Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 60–72

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 60–72

ПРО ДУБЛЬОВАНУ СИСТЕМУ З ВІДНОВЛЕННЯМ

УДК 519.21

Б. В. ДОВГАЙ І І. К. МАЦАК

Анотація. Розглядається дубльована система з відновленням загального типу. Знаходяться стаціонарні ймовірності станів та середня довжина робочого періоду в стаціонарному режимі.

Abstract. A two units redundant system with repair of general type is considered. Stationary probabilities are found and average for time of sojourn in states is established.

Аннотация. Рассматривается дублированная система с восстановлением общего типа. Находятся стационарные вероятности состояний и средняя длина рабочего периода в стационарном режиме.

1. Вступ

Резервування є одним із основних методів підвищення надійності систем [1]. Тут ми будемо розглядати простий випадок резервування — дублювання, коли до робочого (основного) елемента приєднують один резервний, який у випадку відмови робочого елемента замінює його. Елемент, який відмовив відновлюється, причому після ремонту його характеристики еквівалентні початковим.

Здається вперше дубльована система з відновленням розглядалася у роботі Б.Епштейна та Т.Хосфорда [2]. Особливе місце тут займають статті Б.В.Гнєденка [3], [4]. При цьому, якщо в [2] припускалось, що час безвідмовної роботи елемента і час його відновлення мають експоненційний розподіл (це припущення далеко не завжди виконується), то в роботах [3], [4] були запропоновані методи аналізу систем, які дозволили знаходити практично прийнятний розв'язок задач такого типу для загального випадку.

Питанню надійності резервованих систем з відновленням присвячена достатньо велика кількість робіт, серед яких слід відзначити праці І. М. Коваленка [5, 6], В. С. Королюка [7, 8], А. Д. Соловйова[10, 11].

Звичайно при дослідженні дубльованої системи з відновленням ставиться задача знайти розподіл часу до першої відмови або хоча б його основні характеристики. Зрозуміло, що представляє інтерес також знаходження стаціонарних характеристик нашої системи. У марковському випадку задача стандартним чином зводиться до аналізу деяких процесів загибелі та розмноження (див., наприклад, [1, с.368–370], [7, с. 157–160]).

Якщо ж час безвідмовної роботи елемента або час його відновлення мають розподіл відмінний від експоненційного, то отримуємо нетривіальні задачі, близькі до класичних задач теорії масового обслуговування. Деякі з них були розв'язані в статтях Т.П.Марьяновича [12], І.М.Коваленка [5] та А.Д.Соловйова[10] для загальної резервованої системи з так званим необмеженим відновленням. Загальні підходи до таких задач, які грунтуються на напівмарковських процесах, досліджувалися В.С.Королюком [7, 9].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 90B22.

Ключові слова і фрази. Дубльована система, граничні теореми, стаціонарні ймовірності.

Далі через $\zeta(t)$ позначаємо число несправних елементів системи в момент часу t,

$$p_k(t) = \mathsf{P}(\zeta(t) = k), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Будемо казати, що в в момент часу t наша система перебуває в стані k, якщо $\zeta(t) = k$. Вважаємо, що $\zeta(0) = 0$ майже напевне (м.н.).

Нехай $\alpha_k(t)$ — час перебування системи в стані k, $k = 0, 1, 2$, на інтервалі $(0, t)$.

Зрозуміло, що

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = t,$$

Мета даної роботи — установити, що для дубльованої системи з відновленням при широких умовах для $k = 0, 1, 2$ існують границі:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_k(t)}{t} = p_k \quad \text{м.н.}, \tag{1}$$

і знайти по можливості прості формули для стаціонарних ймовірностей p_k та деяких інших характеристик надійності. При цьому будуть використані методи, запропоновані в [3, 4, 13].

Зауваження 1. Звичайно для систем обслуговування стаціонарні ймовірності визначають так:

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k^*. \tag{2}$$

Позначимо через $I(A)$ індикатор події A. Тоді

$$\alpha_k(t) = \int_0^t I(\zeta(s) = k)\, ds.$$

А отже

$$\mathsf{E}\,\frac{\alpha_k(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t p_k(s)\, ds.$$

Звідси випливає висновок: якщо існують границі (1), (2), то для будь-якого k $p_k = p_k^*$. Зрозуміло, що це вірно для систем обслуговування досить загального виду.

Будемо вважати, що наша система знаходиться в робочому стані, якщо працює хоча б один елемент. Тоді природно назвати величину $K_\Gamma = p_0 + p_1$ стаціонарним коефіцієнтом готовності(див. [1, с.122–125]).

Під робочим періодом системи будемо розуміти неперервний відрізок часу, на якому система перебуває в робочому стані і який змінюється періодом простою, коли обидва елементи не справні.

В залежності від того, в якому стані знаходяться резервні елементи до моменту їх включення в роботу, резервування ділиться на декілька типів. Нагадаємо основні типи резервування, які традиційно використовуються в теорії надійності.

(i) Ненавантажений (холодний) резерв: резервний елемент виключений і до моменту його підключення на місце основного не може відмовити.

(ii) Навантажений (гарячий) резерв: резервний елемент перебуває в тому ж режимі, що і робочий елемент.

(iii) Полегшений резерв: резервний елемент перебуває в полегшеному стані до моменту його підключення замість основного. Під час очікування в резерві він може відмовити, але з меншою ймовірністю ніж основний.

