Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 16–35

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 16–35

ПРО G-ІЗОМОРФІЗМ ЙМОВІРНІСНИХ ТА РОЗМІРНІСНИХ ТЕОРІЙ РОЗКЛАДІВ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ФРАКТАЛЬНУ ДОВІРЧІСТЬ СИСТЕМ ПОКРИТТІВ

УДК 519.21

І. І. ГАРКО, Р. О. НІКІФОРОВ І Г. М. ТОРБІН

Анотація. У роботі розвивається новий метод побудови ймовірнісної та розмірнісної теорій зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи одного з цих зображень переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називаються G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення). Ймовірнісні, метричні, та розмірнісні теорії системи числення, між якими існує G-відображення, є тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та збереженням вказаними вище відображеннями розмірності Хаусдорфа–Безиковича. У роботі знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича сімейств надциліндричних множин, породжених F та I-F-зображеннями дійсних чисел.

Abstract. We develop a new method for the construction of metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers via studies of special mappings, under which symbols of a given representation are mapped into the same symbols of other representation from the same family, and they preserve the Lebesgue measure and the Hausdorff–Besicovitch dimension (for such mappings the set of points of discontinuity can be everywhere dense). These mappings are said to be G-mappings (G-isomorphisms of representations). Probabilistic, metric and dimensional theories of G-isomorphic representations are identical. We show a rather deep connection between the faithfulness of systems of coverings, generated by different representations, and the preservation of the Hausdorff-Besicovitch dimension of sets by the above mentioned mappings.

Аннотация. В работе развивается новый метод построения вероятностной и размерностной теорий представлений действительных чисел при помощи исследования специальных отображений, которые символы одного из этих представлений переводят в символы другого представления из исследуемого семейства, и при этом сохраняют меру Лебега и размерность Хаусдорфа–Безиковича (хотя могут быть разрывными на всюду плотных множествах). Такие отображения называются G-отображениями (G-изоморфизмами систем исчисления). Вероятностные, метрические и размерностные теории систем исчисления, между которыми существует G-отображение, являются тождественными (с точностью до G-изоморфизма). В работе показывается глубокая связь между доверительностью систем покрытий, порожденных разными системами исчисления, и сохранением указанными выше отображениями размерности Хаусдорфа–Безиковича. В работе найдены общие достаточные условия доверительности для вычисления размерности Хаусдорфа-Безиковича семейств надцилиндрических множеств, порожденных F и I-F-представлениями действительных чисел.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11K55, 26A30, 28A80, 60G30.

Ключові слова і фрази. фрактали, DP-перетворення, G-ізоморфізм систем числення, F-зображення, I-F-зображення, Q_∞-зображення, I-Q_∞-зображення, довірчі системи покриттів, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

1. Вступ

Добре відомо (див., наприклад, [12, 16, 17, 19, 32, 34]), що існує багато систем числення (методів зображення (кодування) дійсних чисел чи елементів з деякого простору) з використанням постійного (скінченного чи нескінченного) алфавіту або змінного алфавіту (послідовності алфавітів). Кожна система числення має свою специфіку і переваги у заданні чи дослідженні певних математичних об'єктів, відповідну метричну, ймовірнісну та розмірнісні (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича та інших фрактальних розмірностей) теорії. Фрактальний бум у математиці та природознавстві наприкінці XX століття суттєво простимулював розвиток методів побудови розмірнісних теорій (особливо це стосується класичної розмірності Хаусдорфа–Безиковича та пакувальної розмірності) різних розкладів. Незважаючи на це, для багатьох класичних розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії все ще перебувають на конструктивному етапі розвитку. В якості прикладу можна навести ланцюгові дроби ([7, 27]), розклади Кантора ([6, 23]), розклади Остроградського–Серпінського–Пірса ([2, 12]), Q_∞-розклади ([1, 4, 25]) та багато інших. Тому особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є *розвиток та кристалізація методів обчислення розмірності* Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; *методів встановлення сингулярності* ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; *усвідомлення аналогій* між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та *узагальнення* на основі цього відповідних *методів побудови цих теорій.*

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є добре відомим поняттям, яке активно використовується в різних галузях математики. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено велику кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Це стало причиною розвитку методів знаходження та оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги (див., наприклад, [9, 36]).

Нагадаємо, що сімейство Φ підмножин з $[0,1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0,1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0,1] = \bigcup_j E_j$.

Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Локально тонке сімейство покриттів Φ називається *порівнянним* на множині M, якщо породжена міра $H^\alpha(\cdot,\Phi)$ є порівнянною з класичною α-мірою Хаусдорфа $H^\alpha(\cdot)$ ([33]), тобто коли існує абсолютна константа $n_0 > 1$ така, що

$$H^\alpha(E) \le H^\alpha(E,\Phi) \le n_0 \cdot H^\alpha(E),\ \forall E \subset M.$$

Означення 1.1. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається невід'ємне число

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha\colon H^{\alpha}(E,\Phi) = 0\}.$$

Означення 1.2. Локально тонке сімейство покриттів Φ називається *довірчим* на множині M для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, якщо для довільної множини $E \subset M$ має місце рівність

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E).$$

Достатні умови довірчості сімейств покриттів вивчались багатьма авторами (див. [10, 14, 15, 32, 31, 39] та відповідні посилання у згаданих роботах). Прикладами довірчих систем покриттів можуть бути локально тонкі системи покриттів, що породжуються s-адичним представленням дійсних чисел [14]; системи покриттів, які породжуються Q-представленнями [39]; системи покриттів, що породжуються Q^*-представленнями, для яких $\inf_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$ [10]. Наведені приклади є прикладами систем покриттів, породжених системами зображень дійсних чисел зі скінченним алфавітом. У роботах [4, 18, 25, 27] досліджувалися питання довірчості для систем зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом на прикладі систем циліндрів, породжених Q_∞- та I-Q_∞-зображеннями дійсних чисел. Як зазначається в роботі [4], парадоксальним є той факт, що перші приклади недовірчих систем покриттів виникли у двовимірному випадку як результат активних досліджень фрактальних властивостей самоафінних множин у 90-х роках 20-го століття (див. [13]). Напевно, першим (і несподіваним) прикладом одновимірної недовірчої локально тонкої системи покриттів є сукупність циліндрів класичного ланцюгового зображення (див. [27]). Використовуючи підхід, який був запропонований Ювалом Пересом для доведення недовірчості сімейства циліндрів ланцюгового розкладу, в роботі [4] доведено недовірчість сімейства циліндрів Q_∞-розкладів при поліноміальній швидкості спадання членів послідовності $\{q_i\}$ (тобто коли $\frac{A}{(i+1)^s} \le q_i \le \frac{B}{(i+1)^s}$ для деяких двох додатних констант A та B) та знайдено достатні умови недовірчості таких сімейств.

