Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 1–15

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 1–15

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

УДК 519.21

І. М. БОДНАРЧУК

Анотація. Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння на прямій, породженого загальною стохастичною мірою. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку. Встановлено неперервну залежність розв'язку від даних задачі.

Abstract. The Cauchy problem for a wave equation on the line, driven by a general stochastic measure is investigated. The existence, uniqueness and Hölder regularity of the mild solution are proved. Continuous dependence of the solution on data is established.

Аннотация. Исследуется задача Коши для волнового уравнения на прямой, управляемого общей стохастической мерой. Доказано существование, единственность и непрерывность по Гельдеру мягкого решения. Установлено непрерывную зависимость решения от данных задачи.

1. Вступ

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ — σ-алгебра підмножин з X; $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це збіжність за ймовірністю. Нехай також μ — стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, тобто, σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. В [1] таке μ називається загальною стохастичною мірою.

Розглядаємо наступну задачу Коші для хвильового рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x); \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0$, $a > 0$, та μ — стохастична міра, визначена на $\mathcal{B}([0,T])$.

Наша мета — довести коректність даної задачі та дослідити регулярність її м'якого розв'язку (див. рівність (2) нижче).

В [2] розглянуто подібну задачу для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Властивості м'яких розв'язків рівнянь теплопровідності зі стохастичними мірами вивчено в [3]–[5]. Стохастичні хвильові рівняння, породжені гауссівськими процесами досліджено в статтях [6, 7].

Дана робота побудована наступним чином. Основний результат (теореми 2.1 та 2.2) сформульовано в пункті 2. Пункт 3 містить додаткові відомості та попередні оцінки. Далі розглянуто допоміжні твердження, що використовуються при доведенні основного результату. А саме, для інтеграла за стохастичною мірою з рівності (2) показано виконання умови Гельдера окремо за просторовою та часовою змінними (лема 4.1 та лема 5.1 відповідно). Доведення теорем 2.1 та 2.2 представлено в пункті 6. Останній пункт містить висновки щодо проведеного дослідження.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60G17, 60G57.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, м'який розв'язок, умова Гельдера, простір Бєсова.

2. Формулювання основного результату

Розглядаємо м'який розв'язок задачі (1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, що

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} S(t,x-y)u_0(y)\,dy\right) + \int_{\mathbb{R}} S(t,x-y)v_0(y)\,dy$$
$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} S(t-s,x-y) f(s,y,u(s,y))\,dy$$
$$+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}} S(t-s,x-y)\sigma(s,y)\,dy.$$

Тут $S(t,x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{\{|x|<at\}}$ — фундаментальний розв'язок хвильового рівняння (1). Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega\in\Omega$ (див. [8, глава 3]). В [1, розділ 7] та [8] для невипадкової вимірної функції $g\colon \mathsf{X}\to\mathbb{R}$ визначений та досліджений інтеграл виду $\int_{\mathsf{X}} g\,d\mu$. Зокрема, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна за μ. Крім того, для такого інтеграла справедливий аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність [1, твердження 7.1.1] або [8, пункт 1.1.1, наслідок].

У статті [9] визначено інтеграл за стохастичною мірою для випадкової функції та досліджено його властивості.

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+at) - u_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)\,dy$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))\,dy + \frac{1}{2a}\int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy. \tag{2}$$

Далі будемо розглядати наступні припущення.

A1. Функції $u_0(y) = u_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$, $v_0(y) = v_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega\in\Omega\colon$ $|u_0(y,\omega)|\le C(\omega)$, : $|v_0(y,\omega)|\le C(\omega)$.

A2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \le C(\omega)\,|y_1-y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) > 0\,.$$

A3. $f(s,y,v)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)|\le C$.

A4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $v\in\mathbb{R}$: $|f(s,y,v_1) - f(s,y,v_2)| \le C\,|v_1-v_2|$.

A5. $\sigma(s,y)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

A6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером

$$|\sigma(s_1,y_1) - \sigma(s_2,y_2)| \le C\big(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}\big), \qquad 1/2 < \beta(\sigma) \le 1.$$

A7. $|\mu((0,t])| \le C(\omega), \quad \forall t\in(0,T]$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

Також відмітимо, що $|\cdot|$ позначає евклідову норму.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються припущення* A1–A6. *Тоді*

1) Рівняння (2) має єдиний розв'язок $u(t,x)$ з точністю до м.н. для всіх $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}$.

2) Якщо також справджується A7, *то для будь-яких фіксованих $\delta>0$, $K>0$ та γ_1, $\gamma_2\in[0,\beta(u_0)]$ таких, що $\gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2 < 1/2$, стохастична функція $u(t,x)$ має модифікацію $\bar u(t,x)$, для якої виконується*

$$|\bar u(t_1,x_1) - \bar u(t_2,x_2)| \le C(\omega)\left(|t_1-t_2|^{\gamma_2} + |x_1-x_2|^{\gamma_1}\right), \qquad t_i\in[\delta,T],\ |x_i|\le K, i=1,2.$$

Нехай крім (1) маємо наступні задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + f_j(t,x,u_j(t,x)) + \sigma_j(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u_j(0,x) = u_{0j}(x); \quad \frac{\partial u_j(0,x)}{\partial t} = v_{0j}(x), \end{cases}$$

де $j \geq 1$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0$, $a > 0$, а розв'язки розглядаються у м'якому сенсі, тобто,

$$\begin{aligned} u_j(t,x) &= \frac{1}{2}\left(u_{0j}(x+at) - u_{0j}(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_{0j}(y)\,dy \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f_j(s,y,u_j(s,y))\,dy + \frac{1}{2a}\int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma_j(s,y)\,dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Для даних рівнянь розглядатимемо наступні припущення.