Для кожного з наведених вище типів резервування дубльованої системи можливі ще такі випадки.

a) Обмежене відновлення: в системі є лише одна ремонтна одиниця.

b) Необмежене відновлення: в системі є не менше двох ремонтних одиниць.

Будемо використовувати такі позначення: тип $(A/n/r)$ — означає резервовану систему з відновленням, для якої n — число елементів в резервній групі, r — число ремонтних одиниць, $A \in \{i, ii, iii\}$, i — ненавантажений резерв, ii — навантажений резерв, iii — полегшений резерв.

Для дубльованої системи $n \equiv 2$. А отже можна вивчати дубльовані системи 6-ти типів: $(i/2/1), \dots, (iii/2/2)$. Наприклад, тип (ii/2/2) характеризує дубльовану систему з навантаженим резервом і необмеженим відновленням.

2. Ненавантажений резерв

Почнемо з випадку обмеженого відновлення, тобто будемо розглядати дубльовану систему типу $(i/2/1)$. Робота системи здійснюється так. Основний елемент робить час τ, а потім іде в ремонт (якщо вільна ремонтна одиниця), або стає в чергу на ремонт. В цей же час на місце основного стає резервний елемент, якщо він справний. По закінченню ремонту елемент іде в резерв або на місце основного, якщо воно вільне.

Нехай τ — це час безвідмовної роботи елемента, η — час відновлення(ремонту), τ та η незалежні випадкові величини. Припустимо, що τ_n, $n \geq 1$, — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу $F(x) = \mathsf{P}(\tau < x)$, $F(0+) = 0$. І нехай η_n, $n \geq 1$, — також н.о.р.в.в., $G(x) = \mathsf{P}(\eta < x)$, $G(0+) = 0$.

Позначимо через W'_k — k-й робочий період, W''_k — k-й період простою системи, ν_k = число замін основного елемента резервним на k-му робочому періоді $+1$,

$$q = \mathsf{P}(\tau < \eta) = \int_0^\infty F(x)\, dG(x),$$

$$d = \mathsf{E} \min(\tau, \eta) = \int_0^\infty \mathsf{P}(\min(\tau, \eta) > x)\, dx = \int_0^\infty (1 - F(x))(1 - G(x))\, dx.$$

Відзначимо, що в.в. ν_k має геометричний розподіл з параметром q.

Теорема 1. *Якщо для дубльованої системи типу*$(i/2/1)$ *виконується умова*

$$\mathsf{E}\,\tau = a < \infty, \qquad \mathsf{E}\,\eta = b < \infty, \tag{3}$$

то існують границі (1) *і*

$$p_0 = \frac{a - d}{a + b - d}, \qquad p_1 = \frac{d}{a + b - d}, \qquad p_2 = \frac{b - d}{a + b - d}. \tag{4}$$

При $k \geq 2$

$$\mathsf{E}\, W'_k = \frac{a}{q}, \qquad \mathsf{E}\, W''_k = \frac{b - d}{q}.$$

Якщо $\mathbf{D}\,\tau = \sigma^2 < \infty$, $\mathbf{D}\,\eta < \infty$, *то при* $k \geq 2$

$$\mathbf{D}(W'_k - a\nu_k) = \frac{\sigma^2}{q},$$

$$\mathbf{D}\, W''_k = \frac{1}{q} \int_0^\infty \int_t^\infty (x - t)^2\, dG(x)\, dF(t) - \frac{(b - d)^2}{q^2}.$$

Зауваження 2. Зрозуміло, що із формул (4) просто знаходиться стаціонарний коефіцієнт готовності системи

$$K_\Gamma = p_0 + p_1 = \frac{a}{a + b - d}.$$

У роботі для всіх основних типів дубльованих систем будуть знайдені стаціонарні ймовірності станів. Ясно, що так само як і вище, для них можна виписати стаціонарний коефіцієнт готовності.

Зауваження 3. В умовах теореми 1 вірна така оцінка зверху для дисперсії k-го робочого періоду при $k \geq 2$

$$\mathbf{D}\, W'_k \leq \frac{\sigma^2}{q} + \frac{2a\sigma(1-q)^{1/2}}{q^{3/2}} + \frac{a^2(1-q)}{q^2}.$$

На жаль методи даної роботи не дозволяють точно обчислити $\mathbf{D}\, W'_k$.

Далі важливу роль буде грати одне допоміжне твердження для регенеруючих процесів. Деякі близькі результати про існування границь в регенеруючому процесі можна знайти в ([14, ч.II, гл.2]).

Означення 2.1. Під циклом тривалості T ми будемо розуміти впорядковану пару $\pounds = (T, \xi(t))$, в якій T — невід'ємна в.в., а $\xi(t)$ — випадковий процес, визначений на [0, T),

$$\mathsf{P}(T = 0) < 1, \qquad \mathsf{P}(T < \infty) = 1.$$

В.в. T і процес $\xi(t)$ в загальному випадку між собою залежні.

Припустимо, що $\pounds_i = (T_i, \xi_i(t))$ нескінчена послідовність незалежних циклів, еківалентних $\pounds$. Визначимо випадковий процес $X(t)$, $t \geq 0$, формулою

$$X(t) = \xi_i(t - S_{i-1}) \quad \text{при } t \in (S_{i-1}, S_i],$$

де $S_i = T_1 + \ldots + T_i$, $i \geq 1$, $S_0 = 0$.