Дана робота присвячена розвитку нового метода побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної (хаусдорфової) теорій для узагальнених F-зображень (розкладів) дійсних чисел (див. наступний розділ для строгого означення даного зображення) та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень φ, які символи певного F_1-зображення переводять у ті ж символи деякого F_2-зображення з досліджуваного сімейства

$$\varphi(\Delta^{F_1}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{F_2}_{\alpha_1(y)\alpha_2(y)\ldots\alpha_k(y)\ldots}$$

і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення F_1 та F_2, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями (збереженням розмірності Хаусдорфа–Безиковича) вказаних вище відображень. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених узагальненим F-зображенням, та показуємо як отримані результати дозволяють отримувати ймовірнісні, метричні та розмірнісні теорії нових систем числення. Особлива увага в роботі приділена Q_∞- та I-Q_∞-зображенням (розкладам) дійсних чисел.

2. $I-F$-РОЗКЛАДИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ФРАКТАЛЬНА ДОВІРЧІСТЬ ПОРОДЖЕНИХ СІМЕЙСТВ ПОКРИТТІВ

Нехай $t\in[0,1]$, $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(t)i_2(t)\ldots i_k(t)\ldots}$ — $\tilde{Q}$-зображення числа t, $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(t)i_2(t)\ldots i_k(t)}$ — $\tilde{Q}$-циліндр k-го рангу, що містить точку t (див. [5] для огляду властивостей $\tilde{Q}$-зображення). Розглянемо функцію $y=F(t)$, яка володіє наступними властивостями:

1) $F(0)=0$, $F(1)=1$;
2) $F(t)$ — неперервна і строго зростаюча на $[0,1]$.

Нехай $N_k=\{0,1,\ldots,n_k\}$, $0<n_k\le+\infty$ і $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}:=F(\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_k})$. Множину $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}$ назвемо F-циліндром k-го рангу з основою $(i_1i_2\ldots i_k)$. Оскільки $y=F(t)$ є неперервною і строго зростаючою, то F-циліндри мають наступні властивості:

(1) $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}=\bigcup_{i_k\in N_k}\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}$;
(2) $\Delta^F_{i_1}\supset\Delta^F_{i_1i_2}\supset\ldots\supset\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_n}\supset\ldots$;
(3) $|\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}|\to0$, при $k\to\infty$.

Очевидно, що для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k\in N_k$ існує послідовність вкладених циліндрів $\Delta^F_{i_1}\supset\Delta^F_{i_1i_2}\supset\ldots\supset\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_n}\supset\ldots$, які стягуються в деяку точку з $[0,1]$.

І навпаки, для довільного $x\in[0,1)$ існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1(x)}\supset\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)}\supset\ldots\supset\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)}\supset\ldots,$$

які містять x і при цьому

$$x=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)}=:\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо F-розкладом дійсного числа x.

Розглянемо інший (еквівалентний) підхід до означення F-розкладу. Нехай $\{N_k\}$ — послідовність алфавітів, де $N_k=\{0,1,\ldots,n_k\}$, $0<n_k\le\infty$. При фіксованій послідовності алфавітів $\{N_k\}$ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо на не більш ніж зчисленну кількість відрізків $\Delta^F_{i_1}$, $i_1\in N_1$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^F_{i_1}\right|=q_{i_1}$, $i_1\in N_1$. Кожен з відрізків $\Delta^F_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу F-розкладу.

Крок k ($k>1$). Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}$ розбиваємо зліва направо на не більш ніж зчисленну кількість відрізків $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}$, довжини яких задовольняють умови

$$\frac{\left|\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_{k-1}i_k}\right|}{\left|\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}\right|}=q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k},\ \sum_{i_k\in N_k}q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k}=1,\forall(i_1,\ldots,i_{k-1})\in N_1\times N_2\times\ldots\times N_{k-1}.$$

Кожен з відрізків $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу F-розкладу.

Накладемо додаткову умову: для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k\in N_k$ нескінченний добуток $\prod_{j=1}^{\infty}q^{(i_1,\ldots,i_{j-1})}_{i_j}$ розбігається до нуля. Тоді для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k\in N_k$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1}\supset\ \Delta^F_{i_1i_2}\supset\ldots\supset\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}\supset\ldots,$$

таких, що $|\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}|\to0$, $k\to\infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^F_{i_1}$, $\Delta^F_{i_1i_2}$, …, $\Delta^F_{i_1i_2\ldots i_k}$, ….

І навпаки, для кожної точки $x\in[0,1)$ існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^F_{i_1(x)}\supset\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)}\supset\ldots\supset\Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)}\supset\ldots,$$

які містять x, і при цьому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} =: \Delta^F_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}.$$

Очевидно, що при фіксованому $\widetilde{Q}$-розкладі між множиною неперервних строго зростаючих на $[0,1]$ функцій F, які задовольняють умову $F(0)=0$, $F(1)=1$, та множиною F-розкладів дійсних чисел існує бієкція (кожна функція F із вказаними властивостями однозначно визначає систему F-циліндрів всіх рангів як F-образів циліндрів $\widetilde{Q}$-розкладу; і навпаки, описана система F-циліндрів визначає значення неперервної функції F на всюди щільній множині точок, які є межовими точками $\widetilde{Q}$-циліндрів, а, отже, повністю визначає F).

Природнім узагальненням F-розкладу є I-F-розклад дійсних чисел, який отримується за наступним алгоритмом. Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots, \qquad \beta_k(I) \in \{0,1\}.$$

Для тих чисел, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді. Нехай $\{N_k\}$ — послідовність алфавітів, де $N_k = \{0,1,\ldots,n_k\}$, $0 < n_k \le \infty$. При фіксованому дійсному числі $I \in [0,1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованій послідовності алфавітів $\{N_k\}$ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I)=1$ (справа наліво, якщо $\beta_1(I)=0$) на не більш як зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $i_1 \in N_1$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}\right| = q_{i_1}$, $i_1 \in N_1$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-F-розкладу.

Крок k ($k>1$). Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}$ розбиваємо зліва направо, якщо $\beta_k(I)=1$ (справа наліво, якщо $\beta_k(I)=0$) на не більш як зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_k}$, довжини яких задовольняють умови

$$\frac{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}i_k}\right|}{\left|\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}\right|} = q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k}, \sum_{i_k \in N_k} q^{(i_1,\ldots,i_{k-1})}_{i_k} = 1, \forall (i_1,\ldots,i_{k-1}) \in N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{k-1}.$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу I-F-розкладу (I-F-циліндром).

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in N_k$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1} \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_k} \supset \ldots,$$

таких, що $\forall (i_1,i_2,\ldots i_k,\ldots) : |\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$.

Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1}$, $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2}$, …, $\Delta^{I\text{-}F}_{i_1i_2\ldots i_k}$, … .

І навпаки, для кожної точки $x \in (0,1)$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} \supset \ldots,$$

які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}F}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-F-зображенням (розкладом) дійсного числа x.

Зауваження 2.1. Очевидно, що F-розклад отримується з I-F-розкладу шляхом вибору $I = 1$. Ланцюгові розклади, Q^*-розклади ([3, 10]), Q_∞-розклади ([25, 39]), розклади Люрота ([16, 34]), Сільвестера ([29]), Остроградського–Серпінського–Пірса ([2, 12]), Енгеля ([11, 21]) є частковими випадками I-F-розкладів.

Нехай $D = D(I)$ – множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення,

$$D = \{x \colon x \in [0,1], \forall n \in N \exists \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)} \colon x \in \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)}\}.$$

Очевидно, що дійсне число x не має I-F-зображення тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $n_0 = n_0(x)$, що x не належить до жодного з циліндрів рангу n_0.

Теорема 2.1. *Нехай $x = \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — деяке I-F-зображення дійсних чисел над послідовністю алфавітів $\{N_k\}$. Нехай D — множина точок одиничного відрізка, які мають I-F-зображення. Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — сімейство множин, які є об'єднанням суміжних I-F-циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж I-F-циліндру попереднього рангу.*

Якщо існує константа $c \geq 1$ така, що

$$\frac{1}{c} \leq \frac{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k m}|}{|\Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\ldots\alpha_k(m+1)}|} \leq c, \qquad \forall k \in N, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1},$$

то $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині D. Більше того $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ є порівнянним і

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leq 4c \cdot H^\alpha(E), \qquad \forall E \subset D.$$

Доведення. Нехай E — довільна підмножина множини D. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in B$, $b_j \in B$, $|E_j| \leq \varepsilon$, де B — множина всіх I-F-ірраціональних точок, тобто точок, які не є межовими для жодного циліндра жодного рангу I-F-зображення.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1]$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Нехай $I = 0, \beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри (n_j+1)-го рангу. Не порушуючи загальності, вважатимемо $\beta_{n_j+1}(I) = 1$, тобто на (n_j+1)-му кроці розбиття кожного з циліндрів n_j-го рангу здійснюватиметься зліва направо.

Нехай M_0 — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j). Якщо $c_j := \sup \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ співпадає з $d_j := \inf \Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, то $M_0 = \varnothing$.

I. Нехай $M_0 \neq \varnothing$, очевидно, що $M_0 \in \hat{\Phi}$ і $|M_0| \leq |E_j|$.

Тоді E_j можна покрити трьома множинами: M_0, циліндром (n_j+1)-го рангу $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та циліндром (n_j+1)-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, причому $|M_0| \leq |E_j|$, $|L_j| \leq c \cdot |E_j|$, $|R_j| \leq c \cdot |E_j|$.

II. Нехай $M_0 = \varnothing$.

Розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$ на циліндри наступних рангів.

Незалежно від того, розбиття здійснюватиметься зліва направо чи справа наліво, знайдуться такі k і s, що (a_j, c_j) може бути покритим за допомогою циліндра (n_j+k)-го рангу

$$L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$$

та множини M_k, що є об'єднанням циліндрів (n_j+k)-го рангу, які повністю містяться в

$$\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k-1}(a_j)} \cap E_j,$$

причому $M_k \in \hat{\Phi}$ і $|M_k| \leq |E_j|$, $|L_j| \leq c \cdot |E_j|$, а (c_j, b_j) може бути покритим за допомогою циліндра $(n_j + s)$-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s}(b_j)}$ та множини M_s, що є об'єднанням циліндрів $(n_j + s)$-го рангу, які повністю містяться в $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s-1}(b_j)} \cap E_j$, причому $M_s \in \hat{\Phi}$ і $|M_s| \leq |E_j|$, $|R_j| \leq c \cdot |E_j|$.

Отже, E_j можна покрити за допомогою не більш як чотирьох множин: M_k — об'єднання циліндрів $(n_j + k)$-го рангу, які повністю містяться в

$$\Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k-1}(a_j)} \cap E_j,$$

M_s — об'єднання циліндрів $(n_j + s)$-го рангу, які повністю містяться в

$$\Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s-1}(b_j)} \cap E_j,$$

циліндра $(n_j + k)$-го рангу $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$ та циліндра $(n_j + s)$-го рангу $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+s}(b_j)}$, діаметри яких не перевищують $c \cdot |E_j|$.

Таким чином, для довільного $\alpha > 0$ і довільної множини $E \subset D$ маємо:

$$H^{\alpha}(E) \leq H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) \leq 4c \cdot H^{\alpha}(E).$$

Отже,

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(I\text{-}F)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \subset D$. □

Оскільки F-розклад дійсних чисел отримується з I-F-розкладу шляхом вибору $I = 1$, то з доведеної теореми випливає наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $x = \Delta^F_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — деякий F-розклад над послідовністю алфавітів $\{N_k\}$. Якщо існує константа $c \geq 1$ така, що*

$$\frac{1}{c} \leq \frac{|\Delta^F_{\alpha_1\ldots\alpha_k m}|}{|\Delta^F_{\alpha_1\ldots\alpha_k(m+1)}|} \leq c, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, m \in N_{k+1}, (m+1) \in N_{k+1}, \tag{1}$$

то $\hat{\Phi}(F)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$. Більше того, $\hat{\Phi}(F)$ є порівнянним і

$$H^{\alpha}(E) \leq H^{\alpha}(E, \hat{\Phi}(F)) \leq 4c \cdot H^{\alpha}(E), \qquad \forall E \subset [0, 1).$$

Наслідок 2.1. *Для розкладів Люрота справедливе метричне відношення (див., наприклад, [22]):*

$$\frac{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^L_{c_1\ldots c_m s}|} = \frac{s}{s+2}.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leq \frac{s}{s+2} \leq 1$. Тому в якості константи c теореми 2.1 можна взяти $c = 3$.

