Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 50–59

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 50–59

ОЦІНКА МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ЕКСЦЕСУ ПОСЛІДОВНОСТІ ВІДНОВЛЕННЯ ПОРОДЖЕНОЇ НЕОДНОРІДНИМ ЛАНЦЮГОМ МАРКОВА ЗА УМОВИ ІСНУВАННЯ КВАДРАТИЧНО-ІНТЕГРОВНОЇ МАЖОРАНТИ

УДК 519.21

В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. В даній роботі розглядаються умови за яких гарантовано існування скінченого математичного сподівання ексцессу послідовності відновлення неоднорідного за часом ланцюга Маркова.

Ми розглядаємо ланцюг з довільним простором станів та деякою множиною C. Для такого ланцюга вивчається поведінка послідовності відновлення - послідовності моментів у яких ланцюг повертається в C. Основна мета даної роботи - визначити чисельну оцінку для математичного сподівання для ексцессу послідовності відновлення - а саме часу, що необхідно чекати від моменту t до наступного відновлення.

Abstract. In this paper, we consider conditions which satisfy finitness of the expectation of the excess of the renewal sequence of the time-inhomogeneous Markov chain. We consider a chain with an arbitrary state space, and some set C. Within this chain we learn a behaviour of a renewal process - a sequence of moments in which chain is returning to C. Main goal of an article to define numerical estimate for the expectation for the renewal sequence excess - a time to wait from the moment t until the new renewal.

Аннотация. В даной работе рассматриваются условия при которых гарантировано существование конечного математического ожидания ескцесса последовательности восстановления для неоднородной во времени цепи Маркова. Рассматривается цепь з произвольным пространством состояний и некоторым множеством C. Для такой цепи изучается поведение процесса востановления - последовательности моментов в которые цепь возвращается в множество C. Основная цель даной работы - определить численную оценку для математического ожидания эксцесса последовательности восстановления - а именно, времени которое необходимо ожидать от момента t до следующего восстановления.

1. Вступ

В роботі [31] вивчається питання скінченості моменту склеювання для неоднорідних ланцюгів Маркова. У ній отримані умови за яких момент склеювання скінчений. Але отримані результати є досить складними для практичного застосування. По-перше, досить складно перевірити умови основної теореми, а по-друге відсутня чисельна оцінка для математичного сподівання моменту склеювання.

Тому логічно було б знайти якісь інші умови, можливо більш обтяжливі, які б у той же час дозволяли фактично обчислювати математичне сподівання моменту склеювання а не лише забезпечували б його скінченість.

Варто зазначити, що для ключовим елементом доведення є оцінка для математичного сподівання ексцесу послідовності відновлення для неоднорідного ланцюга

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

Маркова - а саме - часу, який необхідно чекати від довільного моменту t до наступного віднвлення.

За досить загальних умов з роботи [31] випливає лінійна оцінка для математчного сподівання ексцесу: $E[R_t] \leq \rho t + C$. Зауважимо, що аналогічна оцінка також присутня в монографії Ліндвалла [13], в якій розглядається однорідний за часом випадок, склеювання двох копій одного ланцюга, і також немає чисельної оцінки моменту склеювання.

В той же час існують роботи, наприклад [28], у яких отримані саме чисельні оцінки для моментів склеювання двох різних але однорідних ланцюгів Маркова. При цьому ключовим елементом доведення в цій роботі було припущення про існування другого моменту для послідовності відновлення, та використання нерівності Дейлі (див. [23]),

Пізніше в роботі [31] було отримано аналогічний результат для склеювання різних однорідних ланцюгв Маркова, знову ж таки за прищуння скінченості другого моменту та використання нерівності Дейлі.

Тому постало питання, про перенесення подібного результату на неоднорідний випадок. На жаль нерівність Дейлі, яка по-суті означає, що математичне сподівання ексцесу обмежене, не переноситься на неоднорідний випадок. Але в даній роботі представлений інший рeзльутат такого ж типу. А саме - доведено скінченість математичного сподівання ексцесу послідовності відновлення породженої неоднорідним ланцюгом Маркова, за умови мажорування умовних розподілів відновлення деяким квадратично інтегровним розподілом. При цьому отримана чисельна оцінка такого математичного сподівання.