A1*. Функції $u_{0j}(y) = u_{0j}(y,\omega)\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, $v_{0j}(y) = v_{0j}(y,\omega)\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_{0j}(y,\omega)| \leq C(\omega),\ :\ |v_{0j}(y,\omega)| \leq C(\omega)$.

A2*. $u_{0j}(y)$ неперервна за Гельдером

$$|u_{0j}(y_1) - u_{0j}(y_2)| \leq C(\omega)\,|y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) > 0\,.$$

A3*. $f_j(s,y,v)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f_j(s,y,v)| \leq C$.

A4*. $f_j(s,y,v)$ ліпшицева за $v \in \mathbb{R}$: $|f_j(s,y,v_1) - f_j(s,y,v_2)| \leq C\,|v_1 - v_2|$.

A5*. $\sigma_j(s,y)\colon [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma_j(s,y)| \leq C$.

A6*. $\sigma_j(s,y)$ неперервна за Гельдером

$$|\sigma_j(s_1,y_1) - \sigma_j(s_2,y_2)| \leq C\big(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}\big), \qquad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

Зауважимо, що тут константи C та $C(\omega)$ спільні для всіх $j \geq 1$.

Теорема 2.2. *Нехай для довільного $j \geq 1$ елементи рівнянь (2) та (3) задовольняють припущення* A1–A7 *та* A1*–A6*, A7 *відповідно. Нехай також*

$$\begin{gathered} U_j = \sup_{y\in\mathbb{R}} |u_{0j}(y) - u_0(y)| \to 0 \quad \textit{м.н.}, \qquad V_j = \sup_{y\in\mathbb{R}} |v_{0j}(y) - v_0(y)| \to 0 \quad \textit{м.н.}, \\ \Sigma_j = \sup_{(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y)| \to 0, \\ F_j = \sup_{(s,y,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f_j(s,y,v) - f(s,y,v)| \to 0, \qquad j \to \infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Тоді для довільного $\delta > 0$ виконується

$$|u_j(t,x) - u(t,x)| \to 0, \quad j \to \infty \quad \textit{м.н.}, \quad \forall\,(t,x) \in [\delta,T]\times\mathbb{R}.$$

3. Додаткові відомості

Розглянемо простір Бєсова $B_{22}^{\alpha}([b,c])$, $\alpha \in (1/2,1)$, тобто, простір функцій, для яких скінченною є норма

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} = \|g\|_{\mathsf{L}_2([b,c])} + \Big(\int_0^{c-b} \big(w_{2,[b,c]}(g,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\Big)^{1/2},$$

де

$$w_{2,[b,c]}(g,r) = \sup_{0\leq h\leq r} \left(\int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Для норм просторів Бєсова на множинах $[0,1]$ та $[b,c]$ справедливе наступне співвідношення (див. [5, нерівність (4)]). Нехай $g(z,\tau)\colon Z\times[b,c] \to \mathbb{R}$, Z — довільна множина. Тоді $g(z,b+(c-b)s)\colon Z\times[0,1]\to\mathbb{R}$ та має місце нерівність

$$\underline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([b,c])}\le\|g(z,b+(c-b)\,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([0,1])}\le\overline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([b,c])},$$
$$\underline{C}_{c-b}=(c-b)^{-1/2}((c-b)^\alpha\wedge 1),\qquad \overline{C}_{c-b}=(c-b)^{-1/2}((c-b)^\alpha\vee 1).$$

Зауважимо, що при $c-b=1$

$$\|g(z,b+(c-b)\,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([0,1])}=\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([b,c])}.$$

Покладемо для довільного $t\in[0,T]$

$$\Delta^{(t)}_{kn}=((k-1)2^{-n}t,k2^{-n}t],\qquad n\ge 0,\ 1\le k\le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s)\colon Z\times[0,T]\to\mathbb{R}$ така, що $\forall z\in Z\colon g(z,\cdot)$ неперервна на $[0,T]$. Тут $Z=Z_0\times[0,T]$, Z_0 — довільна множина, а $z=(z_0,t)$. Позначимо

$$g_n(z,s)=g(z,0)\mathbb{1}_{\{0\}}(s)+\sum_{1\le k\le 2^n}g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\mathbb{1}_{\Delta^{(T)}_{kn}}(s).$$

Тоді за [10, Лема 3] випадкова функція

$$\eta(z)=\int_{(0,t]}g(z,s)\,d\mu(s),\qquad z\in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z)=\int_{(0,t]}g_0(z,s)\,d\mu(s)+\sum_{n\ge1}\left(\int_{(0,t]}g_n(z,s)\,d\mu(s)-\int_{(0,t]}g_{n-1}(z,s)\,d\mu(s)\right),\tag{5}$$