Отже, сімейство $\hat{\Phi}(L)$ є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

Наслідок 2.2. *Для розкладів Остроградського–Серпінського–Пірса справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад,* [11]*):*

$$\frac{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{\sigma_m + 1}{(\sigma_m + s)(\sigma_m + s + 1)}, \quad \text{де } \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{OSP}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{\sigma_m + s}{\sigma_m + s + 2}, \quad \text{де } \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leq \frac{1+c+\sigma_m}{3+c+\sigma_m} \leq 1$. *В якості константи* c *теореми 2.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(OSP)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.3. *Для розкладів Остроградського 2-го роду справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад,* [28]*):*

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{c_n(c_n + 1)}{c_{n+1}(c_{n+1} + 1)}.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{s}{s + 2}.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leq \frac{s}{s+2} \leq 1$. *Тому в якості константи* c *теореми 2.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(O_2)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.4. *Для розкладів Енгеля справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад,* [21]*):*

$$\frac{|\Delta^{E}_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^{E}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{\sigma_m + 1}{(\sigma_m + s)(\sigma_m + s + 1}, \quad \text{де } \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Тому

$$\frac{|\Delta^{E}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{E}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{\sigma_m + s}{\sigma_m + s + 2}, \quad \text{де } \sigma_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Очевидно, що $\frac{1}{3} \leq \frac{1+s+\sigma_m}{3+s+\sigma_m} \leq 1$. *Тому в якості константи* c *теореми 2.1 можна взяти* $c = 3$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(E)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.5. *Для розкладів Сільвестера справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад,* [29]*):*

$$\frac{|\Delta^{S}_{g_1g_2\ldots g_n i)}|}{|\Delta^{S}_{g_1g_2\ldots g_n s}|} = \frac{q_n(q_n - 1)}{(q_n(q_n - 1) + i)(q_n(q_n - 1) + i - 1)},$$

де $q_1 = g_1 + 1, q_{k+1} = g_{k+1} + q_k(q_k - 1), 1 < k \leq m$.

Тому

$$\frac{|\Delta^{S}_{g_1g_2\ldots g_m(s+1)}|}{|\Delta^{S}_{g_1g_2\ldots g_m s}|} = \frac{q_m(q_m - 1) + s - 1}{q_m(q_m - 1) + s + 1},$$

де $q_1 = g_1+1, q_{k+1} = g_{k+1}+q_k(q_k-1), 1 < k \leq m$. *Очевидно, що* $\frac{1}{2} \leq \frac{q_m(q_m-1)+s-1}{q_m(q_m-1)+s+1} \leq 1$. *А тому в якості константи* c *теореми 2.1 можна взяти* $c = 2$. *Таким чином, сімейство* $\hat{\Phi}(S)$ *є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Наслідок 2.6. *Для розкладів ланцюговими дробами справедливе наступне метричне відношення (див., наприклад, [11]):*

$$\frac{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m s}|}{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1+\frac{Q_{m-1}}{Q_m}}{\left(1+\frac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)\left(1+\frac{1}{s}+\frac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)},$$

де Q_m — знаменник підхідного дробу порядку m ланцюгового дробу.

Тому

$$\frac{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}|}{|\Delta^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_m s}|} = \frac{s\cdot Q_m + Q_{m-1}}{(s+2)\cdot Q_m + Q_{m-1}},$$

де Q_m — знаменник підхідного дробу порядку m ланцюгового дробу.

Очевидно, що $\frac{1}{2} \leq \frac{s\cdot Q_m+Q_{m-1}}{(s+2)\cdot Q_m+Q_{m-1}} \leq 1$. Тому в якості константи c теореми 2.1 можна взяти $c=2$. Таким чином, $\hat{\Phi}(C)$ є порівнянним, а отже, довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

Наступна теорема встановлює зв'язок між DP-властивостями відображення φ та питанням довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича відповідних сімейств $\Phi(\hat{F})$ і $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$.

Теорема 2.3. *Нехай I – деяке дійсне число з $[0,1]$. Якщо сімейства $\hat{\Phi}(F)$ і $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$ є довірчими, то відображення φ:*

$$\varphi(\Delta^{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{I\text{-}F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

Доведення. Оскільки сімейство $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(F)$ є довірчим, то для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної множини $E \subset [0,1)$ досить використовувати покриття множинами $K_j \in \hat{\Phi}$.

Нехай $K'_j = \varphi(K_j)$. Оскільки K_j є об'єднанням суміжних циліндричних відрізків одного рангу, що належать до одного циліндра попереднього рангу, то з конструкції I-F-розкладу випливає, що $K'_j \in \hat{\Phi}'$ і $|K_j| = |K'_j|$.

Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$, $\{K_j\}$ — довільне її ε-покриття множинами з $\hat{\Phi}$. Тоді $\{K'_j\}$ буде ε-покриттям для $E' = \varphi(E)$.

Відповідні α-об'єми будуть рівними, а тому

$$H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\hat{\Phi}) = H^{\alpha}_{\varepsilon}(E',\hat{\Phi}').$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо:

$$H^{\alpha}(E,\hat{\Phi}) = H^{\alpha}(E',\hat{\Phi}').$$

Тому

$$\dim_H(E,\hat{\Phi}) = \dim_H(E',\hat{\Phi}').$$

Оскільки $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ — довірчі для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, то

$$\dim_H E = \dim_H E',\ \forall E \subset [0,1).$$

Отже, φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$. □

Зауваження 2.2. З останньої теореми випливає, що для доведення того, що φ завжди зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, досить довести довірчість сімейств $\hat{\Phi}(F)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$.

Зауваження 2.3. Дослідженням неперервних перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича, присвячена значна кількість робіт (див., наприклад, [8, 35, 37, 38]). Доведено, зокрема, що проблема дослідження неперервних DP-перетворень одиничного відрізка еквівалентна проблемі дослідження DP-властивостей неперервних функцій розподілу ймовірнісних мір. У той же час на сьогодні практично відсутні роботи по DP-властивостям перетворень, множина точок розриву яких всюди щільна на деякому відрізку. Природність таких досліджень очевидна: з одного боку, множина таких перетворень має потужність гіперконтинууму, а її доповнення — континуальне; з іншого боку, вивчення таких перетворень корисне з точки зору розвитку методів обчислення фрактальних розмірностей та дослідження фрактальних властивостей ймовірнісних розподілів.

Наступна теорема важлива для розвитку метричної теорії I-F-розкладів та дослідження лебегівської і спектральної структури ймовірнісних мір з незалежними I-F-символами.

Теорема 2.4. *Відображення φ зберігає міру Лебега на* $[0,1)$.

Доведення. Для доведення досить показати, що φ зберігає міру Лебега інтервалів. Нехай $A=(a,b)$ — довільний інтервал з $(0,1)$. І нехай $A' := \varphi((a,b))$. Для довільного $\varepsilon>0$ існує сукупність циліндрів $\hat{\Delta}_j$ одного рангу, для якої

$$\left(\bigcup_j \hat{\Delta}_j\right) \supset (a,b) \quad \text{і} \quad \sum_j \lambda(\hat{\Delta}_j) \le (b-a)+\varepsilon;$$

і сукупність циліндрів $\check{\Delta}_j$ одного рангу, для якої

$$\left(\bigcup_j \check{\Delta}_j\right) \subset (a,b) \quad \text{і} \quad \sum_j \lambda(\check{\Delta}_j) \ge (b-a)-\varepsilon.$$

Тоді такі ж співвідношення будуть виконуватися і для A', $\{\hat{\Delta}'_j\}$, $\{\check{\Delta}'_j\}$.