Тоді будемо називати процес $X(t)$ регенеруючим, точки S_i – моментами регенерації, а проміжок (S_{i-1}, S_i) – i-м періодом регенерації.

Лема 1. *Нехай $\xi(t)$ — випадковий процес, який приймає скінчене або злічене число значень: $0, 1, 2, \ldots, N$. Припустимо, що існують моменти регенерації процесу $\xi(t)$: $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$. Тоді $T_i = S_i - S_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, н.о.р.в.в. і якщо*

$$\mathsf{E}\, T_1 = u < \infty,$$

то для будь-якого k існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_k(t)}{t} = \frac{\mathsf{E}\,\alpha_k(T_1)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^\infty \mathsf{P}(\xi(t) = k, T_1 > t)\, dt \quad \text{м.н.}, \tag{5}$$

де $\alpha_k(t)$ — час перебування процесу $\xi(t)$ в стані k на $(0, t)$.

Доведення леми 1. Нехай k — деяке фіксоване значення. Зрозуміло, що мають місце такі представлення

$$\alpha_k(S_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_k(S_{i-1}, S_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki},$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i,$$

де α_{ki} — н.о.р.в.в., $\alpha_k(s,t) = \alpha_k(t) - \alpha_k(s)$ — час перебування процесу в стані k на інтервалі (s, t).

Тоді за посиленим законом великих чисел при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_k(S_n)}{S_n} &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_{ki}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i} \to \frac{\mathsf{E}\,\alpha_k(T_1)}{\mathsf{E}\,T_1} = \frac{1}{u}\,\mathsf{E}\int_0^\infty I(\xi(t) = k, T_1 > t)\, dt \\ &= \frac{1}{u}\int_0^\infty \mathsf{P}(\xi(t) = k, T_1 > t)\, dt \quad \text{м.н.}\end{aligned} \tag{6}$$

Якщо ж $S_{n-1} < t \leq S_n$, то

$$\frac{\alpha_k(S_{n-1})}{S_n} \leq \frac{\alpha_k(t)}{t} \leq \frac{\alpha_k(S_n)}{S_{n-1}} \quad \text{м.н.} \tag{7}$$

Згідно співвідношення (6) отримаємо

$$\frac{\alpha_k(S_n)}{S_{n-1}} = \frac{\alpha_k(S_n)}{S_n}\,\frac{S_n/n}{S_{n-1}/(n-1)}\,\frac{n}{n-1} \to \frac{\mathsf{E}\,\alpha_k(T_1)}{\mathsf{E}\,T_1} \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

і так само

$$\frac{\alpha_k(S_{n-1})}{S_n} \to \frac{\mathsf{E}\,\alpha_k(T_1)}{\mathsf{E}\,T_1} \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Разом (7)–(9) дають рівності (5). □

Доведення теореми 1. Будемо розглядати лише випадок $0 < q < 1$. Хоча формули (4) залишаються вірними і для вироджених випадків $q = 0$ та $q = 1$.

Випадковий процес $\zeta(t)$ буде регенеруючим. Визначимо для нього моменти регенерації S_i. Покладемо S_0 — момент першої відмови основного елемента. Для $i = 1, 2, \dots$ S_i — це i-й момент, коли один елемент закінчив ремонт і став на місце основного, а другий почав відновлення, тобто це моменти переходу із стану 2 в стан 1.

Розглянемо випадкові події $A_n = \{\tau_n < \eta_n\}$ і покладемо $\varepsilon_n = I(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$, тобто в.в. ε_n приймає значення 1, якщо виконується подія A_n і значення 0, в противному випадку. Ясно, що

$$\mathsf{P}(\varepsilon_n = 1) = q, \qquad \mathsf{P}(\varepsilon_n = 0) = 1 - q, \qquad q = \mathsf{P}(\tau < \eta).$$

Далі визначимо в.в. ν:

$$\nu = \min(n \geq 1 \colon \varepsilon_n = 1).$$

Добре відомо ([15], с.61), що ν має геометричний розподіл

$$\mathsf{P}(\nu = n) = q(1-q)^{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

і

$$\mathsf{E}\,\nu = \frac{1}{q}, \qquad \mathbf{D}\,\nu = \frac{1-q}{q^2}. \tag{10}$$

Зобразимо перший цикл регенерації (S_0, S_1) графічно:

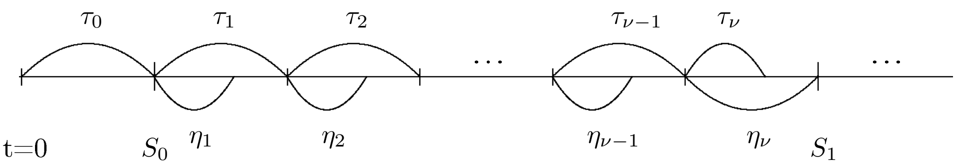

Рис. 1

Безпосередньо із рис.1 видно, що на періоді регенерації (S_0, S_1) числа переходів: $1 \to 0$ та $0 \to 1$ однакові і дорівнюють $\nu - 1$, а переходів: $1 \to 2$ та $2 \to 1$ буде рівно по одному. Так само із рис.1 робимо висновок, що час перебування в станах k на (S_0, S_1) задається рівностями: м.н.