що для всіх $\varepsilon>0$, $\omega\in\Omega$, $z\in Z$

$$\begin{aligned}|\widetilde{\eta}(z)|\le{}&|g(z,0)\mu((0,t])|\\&+\left\{\sum_{n\ge1}2^{n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|g(z,k2^{-n}T\wedge t)-g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\right|^2\right\}^{\frac12}\\&\times\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12}.\end{aligned}$$

Для цієї модифікації за [11, Теорема 1.2] та [5, нерівність (6)] справедлива оцінка

$$\begin{aligned}|\widetilde{\eta}(z)|\le{}&|g(z,0)\mu((0,t])|\\&+C\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B^\alpha_{22}([0,T])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12},\end{aligned}\tag{6}$$

де $\alpha=\varepsilon/2+1/2$. Відмітимо, що модифікація $\widetilde{\eta}$ є спільною для всіх $z\in Z$, а константа C залежить від α, T та не залежить від z, ω.

Крім того, справджується наступне співвідношення ([5, нерівність (7)])

$$\begin{aligned}\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B^\alpha_{22}([0,T])}\le{}&C_t^{\frac12}\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([0,t])}\\&+|g(z,t)|\sqrt{T-t}\\&+C_t^{\frac12}\Big(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\Big)^{\frac12}\\&+C_t^{\frac12}t^{-\alpha}\mathbb{1}\{t<T\}\Big(\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\Big)^{\frac12},\end{aligned}\tag{7}$$

де $C_t=1+\mathbb{1}_{\{t<T\}}$.

4. Регулярність стохастичного інтеграла за x

Лема 4.1. *Нехай виконуються припущення* A5, A6. *Тоді для довільних фіксованих* $t \in [0,T]$, $K > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ *випадкова функція*

$$\varphi(x) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy, \qquad |x| \le K$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Доведення. Нехай довільні $t \in (0,T]$, $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \le K\}$ — фіксовані. Покладемо для $s \le t$

$$q(z,s) = \int_{x_1-a(t-s)}^{x_1+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x_2-a(t-s)}^{x_2+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy, \qquad z = (x_1,x_2,t).$$

Тоді для модифікації (5) випадкової функції

$$\eta(z) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_{(0,t]} q(z,s)\,d\mu(s)$$

використаємо оцінку (6), причому модифікацію будуємо на множині $Z \times [0,t] = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,t] \times [0,t]$. У такому випадку дана оцінка має вигляд

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |q(z,0)\mu((0,t])| + C\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} \times \Big\{ \sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta^{(t)}_{kn}\right)\right|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}},$$

де стала C залежить від t.

Оцінимо норму простора Бєсова функції $q(z,\cdot)$ на $[0,t]$. Спочатку для $s \le t$ розглянемо $q(z,s)$. Маємо

$$|q(z,s)| = \left| \int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy \right| \overset{A5}{\le} C|x_1 - x_2|. \tag{8}$$

Тепер оцінимо величину $|q(z,s+h) - q(z,s)|$, $s \in [0,t-h]$. З одного боку, за (8)

$$|q(z,s+h) - q(z,s)| \le |q(z,s+h)| + |q(z,s)| \le C|x_1 - x_2|. \tag{9}$$

З іншого боку, хочемо отримати ще оцінку даної величини за допомогою степеня h. Отже,

$$\begin{aligned}
&|q(z,s+h) - q(z,s)| \\
&\quad = \Bigg| \int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s-h)} \left(\sigma(s+h,y) - \sigma(s,y)\right)\,dy - \int_{x_1-a(t-s)}^{x_1-a(t-s-h)} \sigma(s,y)\,dy \\
&\qquad - \int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x_2-a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)} \left(\sigma(s+h,y) - \sigma(s,y)\right)\,dy \\
&\qquad\qquad + \int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)} \sigma(s,y)\,dy + \int_{x_2+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))\ dy \right.$$

$$\left. - \int_{x_2-a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))\ dy \right|$$

$$+ \left| - \int_{x_1-a(t-s)}^{x_1-a(t-s-h)} \sigma(s,y)\,dy + \int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)} \sigma(s,y)\,dy \right|$$

$$+ \left| - \int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy + \int_{x_2+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy \right|$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

В J_2 робимо заміну змінної $y \to y - x_2 + x_1$ в інтегралі з x_1:

$$J_2 = \left| \int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)} (\sigma(s, y-(x_2-x_1)) - \sigma(s,y))\,dy \right| \overset{A6}{\leq} Ch|x_2-x_1|^{\beta(\sigma)}.$$

Аналогічно отримаємо, що $J_3 \leq Ch|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}$. Далі, так само, як і в (8)

$$J_1 = \left| \int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_2-a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))\ dy - \int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))\ dy \right|$$

$$\overset{A6}{\leq} C|x_1-x_2|h^{\beta(\sigma)}.$$

Отже, враховуючи те, що $\beta(\sigma) \leq 1$ та $h \leq T$, $|x_2-x_1| \leq 2K$, маємо

$$|q(z,s+h)-q(z,s)| \leq Ch|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)} + C|x_1-x_2|h^{\beta(\sigma)} \leq Ch^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}.$$