Тому

$$\sum_j \lambda(\hat{\Delta}_j)-\varepsilon \le \lambda((a,b)) \le \sum_j \lambda(\check{\Delta}_j)+\varepsilon$$

і

$$\sum_j \lambda(\hat{\Delta}'_j)-\varepsilon \le \lambda(A') \le \sum_j \lambda(\check{\Delta}'_j)+\varepsilon.$$

Звідси

$$\lambda((a,b))-2\varepsilon \le \lambda(A') \le \lambda((a,b))+2\varepsilon, \qquad \forall\varepsilon>0.$$

Отже, $\lambda(A')=\lambda((a,b))$. □

Зауваження 2.4. З останньої теореми випливає, що метричні теорії F-розкладів та I-F-розкладів є тотожними. Якщо ж додатково виконується припущення про довірчість сімейств $\hat{\Phi}(F)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}F)$, то розмірнісні теорії (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича) співпадають.

Варто зауважити, що для Q_∞-розкладу (див., [25]) умова (1), взагалі кажучи, не виконується (в якості контрприкладу можна взяти стохастичний вектор Q_∞, для якого $q_{2i-1}=\frac{A}{2^i}$, $q_{2i-2}=\frac{A}{3^i}$, $i\in N$, де $A=\frac{2}{3}$). На початку 2014 року у роботі І. Гарко ([18]), яка стала призером конкурсу студентських наукових робіт імені А. В. Скорохода з теорії ймовірностей у 2014 році, було знайдено наступні достатні умови довірчості сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$, що дозволяє узагальнити вказані вище результати для розкладу Люрота та його знакопочережної модифікації.

Лема 2.1 ([18]). *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство множин, які є об'єднанням суміжних циліндрів одного рангу, що належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу.*

Позначимо $r_i := \sum_{k=i+1}^{+\infty} q_k$. Якщо

$$\exists c > 0 \colon \quad \frac{q_i}{r_i} \le c, \ \forall i \in N, \tag{2}$$

то $\forall\ E \subset [0,1)$: $\dim_H E = \dim_H (E, \hat{\Phi})$.

Лема 2.2 ([18]). *Якщо виконується умова (2), то сімейство $\hat{\Phi}' = \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим.*

Зауваження 2.5. Дещо пізніше в роботі [19] було доведено, що сімейство множин $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ завжди є довірчим (без будь яких додаткових обмежень на кшталт умови (2)), а в роботі [20] доведено, що при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ і при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ породжене сімейство множин $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є завжди довірчим.

При доведенні наступної теореми проілюструємо метод, який використовувався в роботі [20] при доведенні довірчості сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при довільному виборі числа $I \in [0,1]$. Ця теорема нижче буде використана нами для доведення нових достатніх умов довірчості сімейств циліндрів $Q_\infty-$ та $I\text{-}Q_\infty$-зображень.

Теорема 2.5. *Нехай $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу.*

Тоді сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.

Доведення. Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з одиничного відрізка досить розглядати покриття інтервалами (a_j, b_j), де a_j та b_j належать деякій всюди щільній множині A (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості A множину всіх Q_∞-ірраціональних точок, тобто точок, які не є межовими для жодного циліндра жодного рангу Q_∞-зображення.

Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in A$, $b_j \in A$, $|E_j| \le \varepsilon$.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1]$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри (n_j+1)-го рангу. Нехай $M_0(j)$ — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j). Якщо $c_j := \sup \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ співпадає з $d_j := \inf \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, то $M_0(j) = \varnothing$.

Якщо $M_0(j) \ne \varnothing$, то $M_0(j) \in \hat{\Phi}(Q_\infty)$ і $|M_0(j)| \le |E_j|$.

Розглянемо окремо покриття множин (a_j, c_j) та $[d_j, b_j)$ множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Для множини $[d_j, b_j)$ існує $k_j \in N$ таке, що циліндр $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k_j}(b_j)0}$ міститься в $[d_j, b_j)$, а циліндр $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k_j-1}(b_j)0}$ містить проміжок $[d_j, b_j)$. Тоді $[d_j, b_j)$ можна покрити одним циліндром $R(j) := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k_j-1}(b_j)0}$, довжина якого не перевищує величини $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Нехай L_1 — об'єднання циліндрів (n_j+2)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, c_j), тобто

$$L_1 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)(\alpha_{n_j+2}(a_j)+i)}.$$

Аналогічно, нехай $L_k := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ldots(\alpha_{n_j+k+1}(a_j)+i)}$.

За побудовою, множина (a_j, c_j) покривається множиною $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ і при цьому $L_k \in \hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Нехай $q := \max_i q_i$. Оскільки L_k є підмножиною циліндра (n_j+k)-го рангу, то $|L_k| \le q^{n_j+k} \le q^k$.

Для заданої множини $E \subset [0,1)$, дійсних чисел $\alpha \in (0,1]$ та $\varepsilon > 0$ виберемо довільне $\delta \in (0,\alpha)$. Тоді α-об'єм описаного вище покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ дорівнює:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |L_k|^\alpha + |M_0(j)|^\alpha + |R(j)|^\alpha &\le \sum_{k=1}^{\infty} |L_k|^{\alpha-\delta} \cdot |L_k|^\delta + (1+\frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha \\
&\le |E_j|^{\alpha-\delta} \sum_{k=1}^{\infty} |L_k|^\delta + (1+\frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta} \\
&\le |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k\delta} + (1+\frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta} \\
&= |E_j|^{\alpha-\delta}(1+\frac{1}{q_0^\alpha}+\frac{q^\delta}{1-q^\delta}).
\end{aligned}$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0$ множину E_j можна покрити за допомогою не більш як зчисленної кількості множин з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$, діаметр кожної з яких не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$. Відповідний α-об'єм покриття не перевищує $S(\alpha,\delta)|E_j|^{\alpha-\delta}$, де $S(\alpha,\delta) = 1+\frac{1}{q_0^\alpha}+\frac{q^\delta}{1-q^\delta}$.

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \delta \in (0,\alpha)$ і довільної множини $E \subset [0,1)$ маємо:

$$H^\alpha(E) \le H^\alpha(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le S(\alpha,\delta) H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому $\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le \dim_H(E) + \delta$, $\forall \delta \in (0,\alpha)$, а, отже,

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le \dim_H(E),$$

звідки і випливає рівність

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \subset [0,1)$. □

Покажемо як отриманий результат можна застосувати для знаходження достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича для сімейства $\Phi(Q_\infty)$, яке містить лише циліндри Q_∞-зображення.