Даний результат дозволить значно спростити практичне застосування основної теореми роботи [31] у неоднорідному випадку.

Щодо самого питання скінченості математичного сподівання моменту склеювання та його оцінювання, то воно відіграє критичну роль при побудові оцінок стійкості для перехідних ймовірностей за n кроків для двох неоднорідних ланцюгів Маркова - що є надзвичайно важливою практичною задачею.

Дослідженню стійкості неоднорідних ланцюгів Маркова присвячено ряд робіт автора: [25], [26], [34]. В цих роботах розглядається стійкість перехідних ймовірностей за n років в однорідному та неоднорідному за часом випадках. В цих роботах для дослідження використовується C-склеювання, яке полягає у тому, що два ланцюги можуть склеїтися, якщо одночасно потраплять у деяку множину C. І хоча C-склеювання є широко вживаним ([22], [19]) але як правило застосовувалось для аналізу стійкості одного однорідного ланцюга Маркова при різних початкових розподілів. Для застосування цього методу для аналізу стійкості двох різних, можливо неоднорідних ланцюгів метод склеювання був певним чином модифікований.

В роботах [29], [30], [33] розглядається так зване максимальне склеювання ланцюгів. Воно полягає у тому, що (дискретні) ланцюги склеюються в момент зустрічі. В роботах представлені результати щодо стікості перехідних ймовірностей за n кроків а також, що важливо, скінченовимірних розподілів. Дані результати отримані за умов рівномірного перемішування матриць перехідних ймовірностей, що є певним аналогом рівномірної ергодичності.

Основним інструментом доведення слугує метод склеювання. Загальні відомості про метод склеювання можна знайти у класичних монографіях: [13], [17]. Використання методу склеювання є широко уживаною практикою при дослідженні ланцюгів Маркова - [8], [10], [9], [4], [5], [22], [19], [20], [24].

Роботи [7], [1], [11] є піонерськими роботами в яких використовувася метод склеювання або схожі конструкції.

2. Послідовність відновлення породжена неоднорідним ланцюгом Маркова.

В цій роботі ми будемо слідувати позначенням введеним в [31]. Там же була визначена послідовність відновлення породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, а також визначені деякі її властивості. Коротко нагадємо основні позначення тут, а за більш детальним описом відсилаємо читача до відповідного розділу в роботі [31].

Нехай X_t, $t \geq 0$ - деякий неоднорідний за часом ланцюг Маркова (з дискретним часом), зі значеннями у фазовому просторі $(E, \mathbb{E})$. Позначимо перехідні ймовірності на t-тому кроці такого ланцюга через $P_t(x, A)$.

Будемо позначати буквами P, E - ймовірність, та математичне сподівання породженні цим ланцюгом.

Нехай C - деяка множина, $C \in \mathbb{E}$. Основним об'єктом для вивчення в даній роботі є послідовність моментів повернень у множину C. Припустимо, що $X_0 \in C$. В даній роботі, на відміну від роботи [31] ми не робимо припущень щодо того, що C складається з одного елемента. Одноелементність C не є принциповою умовою, і як буде видно нижче лише трохи спрощує загальну конструкцію.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{gathered}\theta_1 = \inf\{t > 0: \ X_t \in C\} \\ \theta_2 = \inf\{t > \theta_1: \ X_t \in C\} \\ \dots \\ \theta_m = \inf\{t > \theta_{m-1}: X_t \in C\}, \ m > 1.\end{gathered} \tag{1}$$

Таким чином θ_k - це час який пройшов між $k-1$ та k-тим поверненням в C. Нам також знадобляться позначення для самих моментів повернення:

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k} \theta_j, \ k > 0 \tag{2}$$

- момент k-того повернення, $\tau_0 = 0$.

