Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 36–49

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 36–49

РОЗПОДІЛИ ПЕРЕСТРИБКІВ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕСІВ, ЗАДАНИХ НА ЛАНЦЮГУ МАРКОВА

УДК 519.21

М. С. ГЕРИЧ

Анотація. В статті вивчаються розподіли перестрибкових функціоналів для майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ланцюгу Маркова. Для цих процесів отримані також граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні в термінах твірних перетворень додатних стрибків та матриці, що визначає розподіл доповнення до максимуму.

Abstract. In this paper we study the distributions of overshoots for the almost semi-continuous processes defined on a Markov chain. For these processes, we get the limit distributions of overshoots over the infinitely far and zero levels.

Аннотация. В статье изучаются совместные распределения момента достижения уровня, величины перескока, недоскока для определённого уровня и скачка, который накрывает уровень в случае почти полунепрерывного снизу процесса на цепи Маркова. Для этих процессов получены также предельные распределения перескоков через бесконечно удаленный и нулевой уровни.

1. Вступ

Опис процесів, заданих на ланцюгах Маркова (ЛМ) або керованих ланцюгами Маркова, наводиться в роботах [1]-[3], в [2] їх називають напівмарковськими, в [1], [3] – однорідними за другою компонентою. Граничні задачі для процесів Леві з неперервним розподілом стрибків на ЛМ вивчались в [2]-[4]. Дослідженню розподілів граничних функціоналів для цих процесів присвячені роботи [5]-[6]. Для майже напівнеперервних процесів (з показниково розподіленими стрибками одного знаку) такі задачі були дослідженні в [6]. Для випадкових блукань S_n на ЛМ одержано факторизаційні зображення для подвійних перетворень значень блукання в момент перестрибу та в безпосередній момент перед перестрибом в [7].

Інколи замість перестрибкових функціоналів, тобто перестрибків або недострибків процесу через рівень x, розглядають значення процесу після перестрибку або беспосередньо перед перестрибком (як і для блукання в [7]), а стрибок що накриває рівень x є різницею цих значень процесу(блукання).

Мета роботи: отримати співвідношення для сумісних та маргінальних розподілів перестрибкових функцоналів у випадку майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ЛМ, які детально описані в роботі [8], а також знайти граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні.

Зауважимо, що скалярні значення $\xi(t)$ залежать від значення "керуючого"ЛМ $x(\cdot)$ в початковий момент 0 та змінного додатного моменту $t > 0$. Тому відповідні розподіли і усереднення (мат. сподівання) є матричними характеристиками, що надалі будуть позначатися жирним шрифтом: $\mathbf{P}\{\cdot\}$, $\mathbf{E}[\cdot]$. Наприклад: $\mathbf{P}\{\xi(t) = l\} =$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C40; Secondary 60G12.

Ключові слова і фрази. майже напівнеперервний процес заданий на ланцюгу Маркова, перестибкові функціонали, розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні.

$\|\mathbf{P}\{\xi(t)=l, x(t)=r|x(0)=k\}\|=\|p_{kr}(t,l)\|$, $\mathbf{E}[z^{\xi(t)}]=\|\mathbf{E}[z^{\xi(t)}, x(t)=r|x(0)=k]\|=\|E_{kr}[z^{\xi(t)}]\|$.

2. Майже напівнеперервний цілозначний процес Пуассона

Розглянемо двовимірний процес Маркова:

$$\mathbf{Y}(t)=\{\xi(t), x(t)\}, \qquad t\geq 0,$$

який детально описаний в роботі [8]. Тут $x(t)$ – скінченний ергодичний ЛМ з множиною станів $\mathbb{E}=\{1,\ldots,m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t)=\|\mathbf{P}\{x(t)=r|x(0)=k\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}=e^{\mathbf{Q}t}, \qquad t>0,$$

і твірною матрицею $\mathbf{Q}=\mathbf{N}(\mathbf{P}-\mathbf{I})$, де $\mathbf{N}=\|\delta_{kr}n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\{n_k>0, k\in\mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин $\zeta_k^{(\cdot)}$ – часів перебування $x(t)$ в стані k, $\mathbf{P}=\|p_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$ – матриця перехідних ймовірностей вкладеного ЛМ $y_n=x(\sigma_n+0)$, де σ_n — момент n-ої зміни станів $x(t)$, $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ — стаціонарний розподіл; $\xi(t)$ – однорідний процес з умовно незалежними приростами при фіксованих значеннях $x(t)$ (див. [5]).