Перемножимо цю нерівність, піднесену до степеня λ та (9), піднесену до степеня $1-\lambda$, для довільного $\lambda \in (0,1)$. Одержимо

$$\left(\int_0^t \left(w_{2,[0,t]}(g,r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr \right)^{1/2} \leq C|x_1-x_2|^{1-\lambda(1-\beta(\sigma))} \left(\int_0^t r^{2\lambda\beta(\sigma)-2\alpha-1}\,dr \right)^{1/2}$$

$$\leq C|x_1-x_2|^{1-\lambda(1-\beta(\sigma))},$$

при $\beta(\sigma)\lambda > \alpha \Leftrightarrow \lambda > \frac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \frac{1}{2\beta(\sigma)}$. Тоді для довільного

$$\tilde{\gamma}_1 = 1 - \lambda(1-\beta(\sigma)) < 1 - \frac{1}{2\beta(\sigma)}(1-\beta(\sigma)) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\beta(\sigma)} \in (1/2, 1]$$

знайдеться відповідне α. Зауважимо, що $3/2 - 1/(2\beta(\sigma)) \geq \beta(\sigma)$.

Крім того, з (8) маємо, що

$$|q(z,0)| \leq C|x_1-x_2|, \qquad \|q(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} \leq C|x_1-x_2|.$$

Отже,

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq C|x_1-x_2|^{\tilde{\gamma}_1} \left(|\mu((0,t])| + \left\{ \sum_{n\geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\leq k\leq 2^n} \left| \mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\leq C(\omega)|x_1-x_2|^{\tilde{\gamma}_1},$$

де сума зі стохастичною мірою скінченна за [4, Лема 3.1].

Нагадаємо, що тут $C(\omega)$ залежить від значення змінної t. Проте, якщо додатково вимагати виконання припущення A7 та $\forall\delta > 0$ розглядати стохастичний інтеграл для фіксованого $t \in [\delta, T]$, то отримаємо умову Гельдера зі сталою, що не залежить від t (аналогічно до випадку леми 5.1 нижче). $\square$

5. Регулярність стохастичного інтеграла за t

Лема 5.1. *Нехай виконуються припущення* A5–A7. *Тоді для довільних фіксованих* $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_2 < 1/2$ *випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\, dy, \qquad t \in [\delta, T]$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_2$.

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (5) випадкової функції

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\, dy = \int_{(0,t]} \hat{q}(z,s)\, d\mu(s), \qquad z = (x,t) \in \mathbb{R} \times [\delta, T].$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta \le t_1 < t_2 \le T$ та $z_i = (x, t_i)$, $i = 1,2$ маємо

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t_2) - \hat{\varphi}(t_1) &= \int_{(0,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_0(z_1,s)\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(0,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s) \Big) \\
&\quad - \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(0,t_1]} \hat{q}_n(z_1,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_{n-1}(z_1,s)\, d\mu(s) \Big) \\
&= \int_{(0,t_1]} (\hat{q}_0(z_2,s) - \hat{q}_0(z_1,s))\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \Bigg(\int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_n(z_2,s) - \hat{q}_n(z_1,s)\big)\, d\mu(s) \\
&\qquad\qquad - \int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_{n-1}(z_2,s) - \hat{q}_{n-1}(z_1,s)\big)\, d\mu(s) \Bigg) \\
&\quad + \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s) \Big) \\
&= I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Розглянемо спочатку доданок I_1. Для $s \in [0, t_1]$ та $\tilde{z} = (x, t_1, t_2)$ покладемо

$$Q(\tilde{z}, s) = \hat{q}(z_2, s) - \hat{q}(z_1, s) = \int_{x-a(t_2-s)}^{x+a(t_2-s)} \sigma(s,y)\, dy - \int_{x-a(t_1-s)}^{x+a(t_1-s)} \sigma(s,y)\, dy.$$

Тоді аналогічно до (6) можемо записати

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le |Q(\tilde{z}, 0)\mu((0, t_1])| \\
&\quad + C\|Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])} \left\{ \sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left| \mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0, t_1]\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (10) \\
&\le C(\omega)\left(|Q(\tilde{z}, 0)| + \|Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])} \right),
\end{aligned}$$

де константа $C(\omega)$ не залежить від t_1, а остання нерівність отримується з використанням A7 наступним чином.

Позначимо через k_{n1} такий номер, що $t_1 \in ((k_{n1}-1)2^{-n}T, k_{n1}2^{-n}T]$. Маємо

$$\sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t_1]\right)\right|^2 = \sum_{1\le k\le k_{n1}-1} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2 + \left|\mu\left(\Delta_{k_{n1}}^{(T)} \cap (0,t_1]\right)\right|^2$$

$$\le \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2 + C(\omega),$$

а отже,

$$\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t_1]\right)\right|^2 \le \sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2 + C(\omega) \le C(\omega),$$

де в останній нерівності ми використали те, що сума зі стохастичною мірою скінченна за [4, Лема 3.1].