Зауважимо, що в даній роботі ми розглядаємо процес "без затримки", тобто $\theta_0 = \tau_0 = 0$, або іншими словами $X_0 \in C$. Дане припущення не є принциповим.

Розглянемо потік сигма-алгебр, що породжені послідовностями θ_n та τ_n та значеннями процесу в моменти відновлення:

$$\mathcal{F}_n = \sigma[\theta_k, X_{\tau_k}, 1 \leq k \leq n] = \sigma[\tau_k, \ X_{\tau_k}, \ 1 \leq k \leq n]. \tag{3}$$

Окремо варто зупинитись на характері залежності між величинами θ_k. В однорідному випадку ці величини є незалежними. Але це твердження не є вірним для неоднорідного випадку. Це пов'язано, з тим, що розподіл наступного часу повернення в множину C залежить від того з якого моменту часу починати відлік. Тим не менше, розподіл величини θ_k повністю визначається моментом попереднього відновлення (та значенням ланцюга в момент відновлення, якщо C складається з більш ніж одного елемента). Математично, це можна записати таким чином:

$$E[\theta_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[\theta_{n+1} | \tau_n, X_{\tau_n}]. \tag{4}$$

Що цікаво, що розподіл величин θ_{n+1} не залежить від індексу n а лише від значення τ_n - момента попереднього відновлення, а також від значення процесу в момент відновлення. Останнє є наслідком того, що C не обов'язково одноелементна.

Іншими словами, не важливо скільки було відновлень до момента який нас цікавить, важливий лише сам момент останнього відновлення, і значення процесу в цей момент.

Таким чином, доцільно розглядати двопараметричне сімейство розподілів:

$$g_k^{(s,x)} = P\{\theta_{n+1} = k | \tau_n = s, X_s = x\}. \tag{5}$$

Зауважимо, що в роботі [31] аналогічні розподіли були однопараметричні, оскільки там припускалось, що множина C-одноелементна.

Властивості послідовності відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, а також їх якісна характеристика детально описані в роботі [31], в розділах 2, 3 та 4.

Надалі нам знадобиться наступна: (A) Умова стохастичної мажорованості. Припустимо, що для кожних s, x розподіл $g_n^{(s,x)}$, $n \geq 1$ (а отже і умовний розподіл θ_n) мажорований деякою послідовністю невід'ємних величин $\hat{g} = (\hat{g}_k, k \geq 1)$, тобто, для довільного $k > 0$:

$$\sum_{i \geq k} g_i^{(s,x)} \leq \sum_{i \geq k} \hat{g}_i,$$

причому $\sum_{k \geq 1} g_k < \infty$.

Введемо позначення:

$$\hat{G}_n = \sum_{k \geq n} \hat{g}_k. \tag{6}$$

Послідовність $(g_k, k \geq 1)$ як правило називається стохастичною мажорантою, і є ймовірнісним розподілом. Але для даної роботи ця властивість не є суттєвою.

Для доведення основного результату статті знадобиться більш сильна умова ніж просто існування мажоранти, а саме - скінченість другого моменту мажоруючого розподілу:
(A2) Нехай для послідовності θ_n виконана умова стохастичної мажорованості (A). Припустимо, що для послідовності $(\hat{g}_n, n \geq 1)$ існує скінчений другий момент:

$$\hat{\mu}_2 = \sum_{k \geq 1} k^2 \hat{g}_k < \infty.$$

Очевидно, що в цьому разі перший момент також буде скінченим, позначимо його

$$\hat{\mu} = \sum_{k \geq 1} k g_k.$$

Далі введемо величину $R_t = \inf\{\tau_k > t\} - t$ - це час який залишається з моменту t до наступного повернення в множину C, а також визначимо номер наступного відновлення для кожного $t \geq 0$:

$$N(t) = \inf\{k \geq 1 : \tau_k > t\},$$

довизначимо також $N(-1) = 0$.

