Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 85–92

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 85–92

ТОЧКОВІ ПРОЦЕСИ КЕРОВАНІ СКЛАДНИМИ ПРОЦЕСАМИ ПУАССОНА

УДК 519.21

Х. В. КОБИЛИЧ І Л. М. САХНО

Анотація. Ми досліджуємо точкові процеси $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$, де $N(t)$ – це процес Пуассона, а $H^f(t)$ – субординатор з функцією Бернштейна $f(\lambda)$. У випадку, коли $H^f(t)$ є складним процесом Пуассона з гамма розподіленими стрибками, представлено вигляд розподілу та моментів першого та другого порядків для процесів $N^f(t)$, а також досліджено ці процеси при повторній та кратній заміні часу.

Abstract. We investigate point processes $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$, where $N(t)$ is a Poisson process and $H^f(t)$ is the subordinator with Bernštein function $f(\lambda)$. For the case when $H^f(t)$ is the compound Poisson process with gamma distributed jumps we present probabilistic distribution and moments of the first and second order of the processes $N^f(t)$, and also consider these processes with double and iterated time change.

Аннотация. Мы исследуем точечные процессы $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$, где $N(t)$ – это процесс Пуассона, а $H^f(t)$ – субординатор с функцией Бернштейна $f(\lambda)$. В случае, когда $H^f(t)$ представляет собой сложный процесс Пуассона с гамма распределенными скачками, представлен вид распределения и моментов первого и второго порядков для процессов $N^f(t)$, а также эти процессы исследованы при повторной и кратной замене времени.

1. Вступ

Ми досліджуємо точкові процеси $N^f(t)$, $t > 0$, з незалежними приростами і цілочисельними стрибками, розподіл яких визначається наступним чином:

$$Pr\left\{N^f[t, t+dt) = k\right\} = \begin{cases} dt\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^\infty e^{-\lambda s}s^k\nu(ds) + o(dt), k \geq 1, \\ 1 - dt\int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda s}\right)\nu(ds) + o(dt), k = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де f — це функція Бернштейна:

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda s}\right)\nu(ds)$$

з відповідною мірою Леві ν. Ці процеси, що є узагальненням процесу Пуассона, були введені і детально досліджені в роботі [6].

У роботі [6] було встановлено, що процеси $N^f(t)$, $t > 0$, можна розглядати, як процеси Пуассона з випадковою заміною часу $N^f(t) = N\left(H^f(t)\right)$, де $N(t)$, $t > 0$ — це процес Пуассона з інтенсивністю λ, $H^f(t)$, $t > 0$ — це субординатор Леві, якому відповідає функція Бернштейна f, тобто, з перетворенням Лапласа вигляду

$$\mathsf{E}e^{-uH^f(t)} = e^{-tf(u)} = e^{-t\int_0^\infty\left(1-e^{-su}\right)\nu(ds)};$$

субординатор $H^f(t)$ і процес Пуассона $N(t)$ незалежні.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G55, 60G50.

Ключові слова і фрази. Точкові процеси, процеси Пуассона, узагальнені процеси Пуассона, функція Бернштейна, субординатори.

Ймовірності $p_k^f(t) = P\left\{N^f(t) = k\right\}$ задовольняють рівняння

$$\frac{d}{dt}p_k^f(t) = -f(\lambda)p_k^f(t) + \sum_{m=1}^{k}\frac{\lambda^m}{m!}p_{k-m}^f(t)\int_0^\infty e^{-s\lambda}s^m\nu(ds), k \geq 0, t > 0,$$

та можуть бути представлені наступною формулою:

$$P\left\{N^f(t) = k\right\} = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{du^k}e^{-tf(\lambda u)}\Big|_{u=1},$$

