B)) + \lambda v(\delta(2l\sigma^{(-1)}(\beta p)) + |1-\gamma| f_B)\right\}\Bigg)^{\frac{1}{v}}.
\end{aligned}$$

*Доведення.* Використаємо послідовності $q_k$ та $\varepsilon_k$ із леми 2.1, визначені наступним чином. Нехай $q_1 = v$, де $v$ – таке число, що $v \ge \frac{1}{1-p}$, тоді $q_1 > 1$, і нехай

$$q_k = \frac{1}{2\lambda\beta p^{k-1}}\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \ln(\mathsf{L}(\varepsilon_k))\right),\ k = 2,3,\ldots, \tag{25}$$

де

$$\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\beta p^k), \quad p \in (0,1), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{26}$$

Тоді

$$q_k \ge \frac{1}{p^{k-1}(1-p)} > 1 \quad \text{та} \quad \frac{1}{q_k} \le \frac{2\lambda\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)\right)} = p^{k-1}(1-p),\ k = 2,3,\ldots,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{q_k} \le \sum_{k=1}^\infty p^{k-1}(1-p) = 1.$$

Отже, така послідовність задовольняє умові леми 2.1. Застосуємо її до нерівності (11), розглянувши спершу частину виразу справа, коли $|\gamma| \leq 1$.

$$\tilde{Z} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \Big( \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big) + \frac{1}{2}\varphi\big(2\lambda\beta p^{k-1} q_k\big) + \frac{1}{2}\varphi\big(2\lambda\gamma\beta p^{k-1} q_k\big)\Big).$$

Із леми 1.1 випливає, що $\varphi(\gamma x) \leq |\gamma|\varphi(x)$, коли $\gamma \in [-1,1]$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \varphi\left(2\lambda\beta p^{k-1} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\Big(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\Big) + \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big)\right)}{2\lambda\beta p^{k-1}}\right) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \varphi\left(2\lambda\gamma\beta p^{k-1} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\Big(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\Big) + \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big)\right)}{2\lambda\beta p^{k-1}}\right) \qquad (27)\\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big) + \frac{1+|\gamma|}{2}\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big) \frac{2\lambda\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\big(\ln\big(\mathsf{L}(\varepsilon_k)\big)\big)} + \frac{1+|\gamma|}{2}\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1}(1-p) \\
&= \frac{(1+|\gamma|)p}{2}\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + 2\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}\big(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\big)\right)\right)\beta p^{k-1}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Функція $\frac{\varphi(x)}{x}$ зростає при $x > 0$, тому функція $\zeta_\varphi(x) = \frac{x}{\varphi^{(-1)}(x)}$ також зростає при $x > 0$. Тоді

$$\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right) \mathsf{d}u \geq \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(\beta p^k))\right)\right)\beta p^k(1-p). \qquad (29)$$

З (27) і (29) випливає, що

$$\tilde{Z} \leq \frac{(1+|\gamma|)p}{2}\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \frac{2\lambda}{p(1-p)} \int_0^{\beta p^2} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\mathsf{L}(\sigma^{(-1)}(u))\right)\right) \mathsf{d}u. \qquad (30)$$

Таким чином, нерівність (23) випливає з (11) і (30).

Розглянемо тепер випадок $|\gamma| > 1$. Нехай тепер

$$q_k = \frac{1}{2\lambda\gamma\beta p^{k-1}} \varphi^{(-1)}\left(\varphi\Big(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\Big) + \ln(\mathsf{L}(\varepsilon_k))\right),\ k = 2,3,\ldots \qquad (31)$$

Як бачимо, така послідовність теж задовольняє умові леми 2.1:

$$q_k \geq \frac{1}{p^{k-1}(1-p)} > 1 \quad \text{та} \quad \frac{1}{q_k} \leq \frac{2\lambda\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)\right)} = p^{k-1}(1-p),\ k = 2,3,\ldots$$