Еволюція процесу $\mathbf{Y}(t)$ описується матричною генератрисою

$$\mathbf{g}_t(z)=\|\mathbf{E}[z^{\xi(t)},\, x(t)=r|\, x(0)=k]\|=\mathbf{E}z^{\xi(t)}=e^{t\mathbf{K}(z)}, \qquad \mathbf{K}(1)=\mathbf{Q}, \tag{1}$$

де матрична кумулянта $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$\mathbf{K}(z)=\sum_{x\neq 0}(z^x-1)\mathbf{\Pi}_0(x)+\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{\Pi}_0(x)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x)+\mathbf{N}\mathbf{f}(x), \tag{2}$$

тобто в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z)=\mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z)-\mathbf{I})+\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P})+\mathbf{Q}; \tag{3}$$

$\mathbf{\Lambda}=\|\delta_{kr}\lambda_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\delta_{kr}=I_{\{k=r\}}$, λ_k — інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом стрибків $\mathbf{p}(x)=\|\delta_{kr}\mathbf{P}\{\xi_k^{(1)}=x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, λ_k – параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k', які визначають час між двома сусідніми стрибками процесу $\xi(t)$. При цьому розподіл стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$ на переходах ЛМ $x(t)$ та його генератриса не залежать від верхнього індекса цих стрибків:

$$\mathbf{f}(x)=\|p_{kr}\mathbf{P}\{\chi_{kr}^{(\cdot)}=x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}; \qquad \widetilde{\mathbf{f}}(z)=\|p_{kr}\mathbf{E}z^{\chi_{kr}^{(\cdot)}}\|.$$

$\widetilde{\mathbf{f}}(z)=\mathbf{P}$, якщо $\mathbf{P}\{\chi_{kr}^{(\cdot)}=x\}=0$ при $x\neq 0$, тобто при відсутності стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$. Ще позначимо розподіл 1-го сумарного стрибка $\xi(t)$ на ЛМ через $\mathbf{\Pi}_0(x)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x)+\mathbf{N}\mathbf{f}(x)$, що є дискретним аналогом стрибкової міри Леві $\Pi(dx)=\lambda dF(x)$ для числового складного пуассонівського процесу (див. (1.7) в [10]).

Означення 2.1. Введений таким чином процес $\mathbf{Y}(t)$ називається складним цілозначним(гратчастим) процесом Пуассона, заданим на скінченному ЛМ.

Означення 2.2. Складний цілозначний процес Пуассона $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z)=\mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}-\mathbf{I}]+\mathbf{\Lambda_2}\sum_{x<0}(z^x-1)\mathbf{p}_2(x)$$
$$+\mathbf{N}\sum_{x<0}(z^x-1)\mathbf{f}(x)+\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{C}=\|\delta_{kr}c_k\|,\ 0<c_k<1,$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}-\mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)-\mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P}] + \mathbf{Q}.$$

Означення 2.3. Складний цілозначний процес Пуассона $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}\sum_{x>0}(z^x-1)\mathbf{p}_1(x) + \mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{I}] + \mathbf{N}\sum_{x>0}(z^x-1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \quad (4)$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)-\mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P}] + \mathbf{Q},$$
$$\mathbf{B} = \|\delta_{kr}b_k\|, \qquad 0 < b_k < 1.$$

Введемо позначення деяких функціоналів для $\xi(t)$: екстремуми процесу на інтервалі $[0;t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t);$$
$$\xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t);$$

функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t>0\colon \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,$$
$$\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x)-0), \qquad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x).$$

З останніх позначень випливає, що:

$$\xi(\tau^+(x)-0) = x - \gamma_+(x); \qquad \xi(\tau^+(x)+0) = x + \gamma^+(x),$$
$$\gamma_x^+ = \xi(\tau^+(x)+0) - \xi(\tau^+(x)-0).$$

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$:

$$\mathbf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}, \qquad s>0,\ t\ge 0,$$
$$\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k, \qquad 0<\varepsilon<1,\ k=0,1,2,\dots$$

Розподіли екстремумів в момент θ_s позначимо

$$\mathbf{p}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=x\} = \|\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=x,\ x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\| = \|P_{kr}\{\xi^+(\theta_s)=x\}\|,$$
$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}^+;$$
$$\mathbf{p}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=x\},\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}^-;$$
$$\mathbf{p}_x(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z};$$
$$\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{p}_0^+(s),\ \mathbf{p}_-(s) = \mathbf{p}_0^-(s),\ \mathbf{p}^-(s) = \check{\mathbf{p}}_0^-(s),\ \mathbf{p}^+(s) = \check{\mathbf{p}}_0^-(s);$$
$$\mathbf{P}(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\},\ \overline{\mathbf{P}}(s,x) = \mathbf{P}_s - \mathbf{P}(s,x);$$
$$\mathbf{q}_\pm(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_\pm(s),\ \mathbf{q}^\pm(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^\pm(s).$$

Їх відповідні матричні твірні функції позначемо

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|\mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)}, x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\| = \|E_{kr}[z^{\xi(\theta_s)}]\|,$$
$$\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}, \qquad \mathbf{g}_-(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)}, \qquad \mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},$$
$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}.$$