Розглянемо тепер окремо доданки правої частини співвідношення (10). Оцінимо спочатку величину $Q(\tilde z, s)$, $s \in (0, t_1]$. Використаємо обмеженість σ, матимемо

$$|Q(\tilde z, s)| = \left|\int_{x-a(t_2-s)}^{x-a(t_1-s)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x+a(t_1-s)}^{x+a(t_2-s)} \sigma(s,y)\,dy\right| \le C|t_2-t_1|, \tag{11}$$

де стала C не залежить від t_1, t_2. Тоді одержимо для $s \in [0, t_1-h]$, $h \in [0, t_1]$,

$$|Q(\tilde z, s+h) - Q(\tilde z, s)| \le C|t_2-t_1|. \tag{12}$$

Оцінимо тепер величину $|Q(\tilde z, s+h) - Q(\tilde z, s)|$ за допомогою степеня h. Маємо

$$\begin{aligned} &|Q(\tilde z, s+h) - Q(\tilde z, s)| \\ &\le \left|\int_{x-a(t_2-s-h)}^{x+a(t_2-s-h)} \left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)\,dy \right. \\ &\qquad\left. - \int_{x-a(t_1-s-h)}^{x+a(t_1-s-h)} \left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)\,dy\right| \\ &\quad + \left|\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_1-s-h)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x-a(t_2-s)}^{x-a(t_2-s-h)} \sigma(s,y)\,dy\right| \\ &\quad + \left|\int_{x+a(t_1-s-h)}^{x+a(t_1-s)} \sigma(s,y)\,dy - \int_{x+a(t_2-s-h)}^{x+a(t_2-s)} \sigma(s,y)\,dy\right| \\ &= F_1 + F_2 + F_3. \end{aligned}$$

Для оцінки F_2 робимо заміну змінної в інтегралі з t_2: $y \to y - a(t_2-t_1)$. Тоді

$$F_2 = \left|\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_1-s-h)} \left(\sigma(s,y) - \sigma(s, y-a(t_2-t_1))\right)\,dy\right| \overset{A6}{\le} Ch|t_2-t_1|^{\beta(\sigma)}.$$

Аналогічним чином приходимо до оцінки

$$F_3 \le Ch|t_2-t_1|^{\beta(\sigma)}.$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} F_1 &= \left|\int_{x-a(t_2-s-h)}^{x-a(t_1-s-h)} \left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy + \int_{x+a(t_1-s-h)}^{x+a(t_2-s-h)} \left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right| \\ &\overset{A6}{\le} Ch^{\beta(\sigma)}|t_2-t_1|. \end{aligned}$$

Тобто, оскільки $\beta(\sigma) \le 1$, $h \le T$ та $|t_2 - t_1| \le T$, то

$$|Q(\tilde{z}, s+h) - Q(\tilde{z}, s)| \le C h^{\beta(\sigma)} |t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}.$$

Тоді, враховуючи (12), для довільного $\lambda_* \in (0,1)$

$$|Q(\tilde{z}, s+h) - Q(\tilde{z}, s)| \le C |t_2 - t_1|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))} h^{\lambda_* \beta(\sigma)}, \tag{13}$$

та приходимо до співвідношення

$$\Big(\int_0^{t_1} \big(w_{2,[0,t_1]}(Q(\tilde{z}, \cdot), r)\big)^2 r^{-2\alpha-1}\, dr\Big)^{1/2} \le C|t_2 - t_1|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))} \Big(\int_0^{t_1} r^{2\lambda_*\beta(\sigma)-2\alpha-1}\, dr\Big)^{1/2} \le C|t_2 - t_1|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))},$$

при такому $\alpha \in (1/2, 1)$, що $\lambda_* \beta(\sigma) > \alpha \Leftrightarrow \lambda_* > \frac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \frac{1}{2\beta(\sigma)} \Leftrightarrow 1 - \lambda_*(1-\beta(\sigma)) < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$.

Отже, беручи до уваги (11), ми отримали, що для довільного $\tilde{\gamma}_2 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ існує таке $\alpha \in (1/2, 1)$, що виконується

$$\|Q(\tilde{z}, \cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t_1])} \le \|Q(\tilde{z}, \cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t_1])} + C|t_2 - t_1|^{\tilde{\gamma}_2} \le C|t_2 - t_1|^{\tilde{\gamma}_2}.$$

Крім того, з (12) маємо

$$\int_0^{t_1} |Q(\tilde{z}, t_1) - Q(\tilde{z}, s)|^2\, ds = \int_0^{t_1} |Q(\tilde{z}, s + (t_1 - s)) - Q(\tilde{z}, s)|^2\, ds \le C|t_2 - t_1|^2,$$

та з (13)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1 \wedge (T-r)} |Q(\tilde{z}, t_1) - Q(\tilde{z}, s)|^2\, ds\, dr \\
&\quad \le C|t_2 - t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))} \int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1} (t_1 - s)^{2\lambda_*\beta(\sigma)}\, ds\, dr \\
&\quad \le C|t_2 - t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))} \int_0^{t_1} r^{2\lambda_*\beta(\sigma)-2\alpha}\, ds\, dr \le C|t_2 - t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))}.
\end{aligned}$$

Враховуючи те, що $C_{t_1} \le 2$ та $t_1^{-\alpha} \le \delta^{-\alpha}$, та підставивши отримані оцінки в (7) і в (10), одержимо

$$|I_1| \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\tilde{\gamma}_2}.$$