а твірна функція для $N^f(t)$ має вигляд:

$$G^f(u,t) = e^{-tf(\lambda(1-u))}, |u| \leq 1. \tag{2}$$

У роботі [6] було досліджено також деякі інші властивості процесів $N^f(t)$ та розглянуто три часткових випадки:

$$f(\lambda) = \lambda^\alpha, \quad \alpha \in (0,1), \tag{3}$$

$$f(\lambda) = (\lambda + \theta)^\alpha - \theta^\alpha, \quad \alpha \in (0,1), \quad \theta > 0, \tag{4}$$

$$f(\lambda) = \log(1 + \lambda). \tag{5}$$

У випадку (3) маємо так званий дробовий по просторовій змінній процес Пуассона (space-fractional Poisson process), якому присвячено ряд робіт (див., наприклад, роботи [2, 5, 4, 7] та наведену там літературу), у випадках (4) та (5) одержуємо так звані процес Пуассона помірного росту (tempered Poisson process) та від'ємний біномальний процес (negative binomial process) відповідно. (Тут і далі ми наводимо поряд деякими термінами їх англомовні варіанти, оскільки українска термінологія не є усталеною.)

Субординатори Леві $H^f(t)$, $t > 0$, із вказаними вище функціями Бернштейна (4), (5) належать до важливого сімейства субординаторів, що визначаються наступним трьох-параметричний сімейством мір Леві:

$$\nu(ds) = cs^{-\alpha-1}e^{-\beta s}ds, \quad c > 0, \beta > 0, \alpha < 1; \tag{6}$$

стійкий субординатор з функцією (3) матимемо у випадку, коли $\beta = 0$. Зазначимо, що таке сімейство субординаторів вказане як важливе для фінансових застосувань у статті [3] (див. приклад 3.1).

При $\alpha \in (0, 1)$ маємо так звані стійкі субординатори помірного росту (tempered stable subordinators), тобто, у цьому випадку міра $\nu(ds) = cs^{-\alpha-1}ds$, що відповідає стійкому субординатору, "пригнічується" експонентою від'ємного степеня $e^{-\beta s}$; частковому випадку $\alpha = \frac{1}{2}$ відповідає субординатор, що є оберненим гауссовим процесом (inverse Gaussian process).

При $\alpha < 0$ субординатори із мірою (6) являють собою складні процеси Пуассона із стрибками, що мають гамма розподіл, зокрема, при $\alpha = -1$ маємо експоненційний розподіл стрибків.

При $\alpha \neq 0$ мірі (6) відповідає функція Бернштейна

$$f(\lambda) = -c\Gamma(-\alpha)\left[(\lambda + \beta)^\alpha - \beta^\alpha\right], \tag{7}$$

де $\Gamma(x)$ — це гамма-функція.

Граничний випадок, коли $\alpha = 0$ приводить до гамма субординаторів із функцією Бернштейна

$$f(\lambda) = c\ln\left(1 + \frac{\lambda}{\beta}\right). \tag{8}$$

У наступному розділі представлено функцію розподілу, твірну функцію та моменти першого та другого порядків для процесів $N^f(t)$ з функцією Бернштейна (7), тобто, показано, що результати, отримані в роботі [6] для випадку функції f, що задається формулою (4), можна поширити на випадок, коли $\alpha < 0$.

Зазначимо, що при $\alpha \in [0,1)$ ймовірнісні міри $P\{H^f(t) \in ds\}$ відомі у явному вигляді лише у двох часткових випадках: коли $\alpha = 0$ (гамма процес) і $\alpha = \frac{1}{2}$ (обернений гауссовий процес). При $\alpha < 0$, тобто коли субординатори $H^f(t)$ являють собою складні процеси Пуассона з гамма-розподіленими стрибками, ймовірнісні міри $P\{H^f(t) \in ds\}$ можуть бути виписані у явному вигляді, і це може бути використано в подальших дослідженнях властивостей відповідних процесів $N\left(H^f(t)\right)$.

Особливу увагу ми звернули на випадок $\alpha = -1$. У цьому випадку ми виявили у процесів $N\left(H^f(t)\right)$ таку саму цікаву властивість стосовно повторної та кратної заміни часу (яку можна назвати авто-консервативністю), що притамана і процесам Пуассона, підпорядкованим стійким субординаторам (див. [4], [5]). Таким чином, ми даємо позитивну відповідь на питання, що було поставлене в роботі [4], про те, чи існують інші процеси, які поводять себе подібно до дробового по просторовій змінній процесу Пуассона при кратній заміні часу. Ці результати представлено у розділі 3.