Для функціональних послідовностей $\{\mathcal{R}_x, x = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ введемо поняття кілець, розширених кілець і відповідних півкілець та їх проекцій. А саме, позначимо кільце твірних функцій $\widetilde{\mathcal{R}}(z)$

$$\mathbb{L}\colon \left\{\widetilde{\mathcal{R}}(z) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mid \mathcal{R}_x \mid < \infty, |z| = 1\right\}$$

із операцією "множення" типу згортки та звичайною операцією додавання. А розширення кільця $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{I}}\colon \{\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathcal{R}}(z) = \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{I}}(z),\ \det \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{I}}(z) \neq 0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільця на півосях та їх розширення

$$\mathbb{L}^{\pm}\colon \left\{\widetilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z) = \sum_{x=0}^{\pm\infty} z^x \mathcal{R}_x\right\}, \qquad \mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}}\{\mathbf{I} - \widetilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z), \det[\mathbf{I} - \widetilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z)] \neq 0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z| \geq 1$ ($|z| \leq 1$) $\widetilde{\mathcal{R}}^{\pm1}_{\pm}(z) \in \mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}}$. Визначимо також операції проектування

$$[\widetilde{\mathcal{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathcal{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathcal{R}}(z)]^0_+ = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]^0_- = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathcal{R}_x,$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}(z) = [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]^0_- = [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathcal{R}}(z)]^0_+.$$

Після застосування інтегрального перетворення Лапласа-Карсона по t до $\mathbf{g}_t(z)$ в (1) та $\mathbf{P}(t)$ отримаємо

$$\mathbf{g}(s, z) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{g}_t(z)\, dt = \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}_s = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{P}(t)\, dt = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{6}$$

Теорема 2.1 ([5]). *Для двовимірного процесу $Y(t)$ при $s > 0$ має місце матрична о. ф. т. на $\mid z \mid = 1$:*

$$\boldsymbol{g}(s, z) = \boldsymbol{E} z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \boldsymbol{g}_+(s, z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^-(s, z), \\ \boldsymbol{g}_-(s, z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^+(s, z). \end{cases} \tag{7}$$

Зауважимо, що розподіли екстремумів для майже напівнеперервних процесів на ЛМ були встановлені в [11]. Надалі будемо позначати

$$\mathbf{p}^-_*(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s),\ \mathbf{p}^*_-(s) = \mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \mathbf{p}^+_*(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s),\ \mathbf{p}^*_+(s) = \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1};$$

$$\mathbf{q}^-_*(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s),\ \mathbf{q}^*_-(s) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \mathbf{q}^+_*(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s),\ \mathbf{q}^*_+(s) = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}.$$

Причому ці матриці пов'язані наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{p}^{\pm}_*(s) + \mathbf{q}^{\pm}_*(s) = \mathbf{I},\ \mathbf{p}^*_{\pm}(s) + \mathbf{q}^*_{\pm}(s) = \mathbf{I}.$$

Позначимо генератриси перестрибкових функціоналів

$$\begin{gathered} \mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma^+(x)} u_2^{\gamma_+(x)}, u_3^{\gamma_x^+},\ \ \tau^+(x) < \infty], \\ \mathbf{V}_i(s, x, u_i) = \mathbf{V}_i(s, x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r = 1,\, r \neq i}, \end{gathered} \tag{8}$$

та їхні твірні перетворення по x:

$$\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\mathbf{v}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=$$

$$=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_1^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_2^{\gamma_+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},u_3^{\gamma^+_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}},\;\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty],$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}_i(s,x,u_i)=\widetilde{\mathbf{v}}_i(s,x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i}.$$

Функції

$$\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{l=x+1}^{+\infty}u_1^{l-x}u_2^xu_3^l\mathbf{\Pi}_0(l),\;\;x\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\},$$

є правими частинами різницевих рівнянь для спільних генератрис (8) розподілу перестрибкових функціоналів з оператором $\mathbf{L}$ (див. (3) у [8]) і виражаються через відповідні твірні перетворення розподілу $\mathbf{\Pi}_0(l)$ додатних стрибків, який служить ядром оператора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3),\;\;\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{A}(x,1,1,1)=\sum_{l=x+1}^{+\infty}\mathbf{\Pi}_0(l)=\mathbf{A}_x(1),\;\mathbf{a}(z)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{A}_x(1),$$

$$\mathbf{A}_i(x,u_i)=\mathbf{A}_i(x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},\;\;\widetilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon,u_i)=\widetilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},$$

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}^0_+(z)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{\Pi}_0(x).$$

Множина значень ланцюга $y^*_x=x(\tau^\pm(x))$ може звузитися за рахунок недосяжності рівня $x>0$ ($x<0$) процесом $\xi(t)$. Тому будемо накладати наступну умову:

$$\forall k\in\mathbb{E}\colon\mathbf{P}\{y^*_x=k\}>0.$$

Крім того будемо припускати, що

$$\|\mathbb{E}[|\xi(t)|,\;x(t)=r|x(0)=k]\|<\infty. \tag{9}$$

Генератриси $\tau^\pm(x)$ розглядаються на ланцюгу y^*_x відповідно
$\mathbf{T}^\pm_*(s,x)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^\pm(x)},\;\tau^\pm(x)<\infty]=\|E[e^{-s\tau^\pm(x)},\;x(\tau^\pm(x))=r|x(0)=k]\|$.