Тепер розглянемо величину I_2. Покладемо

$$\tilde{q}_n(z_2, s) = \sum_{1 \le k \le 2^n} \hat{q}(z_2, (((k-1)2^{-n}T) \vee t_1) \wedge t_2) \mathbb{1}_{\Delta^{(T)}_{kn}}(s), \qquad s \in [0, T].$$

Тоді за [1, Твердження 7.1.1] виконується

$$I_2 = \mathrm{p}\lim_{n \to \infty} \int_{(t_1, t_2]} \tilde{q}_n(z_2, s)\, d\mu(s), \qquad \forall x, t_1, t_2.$$

Отже, випадкова функція

$$\int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_0(z_2, s)\, d\mu(s) + \sum_{n \ge 1} \left(\int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_n(z_2, s)\, d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_{n-1}(z_2, s)\, d\mu(s) \right)$$

є модифікацією для I_2, яку ми знову позначимо I_2. Тоді, аналогічно до (6) одержимо

$$
\begin{aligned}
|I_2| \le{}& |\hat{q}(z_2,t_1)\mu((t_1,t_2])| \\
&+ \Bigg(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\varepsilon_0}|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2) \\
&\qquad - \hat{q}(z_2,(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1)\wedge t_2)|^2\Bigg)^{\frac12} \\
&\times \left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\right)\right|^2\right)^{\frac12},
\end{aligned}
$$

де k' таке, що $\Delta_{kn}^{(T)}\subset\Delta_{k'(n-1)}^{(T)}$, та $\varepsilon_0>0$ — довільне.

Маємо

$$
|\hat{q}(z_2,v)| = \left|\int_{x-a(t_2-v)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)\,dy\right| \le C|t_2-v| \le C|t_2-t_1|, \qquad v\in[t_1,t_2].
$$

Далі,

$$
\begin{aligned}
&|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2) - \hat{q}(z_2,(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1)\wedge t_2)| \\
&\quad\le \big|\hat{q}\left(z_2,(((k-1)2^{-n}T+2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2\right) \\
&\qquad\qquad - \hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)\big| \\
&\quad\le C|t_2-t_1|,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де величина

$$
\left|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T+2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2) - \hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)\right|
$$

має вигляд $|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)|$ для $v\in[t_1,t_2]$ і такого $l\in[0,2^{-n}T]$, що $v+l\in[t_1,t_2]$.

Таким чином,

$$
\begin{aligned}
|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)| &= \left|\int_{x-a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v-l)}\sigma(v+l,y)\,dy - \int_{x-a(t_2-v)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)\,dy\right| \\
&= \Bigg|\int_{x-a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v-l)}(\sigma(v+l,y)-\sigma(v,y))\,dy \\
&\qquad - \int_{x-a(t_2-v)}^{x-a(t_2-v-l)}\sigma(v,y)\,dy - \int_{x+a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)\,dy\Bigg| \\
&\overset{A5,A6}{\le} C(t_2-v-l)l^{\beta(\sigma)} + Cl \le C|t_2-t_1|^{1-\beta(\sigma)}l^{\beta(\sigma)} \le C|t_2-t_1|^{1-\beta(\sigma)}2^{-n\beta(\sigma)},
\end{aligned}
$$

оскільки $l\le|t_2-t_1|$, $l\le 2^{-n}T$.

Тому, враховуючи (14), для $\lambda_0\in(0,1)$ маємо

$$
|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)| \le C|t_2-t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}2^{-n\lambda_0\beta(\sigma)}.
$$

Застосовуючи отримані оцінки і такі ж міркування, як при обґрунтуванні (10), можемо записати

$$\begin{aligned}|I_2| &\le C|t_2-t_1||\mu((t_1,t_2])| \\ &+ C|t_2-t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}\left(\sum_{n\ge 1} 2^{n(\varepsilon_0-2\lambda_0\beta(\sigma)+1)}\right)^{1/2} \\ &\times \left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\right)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\le C(\omega)|t_2-t_1|^{\tilde\gamma_2},\end{aligned}$$

при $\lambda_0\beta(\sigma) > 1/2$ і відповідному $\varepsilon_0 > 0$. Тут показник $\tilde\gamma_2 < 1-\lambda_0\beta(\sigma) < 1/2$. Відмітимо, що константа $C(\omega)$ не залежить від t_1, t_2.

Тобто, остаточно ми одержали для відповідної модифікації, що

$$|\hat\varphi(t_2)-\hat\varphi(t_1)| \le |I_1|+|I_2| \le C(\omega)|t_2-t_1|^{\tilde\gamma_2}.$$

□

6. Доведення теорем 2.1 та 2.2

6.1. **Доведення теореми 2.1.** 1) *Існування та єдиність розв'язку.* Доведення існування та єдиності розв'язку повторює доведення відповідного пункту Теореми з [2], з використанням ітераційного процесу, для якого $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n>0$

$$\begin{aligned}u^{(n+1)}(t,x) &= \frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)\,dy \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u^{(n)}(s,y))\,dy \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy.\end{aligned}$$

Розв'язок будуємо у вигляді рівномірної границі $u^{(n)}(t,x)$ при $n\to\infty$.

Зауважимо, що даний розв'язок має неперервну модифікацію на множині $[\delta,T]\times[-K,K]$. Ця властивість обґрунтована для розв'язку рівняння теплопровідності в [4, стор.247]. Аналогічні міркування справедливі і у нашому випадку.