Отже, враховуючи, що $\varphi(x/\gamma) \le \varphi(x)/|\gamma|$, коли $|\gamma| > 1$, матимемо

$$\tilde{Z}_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \ln\big(L(\varepsilon_k)\big) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \varphi\left(2\lambda\beta p^{k-1} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\Big(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\Big) + \ln\big(L(\varepsilon_k)\big)\right)}{2\lambda\gamma\beta p^{k-1}}\right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \varphi\left(2\lambda\gamma\beta p^{k-1} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\varphi\Big(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\Big) + \ln\big(L(\varepsilon_k)\big)\right)}{2\lambda\gamma\beta p^{k-1}}\right) \tag{32}$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \ln\big(L(\varepsilon_k)\big) + \frac{1+|\gamma|}{2|\gamma|} \varphi\left(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k}$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \ln\big(L(\varepsilon_k)\big) \frac{2\lambda|\gamma|\beta p^{k-1}}{\varphi^{(-1)}\big(\ln\big(L(\varepsilon_k)\big)\big)} + \frac{1+|\gamma|}{2} \varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1}(1-p)$$

$$= \frac{(1+|\gamma|)p}{2|\gamma|} \varphi\left(\frac{2\lambda\gamma\beta}{1-p}\right) + 2\lambda|\gamma| \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_\varphi\left(\ln\Big(L\big(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\big)\Big)\right) \beta p^{k-1}. \tag{33}$$

Тепер (24) отримуємо з (11) і (32).

□

Використовуючи у нерівності (11) леми 2.1 послідовність $q_k = (1-p)^{-1} p^{1-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, отримуємо такий наслідок, умови якого легші для перевірки, ніж умови теореми 2.1.

**Теорема 2.2.** *Нехай для вхідного процесу $\{X(t), t \in B\}$ із класу $V(\varphi, \psi)$ $\gamma$-відображеного процесу $W_\gamma(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, виконується умова $\Sigma$, а для функції $\{f(t), t \in B\}$ – умова $\Delta$, і нехай $r = \{r(u), u \ge 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$, коли $u > 1$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \ge 0$, — опукла. Нехай також $\tau_B = \sup_{t\in B} X(t) < \infty$, $f_B = \sup_{t\in B} f(t) < \infty$ та $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf_{s\in B} \sup_{t\in B} \rho(t,s)\right)$. Тоді за виконання умови*

$$\int_0^\beta r\left(L\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) \mathrm{d}u < \infty, \tag{34}$$

*де $L(u) = \frac{(N(u))^2 + N(u)}{2}$, для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ справджується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in B} W_\gamma(t) > x\right\} \le r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r\left(L\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) \mathrm{d}u\right) \times \tag{35}$$

$$\times \inf_{\lambda>0} G_\gamma(\lambda, p) \exp\left\{\frac{p}{2}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda p}{1-p}\right) + \varphi\left(\frac{2\lambda\gamma p}{1-p}\right)\right) + \lambda(1+|\gamma|) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)) - \lambda x\right\},$$

*де*

$$G_\gamma(\lambda, p) = \left(\sum_{l=0}^{N(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1} (N(\sigma^{(-1)}(\beta p)) - l) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}(\sigma(2\sigma^{(-1)}(\beta p) l) + |1-\gamma|\tau_B\right) + \frac{\lambda}{1-p}\left(\delta\left(2\sigma^{(-1)}(\beta p) l\right) + |1-\gamma| f_B\right)\right\}\right)^{1-p}.$$

*Доведення.* Легко бачити, що послідовності $q_k = (1-p)^{-1}p^{1-k}$ та $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\beta p^k)$ задовольняють умові леми 2.1. Тоді

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in B} W_\gamma(t)\right\} \\
&\quad\le \exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1-p)p^{k-1}}{2}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda p}{1-p}\right)+\varphi\left(\frac{2\lambda\gamma p}{1-p}\right)\right)+\lambda(1+|\gamma|)\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right)\right\}\times \\
&\quad\times\Bigg(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1}(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-l)\times \\
&\quad\times\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}(\sigma(2\sigma^{(-1)}(\beta p)l)+|1-\gamma|\tau_B)\right)+\frac{\lambda}{1-p}(\delta(2\sigma^{(-1)}(\beta p)l)+|1-\gamma|f_B)\right\}\Bigg)^{1-p}\times \\
&\quad\times\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log \mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log \mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\} \\
&\quad= r^{(-1)}\left(r\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log \mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}\right)\right) \\
&\quad\le r^{(-1)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\right) \\
&\quad\le r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right), \qquad (37)
\end{aligned}$$