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_1 &= \sum_{i=1}^{\nu} \min(\tau_i, \eta_i), \\ \overline{\alpha}_2 &= T_1 - \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i, \\ \overline{\alpha}_0 &= T_1 - \overline{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_2, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\overline{\alpha}_k = \alpha_k(S_1) - \alpha_k(S_0)$, $k = 0, 1, 2$, $T_1 = S_1 - S_0$.

А довжину першого періоду регенерації можна знайти за формулою:

$$T_1 = S_1 - S_0 = \sum_{i=1}^{\nu} \max(\tau_i, \eta_i). \tag{12}$$

Оскільки ν — це перший момент, коли виконується подія $\{\varepsilon_n = 1\}$, то зрозуміло, що ν марковський момент відносно потоку σ-алгебр ($\mathfrak{F}_n = \sigma\{\tau_i, \eta_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$). Тому за тотожністю Вальда ([16], с.309) із (10)–(12) отримуємо:

$$
\begin{gathered}
\mathsf{E}\, T_1 = \mathsf{E}\,\nu\, \mathsf{E} \max(\tau, \eta) = \frac{1}{q}\big(\mathsf{E}\,\tau + \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E} \min(\tau, \eta)\big) = \frac{a+b-d}{q}, \\
\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \mathsf{E}\,\nu\, \mathsf{E} \min(\tau, \eta) = \frac{d}{q}, \\
\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \mathsf{E}\, T_1 - \mathsf{E}\,\nu\, \mathsf{E}\,\tau = \frac{a+b-d}{q} - \frac{a}{q} = \frac{b-d}{q}, \\
\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \mathsf{E}\, T_1 - \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 - \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{a-d}{q}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Оскільки початковий відрізок часу $(0, S_0)$ практично не впливає на асимптотичну поведінку процесу $\zeta(t)$, то можна скористатися лемою 1. Дійсно для $k = 0, 1, 2$ за лемою 1 маємо

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_k(t - S_0)}{t - S_0} = \frac{\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_k}{\mathsf{E}\, T_1} \quad \text{м.н.}
$$

Із рис. 1 ясно, що $\forall t > S_0$

$$
\alpha_k(t - S_0) = \alpha_k(t) \quad \text{при } k = 1, 2,
$$

$$
\alpha_0(t - S_0) + \tau_0 = \alpha_0(t).
$$

Останні рівності разом з (13) і дають (4).

Згідно з рис.1 на першому циклі регенерації довжина робочого періоду дорівнює $\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1$, а $\overline{\alpha}_2$ — довжина періоду простою. Тому при $k \geq 2$

$$
\mathsf{E}\, W_k' = \mathsf{E} \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i = \mathsf{E}\,\nu\, \mathsf{E}\,\tau = \frac{a}{q}.
$$

Так само одержуємо

$$
\mathbf{D}(W_k' - a\nu_k) = \mathsf{E} \left| \sum_{i=1}^{\nu} (\tau_i - a) \right|^2 = \mathbf{D}\,\tau\, \mathsf{E}\,\nu = \frac{\sigma^2}{q},
$$

(див. [16, с.313]).

Для завершення доведення залишається помітити, що

$$
\mathsf{E}\, W_k'' = \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{b-d}{q},
$$

$$
\mathsf{E}\, |W_k''|^2 = \mathsf{E}(|\eta - \tau|^2 / (\eta > \tau)). \qquad \square
$$

Справедливість оцінки із зауваження 3 безпосередньо випливає із теореми 1 та рівностей (10).

Зауваження 4. Якщо в.в. τ має експоненційний розподіл, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, то

$$
d = \frac{1}{\lambda} - G^*(\lambda), \qquad q = \lambda d = 1 - \lambda G^*(\lambda),
$$

де $G^*(z) = \int_0^\infty \exp(-zx) G(x)\, dx$ — перетворення Лапласа функції $G(x)$.

А якщо додатково $G(x) = 1 - \exp(-\mu x)$, то неважко обчислити параметри

$$
a = \frac{1}{\lambda}, \qquad b = \frac{1}{\mu}, \qquad d = \frac{1}{\lambda + \mu}, \qquad q = \lambda d = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.
$$

А отже формули (4) при $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ перепишуться так

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2}, \qquad p_1 = \frac{\rho}{1+\rho+\rho^2}, \qquad p_2 = \frac{\rho^2}{1+\rho+\rho^2}.$$

Ці рівності звичайно можна безпосередньо вивести із відомих формул для стаціонарних ймовірностей процесів загибелі та розмноження.

Тепер перейдемо до випадку необмеженого відновлення, тобто розглянемо дубльовану систему типу $(i/2/2)$.

Нехай $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$ — це моменти повернення дубльованої системи в стан 0, коли обидва елементи справні, точніше S_1 — це перший момент попадання із стану 1 в стан 0, так само S_k — це k-ий момент попадання із стану 1 в стан 0. Як і вище покладемо $T_i = S_i - S_{i-1}$, $\alpha_{ki} = \alpha_k(S_i) - \alpha_k(S_{i-1})$, $\overline{\alpha}_k = \alpha_{k1}$.