Зв'язок між розподілами $\xi^\pm(\theta_s)$ та генератрисами $\tau^\pm(x)$ визначається наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)},\;\tau^+(x)<\infty]\mathbf{P}_s=\mathbf{T}^+_*(s,x)\mathbf{P}_s. \tag{10}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\}=\mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x)},\;\tau^-(x)<\infty]\mathbf{P}_s=\mathbf{T}^-_*(s,x)\mathbf{P}_s. \tag{11}$$

В [9] встановлені наступні твердження

Теорема 2.2 ([9])**.** *Для довільного цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ пара функціоналів $\{\tau^+(x),\,\gamma^+(x)\}$, зв'язана з $\xi^+(\theta_s)$ наступними співвідношеннями:*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}u^{\gamma^+(x)},\;\tau^+(x)<\infty]=\mathbf{E}[u^{\xi^+(\theta_s)-x},\;\xi^+(\theta_s)>x](\mathbf{g}_+(s,u))^{-1}, \tag{12}$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\;\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty]=\frac{(1-\varepsilon)u}{u-\varepsilon}(\boldsymbol{g}_+(s,u)-\boldsymbol{g}_+(s,\varepsilon))(\boldsymbol{g}_+(s,u))^{-1}. \tag{13}$$

Співвідношення (13) є матричним узагальненням другої факторизаційної тотожності (2 ф. т.) (7.17) в [10].

Лема 2.1. [9] *Для довільного цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ твірне перетворення спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x),\ \gamma^+(x),\ \gamma_+(x),\ \gamma_x^+\}$ виражається наступним чином*

$$s\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3)=\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)]_+^0, \tag{14}$$

де $\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)$ *має вигляд*

$$\mathbf{a}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\frac{u_1}{u_1-zu_2}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_+^0(u_1u_3)-\widetilde{\mathbf{\Pi}}_+^0(u_2u_3z)). \tag{15}$$

З леми 2.1 після обернення (14) по z випливає

Лема 2.2. *Спільна генератриса (8) визначається через згортку*

$$s\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x-y,u_1,u_2,u_3), \tag{16}$$

де функція $\mathbf{W}(s,x-y,u_1,u_2,u_3)$ *є оберненням проекційної дужки в (14), причому*

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_y^-(s)\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{w}(s,z,u_1,u_2,u_3)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{W}_i(s,x,u_i)=\mathbf{W}_i(s,x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},\ \ \widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_i)=\widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},$$

$$\mathbf{K}(s,x)=\mathbf{W}(s,x,1,1,1)=\sum_{y=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_y^-(s)\mathbf{A}_{x-y}(1),\ \mathbf{k}(s,z)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{K}(s,x).$$

На підставі леми 2.1 та 2.2 встановлюється

Теорема 2.3. *Якщо виконується умова (9), тоді*

$$\mathbf{g}_+(s,z)=\left[\mathbf{I}+(1-z)s^{-1}\mathbf{k}(s,z)\right]^{-1}\mathbf{P}_s,\ \mathbf{p}_+(s)=\left[\mathbf{I}+s^{-1}\mathbf{k}(s,0)\right]^{-1}\mathbf{P}_s. \tag{17}$$

$$\mathbf{g}_+(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1(s,0,z))^{-1}\,\mathbf{p}_+(s). \tag{18}$$

Доведення. Підставимо замість $u_1=u_2=u_3=1$ в (14) і отримаємо

$$s\mathbf{v}(s,z,1,1,1)=\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z)]_+^0. \tag{19}$$

Розглянемо множник

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z)\right]_+^0&=\left[\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\check{\mathbf{p}}_x^-(s)\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{A}_x(1)\right]_+^0=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\sum_{k=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_k^-(s)\mathbf{A}_{x-k}(1)\\&=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{W}(s,x,1,1,1)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{K}(s,x)=\mathbf{k}(s,z).\end{aligned}$$

Використовуючи (9) та (10) і означення $\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3)$ отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(s,z,1,1,1) &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{V}(s,x,1,1,1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x)<\infty\right] \\ &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\}\mathbf{P}_s^{-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \sum_{k=x+1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s)\mathbf{P}_s^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s) \sum_{x=0}^{k-1} z^x \mathbf{P}_s^{-1} \\ &= \frac{1}{1-z}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{p}_k^+(s) - \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathbf{p}_k^+(s)\right]\mathbf{P}_s^{-1} = \frac{1}{z-1}\left[\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1} - \mathbf{I}\right].\end{aligned}$$

Підсталяючи отримані співвідношення в (19) одержимо перше співвідношення в (17). Друге співвідношення в (17) випливає з першого при граничному переході $z \to 0$. (18) отримаємо з (13) при граничному переході $\varepsilon \to 0$ □