твердження наслідку випливає з (36) та нерівності Чебишова. □

## 3. $\gamma$-ВІДОБРАЖЕНИЙ ПРОЦЕС ІЗ СУБГАУССОВИМ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ ВХОДОМ

Припустимо, що $X_H(t) = \{X(t), t\in[a,b]\}$ — це узагальнений субгауссовий процес дробового броунівського руху, визначений на відрізку $[a,b]$, $0\le a<b<\infty$, тоді для нього має місце нерівність [18]

$$\tau(X_H(t)-X_H(s)) \le |t-s|^H, \quad H\in(0,1), \qquad (38)$$

тобто умова $\Sigma$ виконується для цього процесу при $\sigma(h)=h^H$.

Нехай $f(t)$ – лінійна функція, визначена на $[a,b]$, тобто $f(t)=ct$, де $c>0$ – деяка стала. Тоді з наслідку 2.2, можна отримати наступну оцінку ймовірності банкруства $\Psi_{\gamma,\mathsf{T}}(x)$.

**Теорема 3.1.** *Припустимо, що для вхідним процесом $\gamma$-відображеного процесу $\{W_\gamma(t), t\in[a,b]\}$, $\gamma\in\mathbb{R}$, є узагальнений субгауссовий випадковий процес дробового* *броунівського руху. Тоді для всіх* $p \in \left(0; \left(\frac{2}{3}\right)^H\right]$ *і* $x > 0$ *має місце оцінка*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[a,b]} W_\gamma(t) > x\right\} \le \frac{(b-a)^{2+\frac{2}{H}}(pe)^{\frac{2}{H}}}{2^{1+\frac{2}{H}}}\left(1-\frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{p^{-\frac{1}{H}}}\left(p^{-\frac{1}{H}}+1-l\right)\times\right.$$
$$\left.\times \exp\left\{-\frac{\left(\frac{(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})}+c\left((b-a)p^{\frac{1}{H}}l+|1-\gamma|\right)-x\right)^2}{2\left(\frac{2(1+\gamma^2)p^3}{1-p}+(b-a)^H p l^H+|1-\gamma|b^H\right)}\right\}\right)^{1-p}. \quad (39)$$

*Доведення.* Скористаємось теоремою 2.2, коли $\rho$ – звичайна Евклідова метрика. Покладемо $\beta = (\frac{b-a}{2})^H$. Розглянемо почергово частини виразу (35) справа.

Нехай $r(u) = u^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{H}{2}$. Легко бачити, що коли $p \le \left(\frac{2}{3}\right)^H$, то $\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} > \frac{3}{2}$, бо $u \le \left(\frac{2}{3}\right)^H\left(\frac{b-a}{2}\right)^H \le p\beta$. Тоді має місце така низка нерівностей

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)$$
$$\le \left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\left(\left(\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}}+1\right)^2+\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}}+1\right)^\alpha/2^\alpha \mathsf{d}u\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\left(\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}}+\frac{3}{2}\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p}\left(\frac{b-a}{u^{\frac{1}{H}}}\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}(\beta p)^{\frac{2}{H}}\left(1-\frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{(b-a)^{2+\frac{2}{H}}p^{\frac{2}{H}}}{2^{1+\frac{2}{H}}}\left(1-\frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Звідси

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right) \to \frac{(b-a)^{2+\frac{2}{H}}(pe)^{\frac{2}{H}}}{2^{1+\frac{2}{H}}}\left(1-\frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \to 0. \quad (40)$$

Далі,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)) = \sum_{k=1}^{\infty} c(\beta p^k)^{\frac{1}{H}} = \frac{c\beta^{\frac{1}{H}}p^{\frac{1}{H}}}{1-p^{\frac{1}{H}}} = \frac{c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})}$$

і, відповідно,

$$\exp\left\{\left(\frac{p}{2}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda p}{1-p}\right)+\varphi\left(\frac{2\lambda\gamma p}{1-p}\right)\right)+\lambda(1+|\gamma|)\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k))\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2(1+\gamma^2)p^3}{(1-p)^2}+\lambda(1+|\gamma|)\frac{c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})}\right\}. \quad (41)$$