2. Розподіл та моменти узагальнених процесів Пуассона $N^f(t)$

У цьому розділі ми розглянемо узагальнені процеси Пуассона $N^f(t)$, що відповідають функціям Бернштейна (7) та (8).

У випадку, коли функція f задається формулою (7), ймовірності (1) набувають вигляду:

$$Pr\left\{N^f[t,t+dt)=k\right\} = \begin{cases} dt\frac{\lambda^k}{k!}\frac{c}{(\lambda+\beta)^{k-\alpha}}\Gamma(k-\alpha)+o(dt), & k\ge 1,\\ 1+c\Gamma(-\alpha)\left[(\lambda+\beta)^\alpha-\beta^\alpha\right]dt+o(dt), & k=0,\end{cases} \tag{9}$$

оскільки

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}s^k\nu(ds) = c\int_0^\infty e^{-s(\lambda+\beta)}s^{k-\alpha-1}ds = \frac{c}{(\lambda+\beta)^{k-\alpha}}\int_0^\infty e^{-t}t^{k-\alpha}dt$$
$$= \frac{c}{(\lambda+\beta)^{k-\alpha}}\Gamma(k-\alpha).$$

У наступній теоремі встановлено розподіл, твірну функцію та моменти першого та другого порядків для цих процесів.

Теорема 1. *Нехай $N^f(t)$, $t>0$ — це узагальнений процесс Пуассона з функцією Бернштейна $f(\lambda) = -c\Gamma(-\alpha)\left[(\lambda+\beta)^\alpha-\beta^\alpha\right]$, $c>0$, $\beta>0$, $\alpha<1$, $\alpha\neq 0$. Тоді:*

$$G(u,t) = e^{-ct\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha}\sum_{m=0}^\infty u^m\left[\frac{(-1)^m\lambda^m}{(\lambda+\beta)^m\,m!}\sum_{k=0}^\infty\frac{(tc\Gamma(-\alpha)(\lambda+\beta)^\alpha)^k}{k!}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-m)}\right]; \tag{10}$$

$$Pr\left\{N^f(t)=m\right\} = e^{-ct\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha}\frac{(-1)^m\lambda^m}{(\lambda+\beta)^m\,m!}\sum_{k=0}^\infty\frac{(tc\Gamma(-\alpha)(\lambda+\beta)^\alpha)^k}{k!}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-m)}; \tag{11}$$

$$\mathsf{E}\left[N^f(t)\right] = -c\alpha\Gamma(-\alpha)\beta^{\alpha-1}\lambda t;\quad \mathsf{D}\left[N^f(t)\right] = -c\alpha\Gamma(-\alpha)\lambda\beta^{\alpha-2}\left((1-\alpha)\lambda+\beta^{\alpha-1}\right)t;$$
$$Cov\left[N^f(t),N^f(s)\right] = -c\alpha\Gamma(-\alpha)\lambda\beta^{\alpha-2}\left((1-\alpha)\lambda+\beta^{\alpha-1}\right)\min(s,t).$$

Доведення. Для знаходження твірної функції використовуємо формулу (2). Обчислення, що наведені в [6] (див. розділ 4.2) для випадку $0<\alpha<1$, зберігаються і у випадку $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned}
G(u,t) &= e^{-tf(\lambda(1-u))} = e^{-tc\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha} e^{tc\Gamma(-\alpha)(\lambda(1-u)+\beta)^\alpha} \\
&= e^{-tc\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(tc\Gamma(-\alpha)\left(\lambda(1-u)+\beta\right)^\alpha\right)^k}{k!} \\
&= e^{-tc\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(tc\Gamma(-\alpha)\right)^k (\lambda+\beta)^{\alpha k}}{k!} \left(1 - \frac{\lambda u}{\lambda+\beta}\right)^{\alpha k} \\
&= e^{-tc\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(tc\Gamma(-\alpha)\right)^k (\lambda+\beta)^{\alpha k}}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-m)} \left(-\frac{\lambda u}{\lambda+\beta}\right)^m \\
&= e^{-tc\Gamma(-\alpha)\beta^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} u^m \left[\frac{(-1)^m \lambda^m}{m!\,(\lambda+\beta)^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(tc\Gamma(-\alpha)(\lambda+\beta)^\alpha\right)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-m)}\right].
\end{aligned}$$

Розподіл (11) одержуємо як наслідок формули (10).