В роботах [8] і [11] одержано вигляди для матричних параметрів деяких розподілів:
у випадку майже напівнеперервного зверху процесу

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C},\ \mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s) + \mathbf{C}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s);$$

у випадку майже напівнеперервного знизу процесу

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s).$$

$\mathbf{R}(s)$ служить матричним параметром геометричного розподілу $\overline{\xi}(\theta_s)$.
Згідно властивостей цих параметрів встановлються

Теорема 2.4. *Для майже напівнеперервного зверху процесу:*
1). *Якщо* $m_1^0 \geq 0$, *тоді* $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$*;*
2). *Якщо* $m_1^0 < 0$, *тоді* $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$ *та* $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$.
Для майже напівнеперервного знизу процесу:
3). *Якщо* $m_1^0 \leq 0$, *тоді* $|\mathbf{p}_-^*(0)| = |\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$*;*
4). *Якщо* $m_1^0 > 0$, *тоді* $|\mathbf{p}_-^*(0)| \neq 0$ *та* $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$.

Доведення. Розлянемо майже напівнеперервний зверху процес.
Якщо $m_1^0 \geq 0$ тоді при $s \to 0$ (згідно результатів в [8]) маємо

$$\mathbf{p}_+^*(0) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1}\right)(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -(\mathbf{P}_* - \mathbf{I}) = -\mathbf{Q}_*,$$

$$\mathbf{p}_*^+(0) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}\right) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -\mathbf{Q}_*.$$

А звідси випливає, що $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$.
Якщо $m_1^0 < 0$ (згідно результатів в [8] і [11]) маємо $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$ та $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$.
Нехай $Y(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес, тоді $\acute{Y}(t) = \{-\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний зверху процес, при цьому $m_1^0 = -\acute{m}_1^0$ та $\acute{\mathbf{p}}_+^*(s) = \mathbf{p}_-^*(s)$, $\acute{\mathbf{p}}_*^+(s) = \mathbf{p}_*^-(s)$. Тому з 1), 2) випливає 3), 4) відповідно. □

Далі для майже напівнеперервних зверху процесів розглянемо

$$\mathbf{m}_-(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_-(s,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 < 0,$$

$$\mathbf{m}_0(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_-(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^+(s), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 = 0,$$

а для майже напівнеперервних знизу процесів

$$\mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 > 0,$$

$$\mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 = 0,$$

то з теорем 1-4 в [8] випливає

Наслідок 2.1. *Для майже напівнеперервного зверху процесу справедливі наступні співвідношення*

$$\mathbf{m}_-(1) = \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_-(\varepsilon) = -\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{m}_0(1) = \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0\left(\mathbf{I}-\mathbf{C}\right)^{-1}, \tag{20}$$

для майже напівнеперервного знизу процесу маємо

$$\mathbf{m}_+(1) = \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{m}^0(1) = \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}^0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Доведення. Розглянемо майже напівнеперервний знизу процес.
Згідно з лемою 2 в [12] та теоремою 3 в [8] у випадку $m_1^0 > 0$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_+(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 1}\lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)\lim_{s\to 0} s^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\lim_{s\to 0} s^{-1}\left[s\mathbf{I}+s(\varepsilon-1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\right](\mathbf{I}-\mathbf{B}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) = \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0,
\end{aligned}$$

а при $m_1^0 = 0$ згідно з лемою 2 в [12] та співвідношенням (55) із [8] отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}^0(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 1}\lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)\lim_{s\to 0} s^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1} \\
&\qquad\qquad \times(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\lim_{s\to 0}(\mathbf{I}+(\varepsilon-1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)^2(\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Формули (20) отримуємо із (21), після відповідних перепозначень, якщо розглянути замість $Y(t) = \{\xi(t),\, x(t)\}$ – майже напівнеперервного зверху процесу, $\acute{Y}(t) = \{-\xi(t),\, x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес. □

3. Генератриси перестрибків додатного рівня для майже напівнеперервного знизу процесу

Надалі розглядаються майже напівнеперервні знизу процеси з кумулянтою (4). Знайдемо для цих процесів вигляд для спільної генератриси перестрибкових функціоналів та генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_x^+\}$ при $x \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\,0\}$.