Зауваження 2.1. Умови (A) та (A2) виконані для широкого класу ланцюгів Маркова. По своїй суті це умова того, що послідовність відновлення квадратично інтегровна. Ця умова виконана наприклад, для скінченого неперіодичного ланцюга.

Таким чином має місце формула:

$$R_t + t = \tau_{N(t)}.$$

Введемо також події A_k - що полягають у тому, що відновлення відбулось в момент k:

$$A_k = \{X_k \in C\} = \{\exists m : \tau_m = k\}, \tag{7}$$

а також події B_k, $B_{k,n}$ - які полягають у тому, що відновлення не відбулось в момент k та між моментами k та n відповідно:

$$B_k = \{X_k \notin C\} = \overline{A}_k, \tag{8}$$

$$B_{k,n} = \{X_k \notin C, \ldots, X_n \notin C\} = \overline{A}_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \ldots \overline{A}_n, \tag{9}$$

будемо вважати, що $\mathbb{1}_{B_{k,n}} = 1$, якщо $k > n$.

Розглянемо умову:

(B) Існують такі $\gamma > 0$ та $n_0 \geq 0$, що для всіх $n \geq k$, таких що $n - k \geq n_0$ виконана рівність:

$$P\{B_{k,n}\} \leq (1-\gamma)^{(n-k-n_0)^+}.$$

Тут $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Зауваження 2.2. Умова (B) насправді є умовою відділеності від нуля для послідовності відновлення. Тобто, якщо позначити через u_n - ймовірність того, що відновлення відбулось в момент n, то умова (B) випливатиме з того, що існує таке $\gamma > 0$ та $n_0 \geq 0$, що $\inf_{n \geq n_0} u_n > \gamma$.

Більше детальну інформацію можна знайти в роботі [31]. Зокрема умова 2 теореми 5.1, а також лема 8.5.

Зауваження 2.3. Відділеність від нуля для послідовності відновлення є певним далеким аналогом теореми відновлення в однорідному випадку, яка гарантує, що $u_n \to 1/m > 0$, а отже послідовність u_n відділена від нуля починаючи з деякого номера. На практиці, навіть для неоднорідних ланцюгів Маркова ця умова виконується досить часто, наприклад як уже було сказано вище для однорідних ланцюгів зі інтегровною послідовністю відновлення.

3. Основні результати

Теорема 3.1. *Нехай виконані умови (A), (A1) та (B). Тоді математичне сподівання для R_t задовільняє нерівність:*

$$E[R_t] \leq \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0). \tag{10}$$

Наслідок 3.1. *Позначимо $\mu_- = \inf_{n,s,x} E[\theta_n | \tau_{n-1} = s, X_{\tau_{n-1}} = x] \geq 1$. Тоді в умовах попередньої теореми, для середньої кількості відновлень за час t справделива нерівність:*

$$E[N(t)] \leq \hat{\mu}_2/\mu_- + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0)/\mu_- + t + 1 \leq \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0) + t + 1.$$

4. Допоміжні леми

Лема 4.1. *Для випадкової величини R_t справедлива наступна рівність:*

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}} \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}} (R_t - 1). \tag{11}$$

Доведення.

Очевидно, що якщо відновлення відбулось в момент $t+1$, то його номер $N(t)$ і то наступного відновлення чекати рівно $\theta_{N(t)+1}$ одиниць часу. Якщо ж відновлення не було в момент $t+1$, то чекати його на 1 менше ніж відновлення після моменту t. Формально це можна записати так:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}} R_{t+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}} R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}} \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}} (R_t - 1).$$

□

Лема 4.2. *Має місце наступна нерівність:*

$$R_{t+1} \leq \mathbb{1}_{B_{t+1}} R_t + \theta_{N(t)+1}. \tag{12}$$

Доведення.