2) *Гельдеровість.* Спочатку покажемо гельдеровість розв'язку задачі (2) за просторовою змінною.

Нехай довільні $t\in[\delta,T]$, $x_1,x_2\in\{x\in\mathbb{R},|x|\le K\}$ — фіксовані. Тоді за припущеннями A1-A7 та лемою 4.1 маємо

$$\begin{aligned}&|u(t,x_1)-u(t,x_2)| \\ &\quad\le \frac{1}{2a}\left|\int_{x_1-at}^{x_2-at} v_0(y)\,dy - \int_{x_1+at}^{x_2+at} v_0(y)\,dy\right| + C(\omega)|x_1-x_2|^{\beta(u_0)} \\ &\quad+ \frac{1}{2a}\left|\int_0^t ds\int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)} f(s,y,u(s,y))\,dy - \int_0^t ds\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))\,dy\right| \\ &\quad+ C(\omega)|x_1-x_2|^{\tilde\gamma_1} \\ &\quad\le C(\omega)|x_1-x_2|^{\gamma_1}.\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться виконання умови Гельдера за часовою змінною $t\in[\delta,T]$ для стохастичної функції $u(t,x)$.

Таким чином, ми отримали модифікацію $\bar u^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\bar u^{(t)}$, що задовільняє умову Гельдера за t

при кожному фіксованому x. Виключимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\bar{u}^{(x)}(t,x) \neq \bar{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x) \in [\delta,T] \times \mathbb{R}$. Для всіх інших ω покладемо $\bar{u} = \bar{u}^{(x)} = \bar{u}^{(t)}$ для раціональних (t,x) та довизначимо на всю множину $[\delta,T] \times \mathbb{R}$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x.

6.2. **Доведення теореми 2.2.** За теоремою 2.1, кожна із задач (2) та (3) має єдиний розв'язок, який можна побудувати за допомогою процесу ітерації. Нехай $u^{(n)}(t,x)$ та $u_j^{(n)}(t,x)$, $n \geq 0$ — відповідні n-ті наближення розв'язків $u(t,x)$ та $u_j(t,x)$ таким процесом. Зафіксуємо довільні $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}$ та $j \geq 1$. Тоді, за A4 маємо для $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\left|u_j^{(n)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |v_{0j}(y) - v_0(y)|\,dy \\
&\qquad + \frac{1}{2}(|u_{0j}(x+at) - u_0(x+at)| + |u_{0j}(x-at) - u_0(x-at)|) \\
&\qquad + \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \left|f_j(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y)) - f(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y))\right| dy \\
&\qquad + C\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \left|u_j^{(n-1)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\right| dy + \frac{1}{2a}\left|\int_{(0,t]} G_j(s)d\mu(s)\right| \\
&\quad \leq V_j t + U_j + F_j\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2a}\left|\int_{(0,t]} G_j(s)d\mu(s)\right| \\
&\qquad + C\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \left|u_j^{(n-1)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\right| dy,
\end{aligned} \tag{15}$$

де

$$G_j(s) = G_j(t,x,s) = \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} (\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y))\,dy.$$

Розглянемо окремо інтеграл зі стохастичною мірою. Для модифікації (5) випадкової функції

$$\int_{(0,t]} G_j(s)\,d\mu(s)$$

справджується нерівність (6). Оцінимо складові її правої частини.

Для довільного $s \in [0,t]$

$$|G_j(s)| = \left|\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} (\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y))\,dy\right| \leq 2a(t-s)\Sigma_j \leq C\Sigma_j. \tag{16}$$

Тоді для $s, s+h \in [0,t]$

$$|G_j(s+h) - G_j(s)| \leq C\Sigma_j. \tag{17}$$

З іншого боку, маємо з A5–A6 та A5*–A6*

$$
\begin{aligned}
&|G_j(s+h)-G_j(s)| \\
&\quad = \Bigg| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma_j(s+h,y)-\sigma_j(s,y))\,dy \\
&\qquad - \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))\,dy \\
&\qquad - \int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)} (\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y))\,dy - \int_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)} (\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y))\,dy \Bigg| \\
&\quad \le C h^{\beta(\sigma)}.
\end{aligned}
$$

Піднесемо дану нерівність до степеня $\tilde{\lambda} \in (0,1)$, а нерівність (17) – до степеня $1-\tilde{\lambda}$ та перемножимо їх. Одержимо

$$|G_j(s+h)-G_j(s)| < C h^{\tilde{\lambda}\beta(\sigma)} \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}.$$

Тоді, враховуючи (16), можемо записати

$$
\begin{aligned}
\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} &= \|G_j\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} + \left(\int_0^t \left(w_{2,[0,t]}(G_j,r) \right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr \right)^{1/2} \\
&\le C\Sigma_j + C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)-2\alpha-1}\,dr \right)^{1/2} \\
&\le C\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \right),
\end{aligned}
$$

для $\tilde{\lambda} > 1/(2\beta(\sigma))$ та відповідного α. При цьому, $1-\tilde{\lambda} < 1 - 1/(2\beta(\sigma))$.