Якщо процес $\zeta(t)$ буде регенеруючим з моментами регенерації $S_0, S_1, S_2, \ldots$, то для будь-якого $k = 0, 1, 2$ (α_{ki}) — послідовність н.о.р.в.в., однаково розподілена з $\overline{\alpha}_k$.

Теорема 2. *Якщо для дубльованої системи типу $(i/2/2)$ виконується умова (3) і в.в. τ має експоненційний розподіл, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, то існують границі (1) і*

$$p_0 = \frac{2}{2+2\rho+\rho^2}, \qquad p_1 = \frac{2\rho}{2+2\rho+\rho^2}, \qquad p_2 = \frac{\rho^2}{2+2\rho+\rho^2}, \tag{14}$$

де $\rho = \lambda b$.

Моменти $S_0, S_1, S_2, \ldots$ повернення системи в стан 0 будуть моментами регенерації, а середній час перебування в станах на одному циклі регенерації задається формулами:

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{\rho^2}{2\lambda}. \tag{15}$$

Теорему 2 отримаємо далі, як наслідок результатів наступних підрозділів.

3. Навантажений резерв

Спочатку розглянемо випадок необмеженого відновлення, тобто дубльовану систему типу $(ii/2/2)$.

Теорема 3. *Якщо для дубльованої системи типу $(ii/2/2)$ виконується умова (3), то існують границі (2) і*

$$p_0^* = \frac{1}{(1+\rho)^2}, \qquad p_1^* = \frac{2\rho}{(1+\rho)^2}, \qquad p_2^* = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}, \tag{16}$$

де $\rho = \frac{b}{a}$.

Зауваження 5. Із результатів роботи [10] випливає, що для системи типу $(ii/2/2)$ середня довжина робочого періоду та періоду простою такої системи в стаціонарному режимі задаються формулами:

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\, W_k' = \frac{b}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{b^2} - 1\right) \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\, W_k'' = \frac{b}{2}$$

відповідно.

Зауваження 6. Якщо в.в. τ має експоненційний розподіл, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, то для дубльованих систем типу $(i/2/2)$ та $(ii/2/2)$ формули (14), (16) з $\rho = \lambda b$ випливають із результатів роботи [12].

Теорема 4. *Якщо для дубльованої системи типу* $(ii/2/2)$ *виконується умова* (3) *і в.в.* τ *має експоненційний розподіл,* $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, *то існують границі (1), (2), стаціонарні ймовірності* $p_k = p_k^*$ *і задаються рівностями (16) з* $\rho = \lambda b$.

Моменти $S_0, S_1, S_2, \ldots$ *повернення системи в стан* 0 *будуть моментами регенерації, а середній час перебування в станах на одному циклі регенерації задається формулами:*

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \frac{1}{2\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{\rho^2}{2\lambda}. \tag{17}$$

Доведення наведених теорем буде спиратись на одне допоміжне твердження.

Нехай (ξ_i', ξ_i'') — альтернуючий процес відновлення (див. [14], в термінології [1] — процес відновлення із скінченним часом відновлення). Під ξ_i' звичайно розуміють час роботи деякого елемента, а ξ_i'' — час його відновлення.

Покладемо $\xi(t) = 1$, якщо в момент часу t елемент працює, і $\xi(t) = 0$ в противному випадку,

$$\mathsf{E}\,\xi_i' = a, \qquad \mathsf{E}\,\xi_i'' = b, \qquad \rho = \frac{b}{a}, \qquad v = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

І нехай деяка система містить n елементів, причому зміна станів i-го елемента описується альтернуючим процесом відновлення $\xi_i(t)$, $(\xi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n)$ — незалежні копії $\xi(t)$, $S(t) = \sum_{i=1}^n (1 - \xi_i(t))$ — це число елементів системи, які в момент часу t відновлюються.

Лема 2. *Якщо в.в.* (ξ_i', ξ_i'') *задовольняють умову* (3), *то для будь-якого* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(S(t) = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} v^k (1-v)^{n-k}.$$

Доведення леми 2. Покладемо $v(t) = \mathsf{P}(\xi(t) = 0)$. Так як в фіксований момент часу t система описується схемою незалежних випробувань Бернуллі, то

$$\mathsf{P}(S(t) = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} v(t)^k (1 - v(t))^{n-k}. \tag{18}$$

Добре відомо ([1, с.122–124]), що існує границя

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v = \frac{b}{a+b}. \tag{19}$$

Із (18) та (19) негайно одержуємо твердження леми 2. □

Щоб установити теорему 3 залишається помітити, що дубльована система типу $(ii/2/2)$ еківалентна системі, яка складається із $n = 2$ незалежних альтернуючих процесів відновлення.

Дійсно, робота такої дубльованої системи та її основні характеристики не зміняться, якщо основний елемент завжди буде відновлюватися ремонтною одиницею з номером 1, а резервний — ремонтною одиницею з номером 2. Тоді робота кожної такої пари (робочий елемент – ремонтна одиниця) описується альтернуючим процесом відновлення, причому ці процеси незалежні та однаково розподілені.

Таким чином теорема 3 буде безпосереднім наслідком леми 2.

Зрозуміло, що подібне зауваження вірне і для загальної резервованої системи з відновленням типу $(ii/n/n)$ – вона буде еківалентна системі, яка складається із n незалежних альтернуючих процесів відновлення. А отже за лемою 2 для неї можна виписати стаціонарні ймовірності.