Скориставшись лемою 4.1 отримаємо рівність:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}} \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}} (R_t - 1) = \mathbb{1}_{A_{t+1}} \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}} R_t - \mathbb{1}_{B_{t+1}}.$$

Далі відкинемо від'ємний доданок $-\mathbb{1}_{B_{t+1}}$, та скористаємось тим, що $\mathbb{1}_{A_{t+1}} \leq 1$:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t - \mathbb{1}_{B_{t+1}} \leq \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t.$$

□

Лема 4.3. *Для всіх $t \geq 0$ має місце наступна нерівність:*

$$R_{t+1} \leq \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}, \tag{13}$$

де $N(-1) = 0$ а $\mathbb{1}_{B_{t+2,t+1}} = 1$, як було визначено вище.

Доведення.

Доведення проведемо методом математичної індукції.

Розглянемо $t = 0$.

Зауважимо, по-перше, що: $N(0) = 1$, а $\tau_{N(0)} = \tau_1 = \theta_1$. Окрім того, завжди виконана рівність $R_0 = \theta_1$. Тоді можливо два випадки. Або відновлення сталося в момент $t = 1$ або ні.

Якщо відновлення в момент $t = 1$ трапилось, то $\theta_1 = 1$, а $R_1 = \theta_2$.

Якщо відновлення не було, то $\theta_1 > 1$ а $R_1 = \theta_1 - 1$. Окрім того, якщо відновлення в момент $t = 1$ не було, то додатково маємо: $N(0) = N(1) = 1$.

Врахувавши все вищесказане можна записати:

$$R_1 = \mathbb{1}_{A_1}R_1 + \mathbb{1}_{B_1}R_1 = \mathbb{1}_{A_1}\theta_2 + \mathbb{1}_{B_1}(\theta_1 - 1) =$$
$$\mathbb{1}_{A_1}\theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}(\theta_1 - 1) \leq \theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}\theta_1 =$$
$$\theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}\theta_{N(-1)+1},$$

де $N(-1) = 0$.

Нехай тепер рівність виконана для $t+1$ перевіримо її для $t+2$. За формулою (12) маємо:

$$R_{t+2} \leq \mathbb{1}_{B_{t+2}}R_{t+1} + \theta_{N(t+1)+1},$$

скориставшись припущенням індукції отримаємо:

$$R_{t+2} \leq \mathbb{1}_{B_{t+2}} \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}} + \theta_{N(t+1)+1} =$$

$$R_{t+2} \leq \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}\cap B_{t+2}} + \theta_{N(t+1)+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{t+2} \theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+2}}.$$

□

Лема 4.4. *Нехай виконані умови (A), (A1) та (B). Тоді має місце наступна нерівність:*

$$E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] \leq \hat{\mu}(1-\gamma)^{(t-k-1-n_0)^+} \tag{14}$$

Доведення.

Наведемо спочатку якісні пояснення, щодо цієї нерівності.

Розглянемо випадкову величину $\theta_{N_(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}$ для деякого $t \geq k+1$. Подія $B_{k+1,t}$ означає, що відновлення не відбулося за період від моменту $k+1$ до t, а це означає, що наступне після k відновлення відбулося після моменту t, або іншими словами $\tau_{N(k)} > t$. Але це означає, що подія $B_{k+1,t}$ належить сигма-алгебрі $\mathcal{F}_t$ а подія $\tau_{N(k)} > t$ належить сигма-алгебрі $\mathcal{F}_{N(k)}$. Але $\theta_{N(k)+1}$ залежить від сигма-алгебри $\mathcal{F}_{N(k)}$ лише через значення $\tau_{N(k)}$, причому умовне математичне сподівання $\theta_{N(k)+1}$ за будь-якого значення $\tau_{N(k)}$ мажорується $\hat{\mu}$.

В той же час ймовірність того, що відновлення не було на відрізку від $k+1$ до t не перевищує $(1-\gamma)^{(t-k-1-n_0)^+}$ як це випливає з умови (B).