З леми 2.2 випливає

Лема 3.1. *Для процесу $Y(t)$ з кумулянтою (4) має місце співвідношення (16), де $\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)$ визначаються через $\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)$*

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \mathbf{p}^-(s)\Big[&\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3) + u_1(u_1\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\
&\cdot\Big\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\right) + \\
&+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l - u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l)\Big\}\Big].
\end{aligned} \tag{22}$$

Доведення. Формула (16) випливає з (14) після обернення по z. Використовуючи співвідношення для $\check{\mathbf{p}}_y^-(s)$ (див. теорема 3 в [11]) і означення $\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)$ маємо

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \mathbf{p}^-(s)\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3) + \mathbf{p}^-(s)\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3), \tag{23}$$

де $\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3)$ виражається через згортку $\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)$ і геометричний розподіл $\overline{\xi}(\theta_s)$ з матричним параметром $\mathbf{R}(s)$:

$$\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y=-\infty}^{-1} (\mathbf{R}(s))^{-y}(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(s))^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3) =$$

$$= (\mathbf{I} - u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=x+2}^{\infty} \left[u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1} - (\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l\right] u_3^l(\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l) =$$

$$= u_1(u_1\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\Big\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\right) +$$

$$\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l - u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l)\Big\}.$$

Підставивши в (23) останнє співвідношення отримаємо (22). □

Позначимо $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$. Розглянемо обернення генератрис $\mathbf{V}_i(s,x,u_i) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}u_i^{\gamma_i(x)},\ \tau^+(x) < \infty\right]$, які для скалярного випадку визначають багатозначну функцію банкрутства (див. [10]). Для цього спочатку розглянемо наступні представлення функцій $\mathbf{W}_i(s,x,u_i)$, зручні для обернення по u_i.

Лема 3.2. *Для майже напівнеперервного знизу процесу $Y(t)$ з кумулянтою (4) спільна генетатриса $\{\tau^+(x),\ \gamma_i(x)\}$ визначається співвідношенням*

$$s\mathbf{V}_i(s,x,u_i) = \sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}_i(s,x-y,u_i),\ \ i=\overline{1,3}, \tag{24}$$

де функції $\mathbf{W}(s,x,\dots)$ згідно з (22) мають вигляд

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2) = \mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}(x,u_1,u_2)+$$

$$(\mathbf{I} - u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big(u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1} - (\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l\Big)(\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l)], \tag{25}$$

$$\mathbf{W}_1(s,x,u_1) = \mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_1(x,u_1) + u_1(u_1\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}\cdot$$

$$\cdot\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}_1(x+1,u_1) - \mathbf{A}_1(x+1,\mathbf{R}(s))\right) +$$

$$+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} - u_1^{l-(x+1)}\Big)\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l)\}], \tag{26}$$

$$\mathbf{W}_2(s,x,u_2) = \mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_2(x,u_2) + (\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot$$

$$\cdot\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}_2(x+1,u_2) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2\mathbf{R}(s))\right) +$$

$$+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l - u_2^{x+1}\Big)\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l)\}], \tag{27}$$

$$\mathbf{W}_3(s,x,u_3)=\mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_3(x,u_3)+(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\ \cdot\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}_3(x+1,u_3)-(\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_3\mathbf{R}(s))\right)+ \\ +\sum_{l=x+2}^{+\infty}\left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}-\mathbf{I}\right)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l)\}]. \quad (28)$$

Доведення. З (22) при $u_3=1$ випливає (25). Оскільки $\mathbf{W}_1(s,x,u_1)=\mathbf{W}(s,x,u_1,1,1)$, $\mathbf{W}_2(s,x,u_2)=\mathbf{W}(s,x,1,u_2,1)$, $\mathbf{W}_3(s,x,u_3)=\mathbf{W}(s,x,1,1,u_3)$ то із (22) отримуємо відповідно (26)-(28). □

Врахувавши (26)-(28) в (24) отримаємо необхідні представлення для відповідних генератрис $\mathbf{V}_i(s,x,u_i)$ пар функціоналів.

Обернувши (24) по u_1, u_2, u_3 отримаємо (29)-(31)

Наслідок 3.1. *Для процесу $Y(t)$ з кумулянтою (4) мають місце наступні формули ($l\in\mathbb{Z}_+\cup 0$)*

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(x)=l,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\ \gamma_1(x)=l,\ \tau^+(x)<\infty\right]= \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0(x-y-j+l),\ l\in\mathbb{Z}_+, \quad (29)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(x)=0,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\ \gamma_1(x)=0,\ \tau^+(x)<\infty\right]=0;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_2(x)=l,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\ \gamma_2(x)=l,\ \tau^+(x)<\infty\right]= \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{l}\mathbf{p}_{x-y}^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\check{\mathbf{p}}_{y-l}^-(s)\mathbf{A}_l(1),\ l\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}; \quad (30)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_3(x)=l,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\ \gamma_3(x)=l,\ \tau^+(x)<\infty\right]= \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{l}\mathbf{p}_{x-y}^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=y-l+1}^{\infty}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0(j),\ l\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}. \quad (31)$$

4. Перестрибки через нескінченно віддалений рівень

Розглянемо маргінальні розподіли функціоналів $\gamma_i(x)$ у випадку $x=\infty$. Для цього спочатку доведемо наступну лему.