Теорема 2.6. *Нехай*

$$f(\alpha,k,m) := \frac{\sum_{i=k}^m q_i^\alpha}{\left(\sum_{i=k}^m q_i\right)^\alpha}$$

і

$$f^*(\alpha) := \sup_{k,m} f(\alpha,k,m).$$

Якщо

$$f^*(\alpha) < +\infty, \qquad \forall \alpha > 0, \tag{3}$$

то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ *— довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на* $[0,1)$.

Доведення. Нехай E — довільна підмножина $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$.

Нехай $\{\hat{E}_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $\hat{E}_j \in \hat{\Phi}(Q_\infty)$, $|\hat{E}_j| \le \varepsilon$:

$$\hat{E}_j = \bigcup_{i=k_j}^{m_j} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}, m_j \in N \cup \{\infty\}.$$

Оскільки

$$|\hat{E}_j|^\alpha = |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^\alpha \cdot \left(\sum_{i=k_j}^{m_j} q_i\right)^\alpha,$$

то

$$\sum_{i=k_j}^{m_j} |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}|^\alpha = |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^\alpha \cdot \sum_{i=k_j}^{m_j} q_i^\alpha \le |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}}|^\alpha \cdot f^*(\alpha) \cdot (\sum_{i=k_j}^{m_j} q_i)^\alpha$$
$$= f^*(\alpha) \cdot |\hat{E}_j|^\alpha.$$

Оцінимо α-об'єм вказаного покриття циліндрами:

$$\sum_j \sum_{i=k_j}^{m_j} |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_j-1}i}|^\alpha \le \sum_j |\hat{E}_j|^\alpha \cdot f^*(\alpha), \qquad \forall \{\hat{E}_j\}.$$

Отже,

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(Q_\infty)) \le f^*(\alpha) \cdot \sum_j |\hat{E}_j|^\alpha, \qquad \forall \{\hat{E}_j\}.$$

Тому

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(Q_\infty)) \le f^*(\alpha) \cdot H_\varepsilon^\alpha(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Оскільки сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ ширше за сімейство $\Phi(Q_\infty)$, то

$$H^\alpha(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le H^\alpha(E, \Phi(Q_\infty)) \le f^*(\alpha) \cdot H^\alpha(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Так як $f^*(\alpha) < +\infty, \forall \alpha > 0$, то

$$\dim_H(E, \Phi(Q_\infty)) = \dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)).$$

Оскільки сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$, то з останньої рівності випливає, що і $\Phi(Q_\infty)$ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1)$. □

Теорема 2.7. *Якщо сімейство циліндрів* $\Phi = \Phi(Q_\infty)$ *є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на* $[0,1)$, *то сімейство цидіндрів* $\Phi' = \Phi(I\text{-}Q_\infty)$ *буде довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині* $D(I)$, $\forall I \in [0,1]$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $I\text{-}Q_\infty$-зображення. Нехай E' — довільна підмножина з $D(I)$, $E = \varphi^{-1}(E')$.

Покажемо, що $\dim_H E' = \dim_H(E', \Phi(I\text{-}Q_\infty))$.

Нехай $\{E'_j\}$ — довільне ε-покриття множини E', $E'_j \in \Phi'$.

Тоді $\{E_j\}$ буде ε-покриттям множини E, причому $E_j \in \Phi$, $|E_j| = |E'_j|$. Тому

$$\sum_j |E_j|^\alpha = \sum_j |E'_j|^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Отже,

$$\inf_{|E_j| \le \varepsilon} \sum_j |E_j|^\alpha = \inf_{|E'_j| \le \varepsilon} \sum_j |E'_j|^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Тоді

$$H^\alpha(E, \Phi) = H^\alpha(E', \Phi'), \qquad \forall \alpha > 0,$$

а тому

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E', \Phi').$$

Оскільки Φ — довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$, то $\dim_H E = \dim_H(E, \Phi)$.

Так як відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$, то

$$\dim_H E = \dim_H E', \qquad \forall E \subset [0, 1).$$

Отже,

$$\dim_H(E', \Phi') = \dim_H(E, \Phi) = \dim_H E = \dim_H E',$$

тобто

$$\dim_H(E', \Phi') = \dim_H E', \qquad \forall E' \subset D(I).$$

□

Зауваження 2.6. У теоремі 2.6 було доведено довірчість сімейства $\Phi(Q_\infty)$ для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$ при виконанні умови (3). Тому з теореми 2.7 випливає, що при виконанні вказаної умови сімейство $\Phi' = \Phi(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині $D(I)$, $\forall I \in [0, 1]$.

3. Про лебегівську та спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними I-Q_∞-символами, та їх фрактальні властивості

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geq 0,$$

де

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \qquad \forall k \in N.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та I-Q_∞-розклад, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

яку називають випадковою величиною з незалежними I-Q_∞-символами.

Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними I-Q_∞-символами.

Використовуючи міркування, цілком аналогічні до тих, які наведені в [24] при дослідженні лебегівської структури розподілів випадкових величин з незалежними Q_∞-символами, отримуємо наступну теорему:

Теорема 3.1. *Випадкова величина ξ має розподіл чистого типу, причому*

1) μ_ξ є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} \cdot q_i} \right\} > 0;$$

2) μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

3) μ_ξ є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = 0 = P_{max}.$$

Зауваження 3.1. Цю теорему можна довести і іншим шляхом: отримати її як наслідок того факту, що відображення φ зберігає міру Лебега і відношення "бути дискретною", "бути абсолютно неперервною та сингулярною відносно міри Лебега" для ймовірнісних мір з незалежними Q_∞- та I-Q_∞-символами.

Наслідок 3.1. *Якщо ξ_k — незалежні і однаково розподілені, то*

1) μ_ξ дискретна, тоді і тільки тоді коли існує таке i_0, що $p_{i_0} = 1$;

2) μ_ξ абсолютно неперервна, тоді і тільки тоді коли $p_i = q_i$ для довільного $i \in \mathbb{N}$;

3) μ_ξ сингулярно неперервна у всіх інших випадках.

У випадку сингулярності дослідимо спектральну структуру розподілу випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами.

Означення 3.1 ([30])**.** Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GS-типу, якщо існує послідовність (неперекривних) відрізків $\{[a_i, b_i]\}$ таких, що

$$\begin{cases} [a_i, b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

Означення 3.2 ([30])**.** Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 називається мірою чистого GC-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \exists \varepsilon(x) > 0\colon [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu \text{ — множина нульової міри Лебега.} \end{cases}$$

Означення 3.3 ([30])**.** Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GP-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0: \ [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри Лебега.} \end{cases}$$

Сингулярно неперервні міри GC-, GP- та GS-типів утворюють неперетинні сімейства. Об'єднання цих сімейств не співпадає з сімейством всіх сингулярно неперервних ймовірнісних мір на R^1, оскільки існують сингулярно неперервні ймовірнісні міри на R^1, які не належать до жодного з вищеназваних класів, але має місце наступна теорема.