Крім того,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1} \int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |G_j(t)-G_j(s)|^2\,ds\,dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{-2\alpha-1} \int_{t-r}^{t} (t-s)^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)}\,ds\,dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)-2\alpha} dr \right)^{\frac{1}{2}} \le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}};
\end{aligned}
$$

та з (16)

$$\left(\int_0^t |G_j(t)-G_j(s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \le C\Sigma_j.$$

Підставимо отримані оцінки в (7). Беручи до уваги те, що $C_t \le 2$, одержимо

$$\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \le C\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \right)(1+t^{-\alpha}).$$

Такими ж міркуваннями, як і при обґрунтуванні (10), з урахуванням A7, зі співвідношення (6) приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}\left|\int_{(0,t]} G_j(s)d\mu(s)\right| &\le |G_j(0)\mu((0,t])| \\ &\quad + C\|G_j\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t])\right|^2\right\}^{1/2} \\ &\le C\left(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\right)\left(1+t^{-\alpha}\right) \\ &\quad \times\left(C(\omega)+\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu(\Delta^{(T)}_{kn})\right|^2+C(\omega)\right\}^{1/2}\right) \\ &\le C(\omega)\left(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\right)\left(1+t^{-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Оскільки $t\le T$, то з останньої оцінки та (15) маємо

$$\begin{aligned}\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right| &\le \left(V_jT+U_j+F_j\frac{T^2}{2}+C(\omega)\left(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\right)\right)\left(1+t^{-\alpha}\right) \\ &\quad + C\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_j^{(n-1)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy.\end{aligned}\tag{18}$$

Доведемо, що $\forall n\ge0$

$$\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|\le S_j\left(t^{-\alpha}+\exp\{\widetilde{C}t\}\left(1+\frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),\tag{19}$$

де $S_j=V_jT+U_j+F_j\frac{T^2}{2}+C(\omega)\left(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\right)$, $\widetilde{C}=C2aT$, а C — стала з (18).

Для $n=0$: $\left|u_j^{(0)}(t,x)-u^{(0)}(t,x)\right|=0$ і потрібна нерівність задовольняється. Припустимо, що (19) виконується. Покажемо, що дана оцінка справедлива для $n+1$.

Враховуючи (18), маємо

$$\begin{aligned}&\left|u_j^{(n+1)}(t,x)-u^{(n+1)}(t,x)\right| \\ &\quad\le S_j\left(1+t^{-\alpha}+C2aT\int_0^t\left(s^{-\alpha}+\exp\{\widetilde{C}s\}\left(1+\frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right)ds\right) \\ &\quad= S_j\left(1+t^{-\alpha}+\frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(\exp\{\widetilde{C}t\}-1\right)\left(1+\frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),\end{aligned}$$

що співпадає з потрібним виразом.

Отже, за методом математичної індукції ми довели виконання (19) $\forall\, n\ge0$.

Тоді, $\forall\delta>0$ маємо

$$\begin{aligned}&\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right| \\ &\quad\le S_j\left(\delta^{-\alpha}+\exp\{\widetilde{C}T\}\left(1+\frac{\widetilde{C}T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),\quad \forall(t,x)\in[\delta,T]\times\mathbb{R},\end{aligned}$$

де S_j не залежить від n, t, x.

Перейдемо в нерівності (19) до границі спочатку при $n \to \infty$, а потім при $j \to \infty$. Враховуючи умову (4), одержимо, що

$$|u_j(t,x) - u(t,x)| \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м.н.}, \quad \forall\,(t,x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}.$$

7. Висновки

Розглянуто задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою $\mu(t)$, на множині $[0,T]\times\mathbb{R}$. Доведено, що задача поставлена коректно. А саме, що існує єдиний м'який розв'язок, неперервно залежний від даних задачі. Крім того, встановлено неперервність даного розв'язку за Гельдером за сукупністю змінних.

Автор висловлює подяку професору В. М. Радченку за постановку задачі та обговорення, а також рецензенту за цінні зауваження та поради.

Література

1. S. Kwapień and W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
2. І. Боднарчук, *М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою*, Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка **24** (2010), 28–33.
3. V. Radchenko, *Heat equation with general stochastic measure colored in time*, Modern Stochastics: Theory and Applications **1** (2014), 129–138.
4. V. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math. **194** (2009), no. 3, 231–251.
5. І. М. Боднарчук, Г. М. Шевченко, *Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою*, Теорія ймовір. та матем. статист. **93** (2015), 7–21.
6. R. M. Balan and C. A. Tudor, *The stochastic wave equation with fractional noise: A random field approach*, Stochastic Processes Appl. **120** (2010), no. 12, 2468–2494.
7. R. C. Dalang and M. Sanz-Solé, *Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three*, Memoirs of the American Mathematical Society **199** (2009), no. 931.
8. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1999.
9. В. М. Радченко, *Інтегральні рівняння із загальною стохастичною мірою*, Теорія ймовір. та матем. статист. **91** (2014), 154–163.
10. В. Н. Радченко, *Эволюционные уравнения с общими стохастическими мерами в гильбертовом пространстве*, Теория вероятн. и ее прим. **59** (2014), no. 2, 375–386.
11. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl. **13** (1997), no. 2, 63–77.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: robeiko_i@ukr.net

Надійшла 05/04/2016