Лема 4.1. *Для майже напівнеперервного знизу процесу $\mathbf{Y}(t)$ з кумулянтою (4) має місце співвідношення*

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=s^{-1}\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3), \quad (32)$$

де

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=\mathbf{p}_*^-(s)\Big[\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)+(1-\varepsilon)u_2(\mathbf{I}-u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\ \cdot\sum_{l=2}^{\infty}u_3^l\Big\{(1-\varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}(u_1^{l-1}-(\varepsilon u_2)^{l-1})- \quad (33) \\ (\mathbf{I}-\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1})^{-1}((u_2\mathbf{R}(s))^{l-1}-(\varepsilon u_2)^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l)\Big].$$

Доведення. З формули (21) випливає (32) наступним чином

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x s^{-1}\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x-y,u_1,u_2,u_3)=$$
$$s^{-1}(1-\varepsilon)\sum_{y=0}^{\infty}\varepsilon^y\mathbf{p}_y^+(s)\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,l,u_1,u_2,u_3)=$$
$$s^{-1}\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3).$$

Згідно з (22) отримаємо

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s)\Big[\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)+u_1(u_1\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot$$
$$\cdot\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-(\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\right)+$$
$$+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l-u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big)u_3^l\mathbf{B\Pi}_0(l)\}\Big]=\sum_{k=1}^{5}\mathbf{I}_k,$$

де кожен доданок останнього співвідношення після відповідних перетворень виражається через $\mathbf{R}(s)$ та значення функцій $\mathbf{A}(1,u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2u_3)$, $\mathbf{A}_3(1,\mathbf{R}(s)u_2u_3)$ та деякі складніші згортки з $\mathbf{B\Pi}_0(l)$.

$$\mathbf{I}_1=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)=\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon,u_1,u_2,u_3);$$

$$\mathbf{I}_2=\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}\Big(\mathbf{A}(1,u_1,u_2,u_3)-\varepsilon^{-1}\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2u_3)\Big);$$

$$\mathbf{I}_3=\sum_{x=0}^{\infty}(\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1})^x\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))=$$
$$=\left(\mathbf{I}-\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1}\right)^{-1}\Big(\mathbf{A}_3(1,u_2u_3\mathbf{R}(s))-\varepsilon^{-1}\mathbf{R}(s)\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2u_3)\Big);$$

$$\mathbf{I}_4=\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\sum_{l=x+2}^{\infty}(u_2u_3)^l(\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}\mathbf{B\Pi}_0(l)=$$
$$=\left(\mathbf{I}-\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1}\right)^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}(u_2u_3)^l\Big((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1}\Big)\mathbf{B\Pi}_0(l);$$

$$\mathbf{I}_5=\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\sum_{l=x+2}^{\infty}u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}u_3^l\mathbf{B\Pi}_0(l)=$$
$$(1-\varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}u_2\sum_{l=2}^{\infty}u_3^l\Big(u_1^{l-1}-(\varepsilon u_2)^{l-1}\Big)\mathbf{B\Pi}_0(l).$$

Підставляючи $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$ в співвідношення для $\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)$ отримаємо (33). □

Зауважимо, що підставляючи в (32) замість $u_2=u_3=1$, $u_1=u_3=1$, $u_1=u_2=1$, отримаємо

$$\widetilde{\mathbf{v}}_i(s,\varepsilon,u_i)=s^{-1}\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_i),\tag{34}$$

де відповідно $\widetilde{\mathbf{w}}_1(s,\varepsilon,u_1)$, $\widetilde{\mathbf{w}}_2(s,\varepsilon,u_2)$, $\widetilde{\mathbf{w}}_3(s,\varepsilon,u_3)$ мають наступні зображення

$$\widetilde{\mathbf{w}}_1(s,\varepsilon,u_1) = (1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_1(\varepsilon,u_1)+$$
$$+(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{(1-u_1^{-1}\varepsilon)^{-1}(u_1^{l-1}-\varepsilon^{l-1})- \tag{35}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l)\Bigg];$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_2(s,\varepsilon,u_2) = (1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_2(\varepsilon,u_2)+$$
$$+u_2(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{(1-u_2\varepsilon)^{-1}(1-(u_2\varepsilon)^{l-1})- \tag{36}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((u_2\mathbf{R}(s))^{l-1}-(u_2\varepsilon)^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l)\Bigg];$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_3(s,\varepsilon,u_3) = (1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_3(\varepsilon,u_3)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}u_3^l\Big\{(1-\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon^{l-1})- \tag{37}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l)\Bigg].$$

Згідно з (35)-(37) після граничного переходу в (34) отримується

Теорема 4.1. *Якщо $Y(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою (4), тоді*

1. *При $m_1^0 > 0$,*

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Bigg[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{A}_x(1)\Bigg], \tag{38}$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Bigg[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0(l)\Bigg], \tag{39}$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Bigg[\mathbf{a}_3(1,u_3)+$$
$$(\mathbf{p}_*^-(0))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(u_2^l\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0(l)\Bigg]. \tag{40}$$

2. *При $m_1^0 = 0,\ m_2^0 < \infty$,*

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Bigg[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{A}_x(1)\Bigg], \tag{41}$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}_0(l)\Big], \tag{42}$$
$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{E}[u_3^{\gamma_1(\infty)+\gamma_2(\infty)}]. \tag{43}$$

3. *При* $m_1^0 < 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\mathbf{E}\Big[u_1^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\,u_2^{\gamma_+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\,u_3^{\gamma^+_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty\Big] = \mathbf{0}. \tag{44}$$

Матриці $\mathbf{m}_+(1)$, $\mathbf{m}^0(1)$ *визначені в наслідку 2.1.*

Доведення. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді згідно з теоремою 2.4 $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$ формули (38)-(40) випливають з (34) та відповідно (35)-(37) після граничного переходу при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$.