Вирази для середнього, дисперсії та коваріаційної функції встановлюємо, використовуючи наведену нижче лему 1 та наступні вирази для похідних функції f:

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= -c\alpha\Gamma(-\alpha)(\lambda+\beta)^{\alpha-1}; \quad f''(\lambda) = -c\Gamma(-\alpha)\alpha(\alpha-1)(\lambda+\beta)^{\alpha-2}; \\
f'(0) &= -c\alpha\Gamma(-\alpha)(\beta)^{\alpha-1}; \qquad f''(0) = -c\Gamma(-\alpha)\alpha(\alpha-1)(\beta)^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

□

Лема 1. *Процес $N^f(t)$, $t > 0$ має середнє, дисперсію та коваріаційну функцію наступного вигляду:*

$$\mathsf{E}\left[N^f(t)\right] = t\lambda f'(0); \; \mathsf{D}\left[N^f(t)\right] = t(\lambda f'(0) - \lambda^2 f''(0));$$

$$Cov\left[N^f(t), N^f(s)\right] = (\lambda f'(0) - \lambda^2 f''(0)) \min(s,t).$$

Доведення. Вирази для середнього та дисперсії одержуємо прямими обчисленнями, використовуючи формули

$$\mathsf{E}\left[N^f(t)\right] = G'_u\big|_{u=1}; \; \mathsf{D}\left[N^f(t)\right] = G''_u\big|_{u=1} + G'_u\big|_{u=1} - \left(G'_u\big|_{u=1}\right)^2$$

та формулу (2) для твірної функції $G(u,t)$; вираз для коваріаційної функції знаходимо, використовуючи той факт, що процес $N^f(t)$ є процесом з незалежними приростами. □

Зауваження 1. Для випадку $\alpha < 0$ вираз $(-1)^m \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-m)}$, що з'являється у правих частинах формул (10)–(11) зручніше записувати у вигляді $\frac{\Gamma(-\alpha k+m)}{\Gamma(-\alpha k)}$. Це спрощення використано в теоремі 3.

Для того, щоб повністю описати процеси $N^f(t)$ для випадку субординаторів з мірами Леві (6), наведемо відповідні результати для випадку $\alpha = 0$.

Теорема 2. *Процес $N^f(t), t > 0$, з функцією Бернштейна $f(\lambda) = c\log\left(1+\frac{\lambda}{\beta}\right)$ має наступні характеристики:*

$$Pr\left\{N^f[t,t+dt) = k\right\} = \begin{cases} dt\frac{c\lambda^k}{k(\lambda+\beta)^k} + o(dt), & k \geq 1, \\ 1 - c\log\left(1+\frac{\lambda}{\beta}\right)dt + o(dt), & k = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$G(u,t) = \frac{\beta^{ct}}{(\lambda+\beta)^{ct}} \sum_{k=0}^{\infty} u^k \left[\frac{\lambda^k}{k!\,(\lambda+\beta)^k} \frac{\Gamma(ct+k)}{\Gamma(ct)}\right]; \tag{13}$$

$$Pr\left\{N^f(t)=m\right\}=\frac{\beta^{ct}}{(\lambda+\beta)^{ct}}\frac{\lambda^k}{k!\,(\lambda+\beta)^k}\frac{\Gamma\,(ct+k)}{\Gamma\,(ct)}; \tag{14}$$

$$\mathsf{E}\left[N^f(t)\right]=\frac{c\lambda}{\beta}t;\quad \mathsf{D}\left[N^f(t)\right]=\left(\frac{c\lambda^2}{\beta^2}+\frac{c\lambda}{\beta}\right)t;$$

$$Cov\left[N^f(t),N^f(s)\right]=\left(\frac{c\lambda^2}{\beta^2}+\frac{c\lambda}{\beta}\right)\min(s,t).$$

Доведення. Доведення одержуємо аналогічно доведенню відповідних результатів у випадку $f(\lambda)=\log(1+\lambda)$ (див. [6]), потрібно лише відслідкувати де з'являться константи c і $\frac{1}{\beta}$. □

Ми дослідимо більш детально процеси $N^f(t), t>0$, у випадку, коли $\alpha=-1$, тобто, з функцією Бернштейна $f(\lambda)=\frac{c}{\beta}\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$. Характеристики таких процесів випишемо окремо в наступній теоремі, що є частковим випадком теореми 1.