Доведення теореми 4. Через τ та τ' позначаємо час безвідмовної роботи основного та резервного елементів, (τ_i) та (τ_i') — їх незалежні копії.

Нехай S_0, S_1, S_2, … — послідовні моменти попадання в стан 0. Беручи до уваги властивість відсутності післядії експоненційного розподілу приходимо до висновку, що в момент S_k розподіл залишкового часу безвідмовної роботи для основного і резервного елементів буде такий самий, як і розподіл (τ_0, τ_0') в момент $S_0 = 0$, і не залежить від попередньої історії. Це фактично означає, що цикл (S_k, S_{k+1}) буде еквівалентним циклу (S_0, S_1) і незалежним від нього, тобто $S_0, S_1, S_2, \dots$ будуть моментами регенерації системи.

Нехай $T_1 = S_1 - S_0 = S_1$ — довжина першого циклу регенерації. Як і вище через $\overline{\alpha}_k$, $k = 0, 1, 2$ позначаємо час перебування в стані k на першому циклі регенерації. Тоді згідно з зауваженням 1, лемою 1 та рівностями (16) теореми 3 маємо

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0}{\mathsf{E}\,T_1} &= p_0 = p_0^* = \frac{1}{(1+\rho)^2},\\
\frac{\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1}{\mathsf{E}\,T_1} &= p_1 = p_1^* = \frac{2\rho}{(1+\rho)^2},\\
\frac{\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2}{\mathsf{E}\,T_1} &= p_2 = p_2^* = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Неважко обчислити середній час перебування системи в стані 0 на першому циклі регенерації

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \mathsf{E}\min(\tau_0, \tau_0') = \frac{1}{2\lambda}.$$

Разом остання рівність та співвідношення (20) дають

$$\mathsf{E}\,T_1 = \frac{(1+\rho)^2}{2\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{\rho^2}{2\lambda}.$$

Звідси і отримуємо формули (17). $\square$

Для обмеженого відновлення можна сформулювати наступний результат.

Теорема 5. *Якщо для дубльованої системи типу* $(ii/2/1)$ *виконується умова* (3) *і в.в.* τ *має експоненційний розподіл,* $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, *то існують стаціонарні ймовірності* (1) *і*

$$p_0 = \frac{1-q}{1-q+2\rho}, \qquad p_1 = \frac{2q}{1-q+2\rho}, \qquad p_2 = \frac{2(\rho-q)}{1-q+2\rho}.$$

Середня довжина k-го робочого періоду та періоду простою системи при $k \geq 2$ *задаються формулами*

$$\mathsf{E}\,W_k' = \frac{1+q}{2\lambda q}, \qquad \mathsf{E}\,W_k'' = \frac{\rho-q}{\lambda q},$$

де $\rho = \lambda b$.

Доведення теореми 5 відкладемо до наступного підрозділу.

4. Полегшений резерв

Почнемо з випадку необмеженого відновлення, тобто будемо досліджувати дубльовану систему типу $(iii/2/2)$. Будемо припускати, що час безвідмовної роботи основного елемента τ і резервного τ' мають експоненційний розподіл:

$$\mathsf{P}(\tau < x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \mathsf{P}(\tau' < x) = 1 - e^{-\lambda' x}, \qquad x \geq 0. \tag{21}$$

Теорема 6. *Якщо для дубльованої системи типу* $(iii/2/2)$ *виконуються умови* (3) *та* (21)*, то існують границі* (1) *і*

$$p_0 = \frac{2\lambda}{2\lambda + (\lambda+\lambda')(2\rho+\rho^2)},$$
$$p_1 = \frac{2(\lambda+\lambda')\rho}{2\lambda + (\lambda+\lambda')(2\rho+\rho^2)}, \tag{22}$$
$$p_2 = \frac{(\lambda+\lambda')\rho^2}{2\lambda + (\lambda+\lambda')(2\rho+\rho^2)}.$$

Моменти повернення системи в стан 0 *будуть моментами регенерації, а середній час перебування в станах на одному циклі регенерації задається формулами:*

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \frac{1}{\lambda+\lambda'}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{\rho^2}{2\lambda}, \tag{23}$$

де $\rho = \lambda b$.

Доведення теореми 6. Вводимо моменти регенерації системи типу $(iii/2/2)$ так само, як і у попередньому випадку — це моменти попадання в стан 0, але позначаємо їх наступним чином: $S_0^* = 0, S_1^*, S_2^*, \dots$. Порівняємо перші цикли регенерації $(0, S_1^*)$ та $(0, S_1)$ для систем типу $(iii/2/2)$ та $(ii/2/2)$ відповідно.

Нагадаємо, що ф.р. в.в. τ та τ' задаються рівностями (21) для системи типу $(iii/2/2)$, а у випадку системи $(ii/2/2)$ мають однаковий розподіл $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$.

Зрозуміло, що 1-й перехід із стану 0 в стан 1 на $(0, S_1^*)$ відбудеться в момент $t_0^* = \min(\tau_0^*, {\tau_0^*}')$, а на $(0, S_1)$ — в момент $t_0 = \min(\tau_0, \tau_0')$.