Отже, використовуючи (41) та оцінку метричної масивності $N(u) \le \frac{b-a}{2u} + 1$, матимемо

$$\inf_{\lambda>0} \exp\left\{\frac{p}{2}\left(\varphi\left(\frac{2\lambda p}{1-p}\right) + \varphi\left(\frac{2\lambda\gamma p}{1-p}\right)\right) + \lambda(1+|\gamma|)\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)) - \lambda x\right\} G_\gamma(\lambda, p)$$
$$= \inf_{\lambda>0} \exp\left\{\frac{\lambda^2(1+\gamma^2)p^3}{(1-p)^2} + \frac{\lambda(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})} - \lambda x\right\} \times$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^{\frac{1}{H}}\right)-1}\left(\frac{b-a}{2(\beta p)^{\frac{1}{H}}} + 1 - l\right)\times\right.$$
$$\left.\times \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{1-p}(2^H\beta p l^H + |1-\gamma| b^H)\right)^2 + \frac{\lambda}{1-p}\left(c\left(2(\beta p)^{\frac{1}{H}} l\right) + |1-\gamma| c\right)\right\}\right)^{1-p}$$

$$\le \left(\sum_{l=0}^{N\left((b-a)p^{\frac{1}{H}}/2\right)-1}\left(p^{-\frac{1}{H}} + 1 - l\right)\times\right.$$
$$\times \inf_{\lambda>0}\exp\left\{\frac{\lambda^2(1+\gamma^2)p^3}{(1-p)^3} + \frac{\lambda(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})(1-p)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^2\left((b-a)^H p l^H + |1-\gamma| b^H\right)^2 + \frac{\lambda}{1-p}\left(c\left((b-a)p^{\frac{1}{H}} l\right) + |1-\gamma| c\right)\right\}\right)^{1-p}$$
$$\le \left(\sum_{l=0}^{p^{-\frac{1}{H}}}\left(p^{-\frac{1}{H}} + 1 - l\right)\times\right.$$
$$\times \inf_{\lambda>0}\exp\left\{\frac{\lambda^2}{(1-p)^2}\left(\frac{(1+\gamma^2)p^3}{1-p} + \frac{1}{2}\left((b-a)^H p l^H + |1-\gamma| b^H\right)\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{1-p}\left(\frac{(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})} + c\left((b-a)p^{\frac{1}{H}} l + |1-\gamma|\right) - x\right)\right\}\right)^{1-p}$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{p^{-\frac{1}{H}}}\left(p^{-\frac{1}{H}} + 1 - l\right)\times\right.$$
$$\left.\times \exp\left\{-\frac{\left(\frac{(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})} + c\left((b-a)p^{\frac{1}{H}} l + |1-\gamma|\right) - x\right)^2}{2\left(\frac{2(1+\gamma^2)p^3}{1-p} + (b-a)^H p l^H + |1-\gamma| b^H\right)}\right\}\right)^{1-p}.$$

З останньої нерівності та (40) і випливає твердження теореми. □

*Зауваження* 3.1. Зокрема, легко бачити, що при $p \in \left(\frac{1}{2^H}, \frac{2^H}{3^H}\right]$ сума в (39) має лише один доданок, тобто

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{t\in[a,b]} W_\gamma(t) > x \Big\} \le \frac{(b-a)^{2+\frac{2}{H}}(pe)^{\frac{2}{H}}}{2^{1+\frac{2}{H}}} \left(1 - \frac{2\alpha}{H}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(p^{-\frac{1}{H}} + 1\right)^{1-p} \times$$
$$\times \exp\left\{ - \frac{(1-p)\left(\frac{(1+|\gamma|)c(b-a)p^{\frac{1}{H}}}{2(1-p^{\frac{1}{H}})} + c\left((b-a)p^{\frac{1}{H}} l + |1-\gamma|\right) - x\right)^2}{2\left(\frac{2(1+\gamma^2)p^3}{1-p} + (b-a)^H p l^H + |1-\gamma| b^H\right)} \right\}.$$

При $p \in \left(3^{-H}, 2^{-H}\right]$ сума в (39) матиме два доданки і т.д.