Теорема 3. *Нехай $N^f(t)$, $t>0$ — це узагальнений процесс Пуассона з функцією Бернштейна $f(\lambda)=\frac{c}{\beta}\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$, $c>0$, $\beta>0$. Тоді:*

$$Pr\left\{N^f[t,t+dt)=k\right\}=\begin{cases}dt\frac{c\lambda^k}{(\lambda+\beta)^{k+1}}+o(dt), & k\geq 1,\\ 1-\frac{c}{\beta}\frac{\lambda}{\lambda+\beta}dt+o(dt), & k=0,\end{cases} \tag{15}$$

$$G(u,t)=\sum_{m=o}^{\infty}u^m\left[e^{-\frac{c}{\beta}t}\frac{\lambda^m}{m!\,(\lambda+\beta)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ct)^k}{k!\,(\lambda+\beta)^k}\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}\right]; \tag{16}$$

$$Pr\left\{N^f(t)=m\right\}=e^{-\frac{c}{\beta}t}\frac{\lambda^m}{m!\,(\lambda+\beta)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ct)^k}{k!\,(\lambda+\beta)^k}\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}; \tag{17}$$

$$\mathsf{E}\left[N^f(t)\right]=\frac{c\lambda}{\beta^2}t;\quad \mathsf{D}\left[N^f(t)\right]=\left(\frac{2c\lambda^2}{\beta^3}+\frac{c\lambda}{\beta^2}\right)t;$$

$$Cov\left[N^f(t),N^f(s)\right]=\left(\frac{2c\lambda^2}{\beta^3}+\frac{c\lambda}{\beta^2}\right)\min(s,t).$$

У наступному розділі ми розглянемо випадок процесів з функцією Бернштейна $f(\lambda)=\frac{\lambda}{1+a\lambda}$, $a>0$, що відповідає мірі Леві $\nu(ds)=\frac{1}{a^2}e^{-\frac{s}{a}}ds$, тому ми вкажемо також характеристики і для цих процесів:

$$Pr\left\{N^f[t,t+dt)=k\right\}=\begin{cases}dt\frac{a^k\lambda^k}{(1+a\lambda)^{k+1}}+o(dt), k\geq 1,\\ 1-\frac{\lambda}{1+a\lambda}dt+o(dt), k=0,\end{cases}$$

$$Pr\left\{N^f(t)=m\right\}=e^{-\frac{t}{a}}\frac{\lambda^m a^m}{m!(1+a\lambda)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{a(1+a\lambda)}\right)^k\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)},\ m\geq 0;$$

$$\mathsf{E}\left[N^a(t)\right]=\lambda t;\quad \mathsf{D}\left[N^a(t)\right]=\lambda t+2a\lambda^2 t;\quad Cov\left[N^a(t)N^a(s)\right]=(\lambda t+2a\lambda^2 t)\min(s,t).$$

3. Повторна та кратна заміна часу

Серед узагальнених процесів Пуассона $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$, найбільш дослідженим є дробовий по просторовій змінній процес Пуассона, який одержуємо, вибираючи у якості $H^f(t)$ стійкий субординатор з $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ і перетворенням Лапласа $\mathsf{E}e^{-\lambda H^f(t)} = e^{-t\lambda^\alpha}$. Позначимо такий стійкий субординатор через $S^\alpha(t)$ і покладемо $N^\alpha(t) = N(S^\alpha(t))$.

У роботі [5] було встановлено, що повторна заміна часу з використанням ще одного стійкого субординатора $S^\gamma(t)$ приводить знову до дробового процесу Пуассона:

$$N^\alpha(S^\gamma(t) = N^{\alpha\gamma}(t)$$

(див. теорему 2.3 [5]).