Тепер запишемо це формально:

$$E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] = \sum_{s>t} E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_{N(k)}=s}] =$$

$$\sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}].$$

Зауважимо, що $N(k)$ - це момент зупинки, а отже подія $\{N(k)=j\}\in\mathfrak{F}_j$, тоді маємо:

$$E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] = \sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}|\mathfrak{F}_j]] =$$

$$\sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[E[\theta_{j+1}|\mathfrak{F}_j]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}] =$$

$$\sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[E[\theta_{j+1}|\tau_j, X_{\tau_j}]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}] =$$

$$\sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[E[\theta_{j+1}|\tau_j=s, X_s]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{N(k)=j}\mathbb{1}_{\tau_j=s}] \le$$

$$\hat\mu\sum_{j\ge 0}\sum_{s>t} E[\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{N(k)=j}\mathbb{1}_{\tau_j=s}] = \hat\mu P\{B_{k+1,t}\} \le \hat\mu(1-\gamma)^{(t-k-1-n_0)^+}.$$

Тут ми використали рівність (4) а також умову стохастичної мажорованості.
□

Лема 4.5. *Має місце наступна нерівність:*

$$\sum_{k=0}^{t+1} E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1}>t-k-2}] \le \hat\mu_2. \tag{15}$$

Доведення.
Запишемо для початку:

$$E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1}>t-k-2}] = \sum_{j,s} E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{\theta_{j+1}>t-k-2}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}] =$$

$$\sum_{j,s} E[E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{\theta_{j+1}>t-k-2}|\tau_j=s, X_s]\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}].$$

Далі:

$$E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{\theta_{s+1}>t-k-2}|\tau_j=s, X_s] = \sum_{i>t-k-2} ig_i^{(s,X_s)} = \sum_{i>t-k-2} G_i^{(s,X_s)} \le \sum_{i>t-k-2}\hat G_i.$$

Підставивши це в попередню рівність:

$$E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1}>t-k-2}] = \sum_{j,s} E[E[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{\theta_{j+1}>t-k-2}|\tau_j=s, X_s]\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}] \le$$

$$\sum_{i>t-k-2}\hat G_i.$$

Розглянемо тепер суму:

$$\sum_{k=0}^{t+1} E[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1}>t-k-2}] \le \sum_{k=0}^{t+1}\sum_{i>t-k-2}\hat G_i = \sum_{k=0}^{t-2}\sum_{j=k}^{\infty}\hat G_j \le$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\hat{G}_j = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\hat{G}_k = \hat{\mu}_2.$$

$\square$.

5. Доведення основної теореми.

Скориставшись лемою 4.3 запишемо формулу (13):

$$R_{t+1} \le \sum_{k=0}^{t+1}\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}.$$

Далі розглянемо вираз $\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+2,t}}$, при деякому $t \ge k+2$. Розпишемо його наступним чином:

$$\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+2,t}} = \theta_{N(k)+1}(\mathbb{1}_{A_{k+1}} + \mathbb{1}_{B_{k+1}})\mathbb{1}_{B_{k+2,t}} =$$
$$\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{A_{k+1}}\mathbb{1}_{B_{k+2,t}} + \theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}.$$

Тепер розглянемо подію:

$$A_{k+1} \cap B_{k+2,t}.$$

Вона означає, що в момент $k+1$ відбулось відновлення, а наступного відновлення не відбулось аж до моменту t. Але номер наступного відновлення при цьому $N(k)+1$, оскільки $\tau_{N(k)} = k+1$. Отже

$$\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{A_{k+1}\cap B_{k+2,t}} \le \theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1} > t-k-2}. \tag{16}$$

Тоді візьмемо математичне сподівання від обох частин у формулі (13), та підставивши вирази з (15) та (16) отримаємо:

$$E[R_{t+1}] \le \sum_{k=0}^{t+1}E[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}] \le$$
$$\sum_{k=0}^{t+1}E[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}] + \sum_{k=0}^{t+1}E[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k,t+1}}] \le$$
$$\sum_{k=0}^{t+1}E[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k-1)+1} > t-k-2}] + \sum_{k=0}^{t+1}E[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k,t+1}}] \le$$
$$\hat{\mu}_2 + \sum_{k=0}^{t+1}\hat{\mu}(1-\gamma)^{(t-k+1-n_0)^+} \le \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}\sum_{k=-n_0}^{\infty}(1-\gamma)^{k^+} =$$
$$\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(n_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(1-\gamma)^k) = \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0).$$