Подальша поведінка системи $(iii/2/2)$ на інтервалі (t_0^*, S_1^*) та системи $(ii/2/2)$ на (t_0, S_1) еквівалентні в імовірнісному сенсі, бо різниця між цими системами проявляється лише коли вони перебувають в стані 0.

Нехай $\overline{\alpha}_k^*$ та $\overline{\alpha}_k$ — час перебування в стані k систем $(iii/2/2)$ та $(ii/2/2)$ відповідно на перших циклах регенерації $(0, S_1^*)$ та $(0, S_1)$, $k = 0, 1, 2$. Тоді при $k = 1, 2$ $\overline{\alpha}_k^*$ та $\overline{\alpha}_k$ однаково розподілені і згідно рівності (17)

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1^* = \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \frac{\rho}{\lambda}, \qquad \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2^* = \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \frac{\rho^2}{2\lambda}. \tag{24}$$

Очевидно, що $\overline{\alpha}_0^* = t_0^*$ і

$$\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0^* = \mathsf{E}\min(\tau_0^*, {\tau_0^*}') = \frac{1}{\lambda+\lambda'}. \tag{25}$$

Рівності (24), (25) дозволяють знайти середню довжину інтервалу регенерації для системи типу $(iii/2/2)$

$$\mathsf{E}\,T_1^* = \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0^* + \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1^* + \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2^* = \frac{2\lambda + (\lambda+\lambda')(2\rho+\rho^2)}{2\lambda(\lambda+\lambda')}.$$

Далі залишається застосувати лему 1 і за формулою

$$p_k = \frac{\mathsf{E}\,\overline{\alpha}_k^*}{\mathsf{E}\,T_1^*}, \qquad k = 0, 1, 2$$

обчислити стаціонарні ймовірності (22). □

Зауваження 7. Зрозуміло, що ненавантажений резерв — це частковий випадок полегшеного резерву. Тому теорему 2 одержуємо, як наслідок теореми 6 при $\lambda' = 0$.

І нарешті, перейдемо до обмеженого відновлення і розглянемо дубльовану систему $(iii/2/1)$.

Теорема 7. *Якщо для дубльованої системи типу* $(iii/2/1)$ *виконуються умови* (3) *та* (21), *то існують границі* (1) *і*

$$p_0 = \frac{1-q}{1-q+b(\lambda+\lambda')}, \qquad p_1 = \frac{q(\lambda+\lambda')}{\lambda\big[1-q+b(\lambda+\lambda')\big]}, \qquad p_2 = \frac{(\lambda b - q)(\lambda+\lambda')}{\lambda\big[1-q+b(\lambda+\lambda')\big]}. \tag{26}$$

Середня довжина k-го робочого періоду та періоду простою такої системи при $k \geq 2$ задаються формулами:

$$\mathsf{E}\, W_k' = \frac{\lambda + q\lambda'}{\lambda(\lambda+\lambda')q} \quad \text{та} \quad \mathsf{E}\, W_k'' = \frac{\lambda b - q}{\lambda q}. \tag{27}$$

відповідно.

Доведення теореми 7. Введемо моменти регенерації системи аналогічно теоремі 1: S_0 — момент першої відмови одного з елементів, S_i — це i-ий момент, коли один елемент закінчив ремонт, а другий почав відновлення, $i = 1, 2, \ldots$

Так само, як і в доведенні теореми 1, введемо події $A_n = \{\tau_n < \eta_n\}$, в.в. $\varepsilon_n = I(A_n)$ та $\nu = \min(n \geq 1 : \quad \varepsilon_n = 1)$.

І нехай $\widetilde{\tau}_i = \min(\tau_i^*, \tau_i^{*\prime})$, де τ_i^* та $\tau_i^{*\prime}$ — залишковий час роботи основного і резервного елементів після i-ого відновлення на першому циклі регенерації, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Тоді графічно можна зобразити перший цикл регенерації системи типу $(iii/2/1)$ наступним чином:

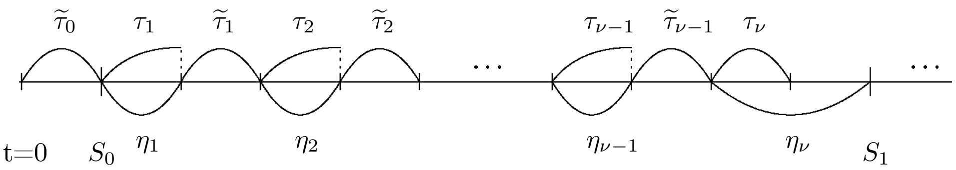

Рис. 2

Якщо $\overline{\alpha}_k$ – час перебування в стані k, $k = 0, 1, 2$ на (S_0, S_1), то із рис.2 робимо такий висновок:

$$\overline{\alpha}_0 = \sum_{i=1}^{\nu-1} \widetilde{\tau}_i, \quad \overline{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \min(\tau_i, \eta_i), \qquad T_1 = S_1 - S_0 = \sum_{i=1}^{\nu} \eta_i + \sum_{i=1}^{\nu-1} \widetilde{\tau}_i, \qquad \overline{\alpha}_2 = T_1 - \overline{\alpha}_0 - \overline{\alpha}_1. \tag{28}$$

Ще раз скориставшись відсутністю післядії експоненціного розподілу, приходимо до висновку, що послідовність $(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \ldots)$ не залежить від послідовності

$$\big((\tau_1, \eta_1), (\tau_2, \eta_2), \ldots, (\tau_\nu, \eta_\nu)\big).$$

Так само вона не залежить від ν.