У роботі [4] показано, що має місце більш загальний результат, тобто, можна виконувати n-кратну заміну часу і залишатись в тому самому класі процесів:

$$N^\alpha((S^{\gamma_1}(\dots S^{\gamma_n}(t)))) = N^{\alpha\prod_{j=1}^n \gamma_j}(t),$$

де S^{γ_j}, $0 < \gamma_j < 1$, $j = 1, ..., n$ – незалежні стійкі субординатори. При $0 < \prod_{j=1}^\infty \gamma_j < 1$ граничний процес при $n \to \infty$ також є дробовим процесом Пуассона.

Автори роботи [4] називають таку властивість авто-консервативністю.

Ми покажемо, що таку властивість має ще один підклас класу процесів $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$. А саме, процеси, що відповідають субординарам $H^f(t)$ з функцією Бернштейна і відповідною мірою Леві наступного вигляду:

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + a\lambda}, \quad \nu(ds) = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{s}{a}} ds, \quad a > 0.$$

Ці субординатори одержуємо, вибираючи для сімейства (6) параметри $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{a}$, $c = \frac{1}{a^2}$. Вказані субординатори являють собою складні процеси Пуассона з інтенсивністю $\frac{1}{a}$ та експоненційним розподілом стрибків із середнім a.

Позначимо функцію Бернштейна у цьому випадку через

$$\tilde{f}_a(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + a\lambda}, \; a > 0.$$

Вкажемо на таку особливість функцій $\tilde{f}_a(\lambda)$, яка буде для нас важливою: клас цих функцій є замкненим відносно операції суперпозиції функцій. А саме, має місце наступна властивість цих функцій:

$$\tilde{f}_a(\tilde{f}_b(\lambda)) = \tilde{f}_{a+b}(\lambda). \tag{18}$$

Позначимо субординатори, що відповідають функціям $\tilde{f}_a(\lambda)$ через $\widetilde{H}^a$, а відповідні процеси $N^{\tilde{f}_a}$ через $\widetilde{N}^a$. Розглянемо процеси $\widetilde{N}^a$ з повторною та n-кратною заміною часу наступного вигляду: $\widetilde{N}^a(\widetilde{H}^b(t)$ та $\widetilde{N}^a((\widetilde{H}^{b_1}(\dots \widetilde{H}^{b_n}(t))))$, де $\widetilde{N}^a(t)$, $\widetilde{H}^b(t)$, $\widetilde{H}^{b_i}(t)$, $i = 1, ...n$ незалежні між собою.

Нам буде потрібним наступний простий результат.

Теорема 4. *Нехай H^{f_1} та H^{f_2} незалежні субординатори з відповідними функціями Бернштейна f_1 та f_2. Тоді процес $H(t) = H^{f_1}(H^{f_2}(t))$, $t > 0$, є субординатором із функцією Бернштейна $f_2(f_1(\lambda))$.*

Доведення. Базуючись на теоремі 1.3.25 [1], можемо стверджувати, що $H(t)$ є субординатором. Враховуючи, що H^{f_1} та H^{f_2} незалежні, можемо записати наступне:

$$\mathsf{E}e^{-\lambda H^f(t)} = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}\big(e^{-\lambda H^{f_1}(H^{f_2}(t))}\big| H^{f_2}(t)\big)\big) = \mathsf{E}e^{-H^{f_2}(t) f_1(\lambda)} = e^{-t f_2(f_1(\lambda))}. \qquad \square$$

Зауваження 2. З теореми 4 та формули (18) одержуємо важливу властивість субординаторів $\widetilde{H}^a$: $\widetilde{H}^{a_1}(\widetilde{H}^{a_2}(t)) = \widetilde{H}^{a_1+a_2}(t)$.