Теорема 3.2 ([30])**.** *Довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді*

$$\mu = \alpha_1 \mu^{GS} + \alpha_2 \mu^{GC} + \alpha_3 \mu^{GP}, \tag{4}$$

де $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; μ^{GS}, μ^{GC} і μ^{GP} — сингулярно неперервні ймовірнісні міри GS, GC та GP-типу відповідно.

З метою дослідження тополого-метричних властивостей розподілу випадкової величини з незалежними I-Q_∞-символами вивчимо властивості одного класу множин. Нехай $\mathbf{V} := \{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbf{V}_k \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\} =: N_0$. Означимо

$$C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}] := \{x \in [0,1]\colon x = \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}, i_k \in \mathbf{V}_k\}, \tag{5}$$

тобто, $C[I$-$Q_\infty, \{V_k\}]$ складається з точок, які можуть бути I-Q_∞-представленими з використанням лише символів i_k з множини $\mathbf{V}_k$ на k-й позиції їх I-Q_∞-представлення.

Якщо $\mathbf{V}_k \neq N_0$ для щонайменше одного $k < k_0$, і $\mathbf{V}_k = N_0$ для всіх $k \geq k_0$ (при деякому $k_0 > 1$), то $C[I$-$Q_\infty, \{V_k\}]$ є об'єднанням відрізків. У цьому випадку множину $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ отримаємо шляхом вилучення з $[0,1)$ всіх інтервалів $\dot\Delta_{i_1\ldots i_k}$, $k < k_0$ з $i_k \notin \mathbf{V}_k$ (де точка над Δ означає, що $\dot\Delta_{i_1\ldots i_k}$, є відкритим). Якщо умова $\mathbf{V}_k \neq N_0$ виконується для нескінченної кількості значень k, то, очевидно, $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є ніде не щільною множиною.

Вивчимо метричні властивості множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$. Нехай $S_k(\mathbf{V}) := \sum_{i\in\mathbf{V}_k} q_i$. Зауважимо, що $0 < S_k(\mathbf{V}) \leq 1$.

Лема 3.1. *Міра Лебега множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ дорівнює*

$$\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V}). \tag{6}$$

Доведення. Нехай $C_n := \bigcup_{i_k\in\mathbf{V}_k} \Delta_{i_1\ldots i_n}$. Легко бачити, що $C_n \subseteq C_{n-1}$ і

$$C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

З означення множин C_n випливає, що $\lambda(C_n) = \prod_{k=1}^{n} S_k(\mathbf{V})$, і, отже,

$$\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda(C_n) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V}).$$ □

Наслідок 3.2. *Нехай $W_k(\mathbf{V}) = 1 - S_k(\mathbf{V}) \geq 0$. Множина $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k(\mathbf{V}) = \infty\ . \tag{7}$$

Наступна теорема встановлює необхідні та достатні умови належності μ_ξ до кожного з чистих тополого-метричних (GS-, GC-, GP-) типів.

Теорема 3.3. *Сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними I-Q_∞-символами має чистий тополого-метричний тип, причому*

1) μ_ξ має чистий GS-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.

2) μ_ξ має чистий GC-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i\Big) = \infty\ . \tag{8}$$

3) μ_ξ має чистий GP–тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i:p_{ik}=0} q_i\Big) < \infty. \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо множину $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$, де послідовність $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ визначається матрицею P наступним чином: $\mathbf{V}_k = \{i\colon p_{ik} \neq 0\}$. Спектр міри μ_ξ співпадає з замиканням множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ (у цьому випадку межа множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є не більш як зчисленною). Тому для встановлення тополого-метричної структури множини S_ξ можемо застосувати вищенаведені результати.

Отже, якщо матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, то $\mathbf{V}_k = N_0$, $\forall k > k_0$ для деякого $k_0 > 0$. У цьому випадку $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є об'єднанням не більш як зчисленної кількості відрізків. Тому міра μ_ξ має GS-тип.

У протилежному випадку матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і, отже, $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ є ніде не щільною множиною. За попередньою лемою міра Лебега множини $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]$ дорівнює

$$\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V}) = \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i \in \mathbf{V}_k} q_i) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \sum_{i: p_{ik}=0} q_i).$$

Отже, або $\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$ (при умові, що виконується умова (8)), або $\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) > 0$, (при умові, що виконується умова (9)). Тому у цьому випадку μ_ξ є або чистого GC-типу, або чистого GP-типу.

Оскільки умови 1), 2) і 3) теореми є взаємно виключаючими і одна з них завжди виконується, то розподіл випадкової величини ξ з незалежними $I\text{-}Q_\infty$-символами завжди має чистий тополого-метричний тип. □

Покажемо як отримані в роботі результати дозволяють досліджувати фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними $I\text{-}Q_\infty$-символами.

Спочатку дослідимо фрактальні властивості спектра міри μ_ξ. Якщо I є двійково-раціональною точкою (тобто $\beta_k(I) = 1$ для всіх достатньо великих $k > k_0(I)$), то метрична і ймовірнісна теорія таких розкладів залишиться без змін, оскільки на всіх циліндрах, починаючи з $k_0(I)$, буде здійснюватись Q_∞-розбиття і відповідна ймовірнісна міра, звужена на циліндричні відрізки рангу $k_0 + 1$ співпадатиме зі звуженням на цей циліндр стандартної ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-символами. У тому ж випадку, коли I є ірраціональним числом (тобто послідовність $\beta_k(I)$ є неперіодичною), то розвинені в роботах [25, 26] методи незастосовні для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини ξ навіть у найпростішому випадку однакової розподіленості незалежних випадкових величин ξ_k, оскільки відповідні множини вже не будуть ні самоподібними, ні N-самоподібними.

Беручи до уваги той факт, що з довірчості сімейств $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ слідує DP-властивість відображення φ, з результатів Р. Нікіфорова і Г. Торбіна ([25]) про фрактальні властивості N-самоподібних множин та спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами випливає наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай ξ_k — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відповідно. Нехай $V := \{i : p_i > 0\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$.*

Якщо для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ рівняння $\sum_{i \in V} q_i^y = 1$ має корінь α_0 на $[0, 1]$, то $\forall\ I \in [0, 1]$ розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними $I\text{-}Q_\infty$-символами дорівнює $\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0$.

Якщо ж рівняння $\sum_{i \in V} q_i^y = 1$ не має коренів на $[0, 1]$, то

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V]) = \lim_{k \to \infty} \dim_H(C[I\text{-}Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in N$, $k \geq 2$.