Перейдемо до математичних сподівань у рівностях (28):

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_0 = \mathsf{E}(\nu-1)\,\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_i = \left(\frac{1}{q}-1\right)\frac{1}{\lambda+\lambda'} = \frac{1-q}{q(\lambda+\lambda')}, \\ \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_1 = \mathsf{E}\,\nu\,\mathsf{E}\min(\tau,\eta) = \frac{d}{q} = \frac{1}{\lambda}, \\ \mathsf{E}\,T_1 = \mathsf{E}\,\nu\,\mathsf{E}\,\eta + \mathsf{E}(\nu-1)\,\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1 = \frac{b}{q} + \frac{1-q}{q(\lambda+\lambda')}, \\ \mathsf{E}\,\overline{\alpha}_2 = \mathsf{E}\,\nu\,\mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}\,\nu\,\mathsf{E}\min(\tau,\eta) = \frac{b}{q} - \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{29}$$

Щоб отримати рівності (26) залишається скористатися формулою (5) із леми 1. Перехід від (29) до (27) очевидний. □

Зауваження 8. Оскільки при $\lambda' = \lambda$ полегшений резерв переходить в навантажений, то теорема 5 — це простий наслідок теореми 7.

Зауваження 9. Позначимо через $\chi(t)$ загальне число змін станів дубльованої системи на інтервалі $(0,t)$, $\chi_k(t)$ — число тих змін, коли перехід робиться в стан k, $k = 0,1,2$. Зрозуміло, що

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \chi_1(t) + \chi_2(t).$$

Аналіз доведення теорем 1, 5 та 7 показує, що для них вірні такі співвідношення: для $k = 0,1,2$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\chi_k(t)}{\chi(t)} = p'_k \quad \text{м.н.},$$

причому

$$p'_0 = \frac{1-q}{2}, \qquad p'_1 = \frac{1}{2}, \qquad p'_2 = \frac{q}{2}. \tag{30}$$

Розглянемо дубльовану систему типу $(i/2/1)$ і покладемо $\zeta_k = \zeta(t_k+0)$, $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$ – моменти зміни станів системи. Тоді послідовність (ζ_k) утворює ланцюг Маркова з матрицею ймовірностей переходів

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-q & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із рівнянь для стаціонарних ймовірностей ланцюга Маркова

$$p'_k = \sum_i p'_i p_{ik}, \qquad k = 0,1,2$$

легко знаходимо p'_0, p'_1, p'_2. Вони також задаються рівностями (30).

Добре відомо (див., наприклад, [17]), що для одноканальної системи масового обслуговування з необмеженою чергою і пуассонівським потоком заявок стаціонарні ймовірності станів співпадають із стаціонарними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова. Із порівняння формул (4) та (30) ясно, що стаціонарні ймовірності резервованої системи з відновленням можуть істотно відрізнятися від стаціонарних ймовірностей вкладеного ланцюга Маркова навіть при експоненційних розподілах в.в. τ_i та η_i.

Література

1. Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловйов, *Математические методы в теории надежности*, "Наука", Москва, 1965.
2. B. Epstein and T. Hosford, textitReliability of some two units redundant systems, Proc. 6-th Nat. Symp. on Reliability and Quality Control, 1960, pp. 466–476.
3. Б. В. Гнеденко, *О ненагруженном дублировании*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **4** (1964), 3–12.
4. Б. В. Гнеденко, *О дублировании с восстановлением*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **5** (1964), 111–118.
5. И. Н. Коваленко, *Исследования по анализу надежности сложных систем*, "Наукова думка", Киев, 1975.
6. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Моделирование высоконадежных систем*, Надежность технических систем. Справочник (И. А. Ушаков, ред.), "Радио и связь", Москва, 1985.
7. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, "Наукова думка", Киев, 1976.
8. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем*, "Наукова думка", Киев, 1982.
9. В. С. Королюк, *Стохастические модели систем*, "Наукова думка", Киев, 1989.
10. А. Д. Соловьев, *Надежность систем с восстановлением*, Кибернетику на службу коммунизму, т. 2, "Энергия", Москва, 1964.
11. А. Д. Соловьев, *Методы расчета надежности систем с восстановлением*, Надежность технических систем. Справочник (И. А. Ушаков, ред.), "Радио и связь", Москва, 1985.
12. Т. П. Марьянович, *Некоторые вопросы надежности резервированных систем*, Укр. мат. ж. **15** (1963), №2, 145–157.
13. І. К. Мацак, *Про однолінійну систему масового обслуговування*, Теорія Ймовірн. Мат. Статист. **90** (2014), 136–142.
14. Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*, "Советское радио", Москва, 1967.
15. И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко, *Теория вероятностей и математическая статистика*, "Выща школа", Киев, 1988.
16. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, "Наука", Москва, 1986.
17. В. В. Анисимов, О. К. Закусило, В. С. Донченко, *Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем*, "Вища школа", Киев, 1987.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127

Адреса електронної пошти: bogdov@gmail.com

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127

Адреса електронної пошти: ivanmatsak@univ.kiev.ua

Надійшла 11/04/2016