Якщо $m_1^0 = 0$, $m_2^0 < \infty$, тоді згідно з теоремою 2.4 $|\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$ формули (41)-(42) випливають з (34) та відповідно (35)-(36) після граничного переходу при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$, (43) визначається через розподіл суми недострибку та перестрибку процесу.

Якщо $m_1^0 < 0$, то (44) очевидно. □

5. Перестрибки через нульовий рівень

Для випадку $x = 0$ має місце твердження

Теорема 5.1. *Для процесу* $Y(t)$ *з кумулянтою (4) маємо*

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(0)=l,\ \xi^+(\theta_s)>0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)},\,\gamma_1(0)=l,\,\tau^+(0)<\infty\right] =$$
$$s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0(l-j),\ l\in\mathbb{Z}_+, \tag{45}$$
$$\mathbf{P}\{\gamma_1(0)=0,\ \xi^+(\theta_s)>0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)},\,\gamma_1(0)=0,\,\tau^+(0)<\infty\right] = 0;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_2(0)=l,\ \xi^+(\theta_s)>0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)},\,\gamma_2(0)=l,\,\tau^+(0)<\infty\right] =$$
$$s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\check{\mathbf{p}}_{-l}^-(s)\mathbf{A}_l(1),\ l\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}; \tag{46}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_3(0)=l,\ \xi^+(\theta_s)>0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)},\,\gamma_3(0)=l,\,\tau^+(0)<\infty\right] =$$
$$s^{-1}\sum_{y=0}^{l}\mathbf{p}_{-y}^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=y-l+1}^{\infty}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0(j),\ l\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}. \tag{47}$$

Доведення. Співвідношення (45) - (47) випливають відповідно із (29) - (31) якщо підставити $x = 0$. □

6. Висновки

В роботі одержані представлення для відповідних генератрис $\mathbf{V}_i(s,x,u_i)$ пар перестрибкових функцоналів $\{\tau^+(x),\,\gamma_i(x)\}$, що виражаються з допомогою (24) через знайдені функції (26)-(28) у випадку майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ланцюгу Маркова. Для цих процесів отримано співвідношення (32) для твірного перетворення спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x),\,\gamma_1(x),\,\gamma_2(x),\,\gamma_3(x)\}$ та деякі допоміжні твердження, які дозволяють знайти граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівень в термінах твірних перетворень додатних стрибків та матриці, що визначає розподіл доповнення до максимуму.

Література

1. И. И. Ежов, А. В. Скороход, *Марковские процессы, однородные по второй компоненте*, Теория вероятн. и её примен. **14** (1969), №1, 3–14; №4, 679–692.
2. E. Arjas, *On a fundamental identity in the theory of semi-Markov processes*, Adv. Appl Probab. **4** (1972), №2, 258–270.
3. А. А. Могульський, *Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова, однородные по второй компоненте*, Теория вероятн. и мат. статистика **11** (1974), 86–96.
4. S. Asmussen and H. Albrecher, *Ruin Probabilities*, World Sci., Hackensack, 2010.
5. Д. В. Гусак, *Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів*, Ін-т математики НАН України, Київ, 1998.
6. Є. В. Карнаух, *Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова*, Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук Київ, 2007.
7. В. И. Лотов, Н. Г. Орлова, *О факторизационных представлениях в граничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова*, Сибирс. математ. журнал **46** (2005), №4, 833–840.
8. Д. В. Гусак, М. С. Герич, *Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова*, Укр. матем. журн. (2015) **67** №8, 1034–1049.
9. Д. В. Гусак, А. И. Туренниязова, *Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова*, Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей, Сб.науч.тр., Ин-т математики АН УССР, Киев, 1967, стр. 21–27.
10. Д. В. Гусак, *Процеси з незалежними приростами в теорії ризику*, Ін-т математики НАН України, Київ, 2011.
11. М. С. Герич, *Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова*, Карпатські математичні публікації **4** (2012), №2, 229–240.
12. М. С. Герич, *Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова*, Вісн. Київ. нац. ун-т ім. Т.Г. Шевченка. Сер: фіз.-мат. науки, **1** 2013, 21–27.

Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу, математичний факультет, ДВНЗ "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, кімната 313, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: miroslava.gerich@yandex.ua

Надійшла 12/02/2016