Як наслідок вищенаведеного результату, встановлюємо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай узагальнений процес Пуассона $\widetilde{N}^{a_1}(t)$ та субординатори $\widetilde{H}^{a_i}(t)$, $i = 2, ..., n$ незалежні між собою. Тоді*

$$\widetilde{N}^{a_1}(\widetilde{H}^{a_2}(t)) = \widetilde{N}^{a_1+a_2}(t),$$

а при кратній заміні часу маємо:

$$\widetilde{N}^{a_1}((\widetilde{H}^{a_2}(\dots \widetilde{H}^{a_n}(t)))) = \widetilde{N}^{\sum_1^n a_i}(t).$$

Доведення. Застосовуючи теорему 4 та властивість функцій $\tilde{f}^a(\lambda)$ стосовно утворення суперпозицій (див. (18)), знаходимо:

$$\widetilde{N}^{a_1}(\widetilde{H}^{a_2}(t)) = N(\widetilde{H}^{a_1}(\widetilde{H}^{a_2}(t))) = N(\widetilde{H}^{a_1+a_2}(t)) = \widetilde{N}^{a_1+a_2}(t),$$

і аналогічно для n-кратної суперпозиції. □

Зауваження 3. Як можна бачити з теореми 5, n-кратна заміна часу в процесі $\widetilde{N}^{a_1} = N(\widetilde{H}^{a_1})$ з використанням незалежних субординаторів $\widetilde{H}^{a_i}(t)$, $i = 2, \dots, n$, при $n \to \infty$ приводить до процесу $\widetilde{N}^a = N(\widetilde{H}^a)$, де $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, за умови, що $0 < a < +\infty$.

Зауваження 4. Зазначимо, що властивість встановлена в теоремі 5 для процесів $\widetilde{N}^a = N(\widetilde{H}^a)$ насправді має місце і якщо замінити зовнішній процес Пуассона N будь-яким іншим однорідним процесом Леві. Ключовим є те, що кратну заміну часу утворюємо за допомогою субординатора з функцією Бенштейна $\tilde{f}_a(\lambda) = \frac{\lambda}{1+a\lambda}$, яка має властивість (18) стосовно утворення суперпозицій: $\tilde{f}_a(\tilde{f}_b(\lambda)) = \tilde{f}_{a+b}(\lambda)$. Іншою функцією з подібною властивістю є функція $f^\alpha(\lambda) = \lambda^\alpha$, для якої маємо $f^\alpha(f^\beta(\lambda)) = f^{\alpha\beta}(\lambda)$.

4. Висновки

В статті розглянуто точкові процеси $N^f(t) = N(H^f(t))$, $t > 0$, де $N(t)$ – це процес Пуассона, а $H^f(t)$ – субординатор з функцією Бернштейна $f(\lambda)$. Досліджено клас процесів, для яких $H^f(t)$ є складним процесом Пуассона з гамма розподіленими стрибками. Для таких процесів представлено функцію розподілу та моменти першого та другого порядків, а також досліджено ці процеси при повторній та кратній заміні часу. Встановлено, що при певному виборі функції $f(\lambda)$ повторна та кратна заміна часу у процесів із вказаного класу приводить до процесів з цього ж самого класу.

Література

1. D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Second edition, Cambridge University Press, 2009, MR2512800.
2. L. Beghin and C. Macci, *Alternative forms of compound fractional Poisson processes*, Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, 2012.
3. R. Mendoza-Arriaga and V. Linetsky, *Time-changed CIR default intensities with two-sided mean-reverting jumps*, The Annals of Applied Probability **24** (2014), no. 2, 811—856.
4. R.Garra, E. Orsingher and M. Scavino, *Some probabilistic properties of fractional point processes*, arXiv:1604.05235v1 (2016).
5. E. Orsingher and F. Polito, *The space-fractional Poisson process*, Statistics and Probability Letters **82** (2012), 852-–858.
6. E. Orsingher and B. Toaldo, *Counting processes with Bernstein intertimes and random jumps*, Journal of Applied Probability **52** (2015), 1028-–1044.
7. F. Polito and E. Scalas, *A Generalization of the Space-Fractional Poisson Process and its Connection to some Lévy Processes*, Electronic Communications in Probability **21(20)** (2016), 1—14.
8. K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999, MR 1739520 (2003b:60064).

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: kristina.kobilich@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: lms@univ.kiev.ua

Надійшла 4/04/2016