Нагадаємо, що розмірністю Хаусдорфа ймовірнісної міри μ називається число

$$\dim_H \mu = \inf_{A \in \mathcal{A}_\mu} \{\dim_H(A)\},$$

де $\mathcal{A}_\mu = \{A \colon A \in \mathcal{B},\ \mu(A) = 1\}$ — множина всеможливих борелівських носіїв міри μ.

Теорема 3.5. *Нехай сімейство $\Phi(Q_\infty)$ цилиндів Q_∞-зображення є довірчими для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 p_{ij}}{j^2} < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln^2 q_i}{j^2} < \infty, \tag{10}$$

то при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ з незалежними I-Q_∞-цифрами дорівнює

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}, \tag{11}$$

де

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} h_j, \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$h_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad b_j = -\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \ln q_i.$$

Доведення. В роботі [24] доведено, що якщо система Φ циліндричних відрізків Q_∞-розкладу є довірчою і виконуються умови (10), то розмірність Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-символами дорівнює $\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}$.

Оскільки відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича довільної множини, то φ зберігає розмірність кожного носія міри з незалежними Q_∞-символами. Оскільки розподіли символів для Q_∞- та I-Q_∞-символів співпадають (за побудовою), то образом довільного носія (не обов'язково замкненого) першої міри є носій іншої міри. Тому відображення φ зберігає також розмірність Хаусдорфа міри. □

4. Подяки

Дослідження першого автора виконані за сприяння проекту "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування" (МОН України). Дослідження другого автора виконані за сприяння проектів STREVCOMS, проекту "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування" (МОН України), гранту 346300 для IMPAN від Simons Foundation. Дослідження третього автора виконані за сприяння проектів STREVCOMS, проекту "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування" (МОН України) та фонду Олександра фон Гумбольдта.

Автори вдячні рецензенту за слушні зауваження та пропозиції щодо покращення статті.

Література

1. S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, and G. Torbin, *On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions*, Bulletin des Sciences Mathématiques **138** (2014), no. 3, 440–455.
2. S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets*, Acta Arithmetica **130** (2007), no. 3, 215–230.
3. S. Albeverio, I. Garko, M. Ibragim, and G. Torbin, *Non-normal numbers: full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality.* (accepted for publication in Bulletin des Sciences Mathématiques (doi:10.1016/j.bulsci.2016.04.001, `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007449716300380`)
4. S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, and G. Torbin, *On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS.* (submitted to Mathematische Nachrichten, arXiv:1507.05672)
5. S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and $\widetilde{Q}$-measures*, Methods of Functional Analysis and Topology **17** (2011), no. 2, 97–111.
6. S. Albeverio, G. Ivanenko, M. Lebid, and G. Torbin, *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion.* (submitted for publication in Math. Research Letters, arXiv:1305.6036)
7. S. Albeverio, Yu. Kulyba, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On singularity of probability distributions connected with continued fractions*, Mathematische Nachrichten **288** (2015), no. 16, 1803–1813.

8. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension*, Central European Journal of Mathematics **6** (2008), no. 1, 119–128.
9. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits*, Ukrainian Mathematical Journal **57** (2005), no. 9, 1361–1370.
10. S. Albeverio and G. Torbin, *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 4, 356–367.
11. О. Барановський, М. Працьовитий, Б. Гетьман, *Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **12** (2011), 130–139.
12. О. Барановський, М. Працьовитий, Г. Торбін, *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування*, "Наук. думка", Київ, 2013.
13. M. Bernardi and C. Bondioli, *On some dimension problems for self-affine fractals*, Z. Anal. Anwendungen **18** (1999), no. 3, 733–751.
14. P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, John Willey and Sons, New York, 1965.
15. C. Cutler, *A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on* $\mathbb{R}$, Internat. J. Math. and Math. Sci. **4** (1988), 643–650.
16. K. Dajani and C. Kraaikamp, *Ergodic Theory of Numbers*, Mathematical Association of America, Washington, 2002.
17. J. Galambos, *Representations of real numbers by infinite series*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
18. I. Garko, *On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent x-Q_∞-digits.* (submitted to Theory of Stochastic Processes)
19. І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін, *G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **16** (2014), no. 1, 120–133.
20. І. Гарко, Р. Нікіфоров, Г. Торбін, *G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **16** (2014), no 2, 6–17.
21. Б. Гетьман, *Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **10** (2009), 88–99.
22. Ю. Жихарєва, М. Працьвитий, *Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **9** (2008), 200–211.
23. Yu. Kondratiev, M. Lebid, O. Slutskyi, and G. Torbin, *Cantor series expansions and packing dimension faithfulness.* (submitted to Advances in Mathematics, arXiv:1507.05663)
24. Р. Нікіфоров, Г. Торбін, *Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **9** (2008), 80–103.
25. Р. Нікіфоров, Г. Торбін, *Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами*, Теорія ймовірностей та мат. статистика **86** (2013), 150–162.
26. Р. Нікіфоров, Г. Торбін, *Про розмірність Хаусдорфа–Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **13** (2012), 151–162.
27. Y. Peres and G. Torbin, *Continued fractions and dimensional gaps.* (in preparation)
28. І. Працьовита, *Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду (O_2- та $\bar{O}_2$-зображення), їх геометрія та застосування*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **9** (2008), 128–147.
29. М. Працьовитий, М. Задніпряний, *Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **11** (2011), 76–85.
30. М. Працьовитий, Г. Торбін, *Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **7** (2006), 140–151.
31. М. Працьовитий, Г. Торбін, *Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **4** (2003), 207–205.
32. М. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, Київ, 1998.

33. C. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, London, 1970.
34. F. Schweiger, *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Clarendon Press and Oxford University Press, Oxford–New York, 1995.
35. Г. Торбін, *Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами*, Доповіді НАНУ (2008), no. 4, 44–50.
36. G. Torbin, *Multifractal analysis of singularly continuous probability measures*, Ukrainian Mathematical Journal, **57** (2005), no. 5, 837–857.
37. Г. Торбін, *Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають фрактальну розмірність*, Математичний вісник Наукового Товариства імені Т.Шевченка **4** (2007), no. 4, 275–283.
38. G. Torbin, *Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension*, Theory of Stochastic Processes **13 (29)** (2007), no. 1–2, 281–293.
39. А. Турбин, Н. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, "Наук. думка", Киев, 1992.

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: garko.iryna@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: rnikiforov@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна; відділ фрактального аналізу Інституту математики НАН України, вул. Терещенківська 3, Київ 01130, Україна
Адреса електронної пошти: torbin7@gmail.com, torbin@npu.edu.ua

Надійшла 05/05/2016