$\square$

6. Доведення наслідку

Зауважимо, що в однорідному випадку виконане рівняння Вальда: $E[S_{N(t)}] = E\theta_1 EN(t)$. Але в неоднорідному випадку ця рівність не є вірною. Натомість мають місце наступні нерівності:

$$ER_t + t = E[\tau_{N(t)}] = \sum_{k\ge 1}E[\tau_k\mathbb{1}_{N(t)=k}] = \sum_{k\ge 1}E[\tau_{k-1}\mathbb{1}_{N(t)=k}E[\theta_k|\tau_{k-1}, X_{\tau_{k-1}}]] \ge$$
$$\sum_{k\ge 1}\mu_- E[\tau_{k-1}\mathbb{1}_{N(t)=k}]] \ge \sum_{k\ge 1}\mu_- E[(k-1)\mathbb{1}_{N(t)=k}] = \mu_-(E[N(t)]-1).$$

Звідки маємо:

$$E[N(t)] \le (ER_t + t)/\mu_- + 1 \le (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0) + t)/\mu_- + 1 \le \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0) + t + 1.$$

□

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique **2** (1938), 77–105.
2. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
3. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. Ин-та матем. АНУ, n.77-24, Киев, 1977, стр. 2-43.
4. E. Nummelin, *A splitting technique for Harris recurrent chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Geb. **43** (1978), 309–318.
5. E. Nummelin and R. L. Tweedie, *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains*, Ann. Probab. **6** (1978), 404–420.
6. T. Lindvall, *On coupling of discrete renewal sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 57–70.
7. И.Н. Коваленко, Н.Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт АН УССР, N 80 - 12, Институт кибернетики, Киев, 1980.
8. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.
9. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.
10. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
11. В.М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
12. С.Т. Рачев, *Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике*, Теория вероятностей и ее применения **29** (1984), №4, 625–653.
13. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
14. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
15. P. Tuominen and R. L. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov Chains*, Advances in Applied Probability **26** (1994), 775-798.
16. R. L. Tweedie and J. N. Corcoran, *Perfect sampling of ergodic Harris chains*, Annals of Applied Probability **11** (2001), №2, 438–451.
17. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
18. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
19. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
20. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of Time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1643–1665.
21. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
22. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
23. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann.Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.
24. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
25. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
26. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовірностей та математична статистика **81** (2010), 31–46.

27. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теорія імовірностей та математична статистика **81** (2009), 65–75.
28. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час зклеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теорія ймовірностей та математична статистика **84** (2011), 78–85.
29. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теорія ймовірностей та математична статистика **86** (2012), 81–92.
30. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, II*, Теорія ймовірностей та математична статистика. (подано до друку)
31. В. В. Голомозий, М. В. Карташов, *On coupling moment integrability for time-inhomogeneous Markov chains*, Теорія ймовірностей та математична статистика **89** (2014), 1–12.
32. В. В. Голомозий, *Нерівності для моменту склеювання двох неоднорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовірностей та математична статистика **90** (2014), 39–51.
33. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних неоднорідних ланцюгів Маркова*, Теорія ймовірностей та математична статистика **91** (2014), 16–26.
34. В. В. Голомозий, М. В. Карташов, Ю. М. Карташов, *Вплив стрес-фактору на нетто-премію при страхуванні життя вдівця. Доведення*, Теорія ймовірностей та математична статистика **92** (2015), 23–27.
35. Y. Kartashov, V. Golomoziy, and N. Kartashov, *The impact of stress factor on the price of widow's pension*, Modern Problems in Insurance Mathematics (D. Silverstrov and A. Martin-Lof, eds.), E. A. A. Series, Springer, 2014, pp. 223–237.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: `email: mailtower@gmail.com`

Надійшла 10/04/2016