## Висновки

У роботі досліджуються властивості випадкових процесів із $\varphi$-субгауссовими приростами, зокрема процесів із загального класу $V(\varphi, \psi)$, $\varphi \prec \psi$. Отримано оцінки розподілу супремуму відповідного $\gamma$-відображеного процесу, зокрема

$$\sup_{t\in B} W_\gamma(t) = \sup_{t\in B}\left( X(t) - f(t) - \gamma \inf_{s\in B}(X(s) - f(s))\right), \quad \gamma \in [0,1]$$

де $f(t)$ – неперервна монотонно зростаюча функція. Одержані результати можуть бути застосовані до широкого класу випадкових процесів, зокрема, гауссових. Як приклад, наведено відповідну оцінку для $\gamma$-відображеного узагальненого субгауссового процесу дробового броунівського руху.

## Література


1. H. Albreher and J. Ivanovs, *Power identities for Lévy risk models under taxation and capital injections*, Stochastic Systems **4** (2014), no. 1, 157–172.
2. В. Булдыгин, *Сходимость случайных элементов в топологических пространствах*, "Наукова думка", Киев, 1980.
3. V. Buldygin and Yu. Kozachenko, *Sub-Gaussian random vectors and processes*, Theory Probab. Math. Stat. **36** (1988), 9–20.
4. V. Buldygin and Yu. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
5. K. Debicki and M. Mandjes, *Exact overflow asymptotics for queues with many Gaussian inputs*, Journal of Applied Probability **40** (2003), 704–720.
6. E. Hashorva, L. Ji, and V. Piterbarg, *On the supremum of gamma-reflected processes with fractional Brownian motion as input*, Stochastic Processes and their Applications **123(11)** (2014), 4111–4127.
7. J. P. Kahane, *Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories*, Studia Math. **19**, (1960), no. 1, 1–25.
8. Yu. Kozachenko and E. Ostrovskii, *Banach spaces random variables of subGaussian type*, Probability Theory and Math. Statistics **32** (1986), 45–56.
9. Yu. Kozachenko and O. Vasylyk, *Random processes from classes* $V(\varphi, \psi)$, Probability Theory and Math. Statistics **63** (2000), 100–111.
10. Yu. Kozachenko, O. Vasylyk, and R. Yamnenko, *Upper estimate of overrunning by* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *random process the level specified by continuous function*, Random Oper. and Stoch. Equ. **13** (2005), no. 2, 111–128.
11. Ю. Козаченко, О. Василик, Р. Ямненко, *$\varphi$-субгауссові випадкові процеси*, ВПЦ "Київський університет", Київ, 2008.
12. Yu. Kozachenko and R. Yamnenko, *Application of $\varphi$-sub-Gaussian random processes in queuing theory*, Modern Trends in Stochastics, Springer Optimization and Its Applications vol. 90, Springer, Berlin, 2014, pp. 21–38.
13. V. I. Piterbarg, *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields*, Transl. Math. Monographs, vol. 148, AMS, Providence, RI. 1996.
14. R. Yamnenko, *Bounds for the distribution of some functionals of processes with $\varphi$-sub-Gaussian increments*, Theory Probab. Math. Stat. **85** (2012), 181–197.

15. R. Yamnenko, *On distribution of the norm of deviation of a sub-Gaussian random process in Orlicz spaces*, Random Operators and Stochastic Equations **23** (2015), no. 3, 187–194.
16. R. Yamnenko and O. Vasylyk, *Random process from the class $V(\varphi,\psi)$: exceeding a curve*, Theory of Stochastic Processes **13 (29)** (2007), no. 4, 219–232.
17. R. Yamnenko and O. Shramko, *On the distribution of storage processes from the class $V(\varphi,\psi)$*, Theory Probab. Math. Stat. **83** (2011), 191–206.
18. R. Yamnenko, Yu. Kozachenko, and D. Bushmitch, *Generalized sub-Gaussian fractional Brownian motion queueing model*, Queueing Systems **77(1)** (2014), 75–96.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ-01601, Україна

*Адреса електронної пошти*: yamnenko@univ.kiev.ua

Надійшла 21/03/2016