Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 110–124

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 110–124

УДК 519.21

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО З НЕРЕГУЛЯРНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ ВІД ПАРАМЕТРА

Г. Л. КУЛІНІЧ, С. В. КУШНІРЕНКО, Ю. С. МІШУРА

Анотація. Досліджується слабка збіжність при $T \to \infty$ функціоналів $\int_0^t g_T(\xi_T(s))\,dW_T(s)$, $t \ge 0$, де $\xi_T(t)$ — сильний розв'язок стохастичного диференціального рівняння $d\xi_T(t) = a_T(\xi_T(t))\,dt + dW_T(t)$, $T > 0$ — параметр, $a_T(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — дійсні вимірні функції, $|a_T(x)| \le C_T$ при всіх x, $W_T(t)$ — стандартні вінерівські процеси, $g_T(x)$ — дійсні, вимірні, локально обмежені, невипадкові функції. При нерегулярній залежності $g_T(x)$, $a_T(x)$ від параметра для вказаних функціоналів знайдено явний вигляд граничних процесів.

Ключові слова і фрази. Процеси дифузійного типу, гранична поведінка інтегральних функціоналів, нерегулярна залежність від параметра.

1. Вступ

Розглядається стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$d\xi_T(t) = a_T\big(\xi_T(t)\big)\,dt + dW_T(t), \quad t \ge 0, \quad \xi_T(0) = x_0, \tag{1}$$

де $T > 0$ — параметр; $a_T(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — дійсні вимірні функції, такі, що для певних сталих $L_T > 0$ виконуються нерівності $|a_T(x)| \le L_T$ для всіх $x \in \mathbb{R}$; $W_T = \{W_T(t), t \ge 0\}$ — сім'я стандартних вінерівських процесів, які задані на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$.

Відомо [14], що при будь-яких T та x_0 рівняння (1) має сильний єдиний по траєкторіях розв'язок $\xi_T = \{\xi_T(t), t \ge 0\}$, і цей розв'язок є однорідним строго марковським процесом.

У цій роботі досліджується слабка збіжність при $T \to \infty$ функціоналів

$$\int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s),$$

де $g_T(x)$ — вимірні, локально обмежені, невипадкові функції; процеси ξ_T і W_T пов'язані через рівняння (1), при цьому можлива нерегулярна залежність функцій $a_T(x)$, $g_T(x)$ від параметра T, тобто, у деяких точках при $T \to \infty$ вони можуть не мати границі або прямувати до нескінченності, або мати виродження іншого характеру.

Уперше необхідність граничних при $T \to \infty$ досліджень розподілів функціоналів

$$\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t a_T\big(\xi_T(s)\big)\,ds$$

від розв'язків $\xi_T(t)$ рівняння (1) виникла у роботах [3, 4] при $a_T(x) = \sqrt{T}a\big(x\sqrt{T}\,\big)$, де $a(x)$ — абсолютно інтегровна по всій прямій функція і $\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,dx = \lambda$ ($a_T(x)$ — δ-подібна сім'я у точці $x = 0$ із вагою λ).

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10; Secondary 60F17, 60J60.

При $\lambda = 0$ у роботі [3] встановлено збіжність $\beta_T^{(1)}(t)$ при $T \to \infty$ за ймовірністю до нуля для кожного $t > 0$, а при $\lambda \neq 0$ із роботи [4] випливає збіжність розподілів функціонала $\beta_T^{(1)}(t)$ до розподілів певного функціонала $\beta^{(1)}(t)$ від розв'язку $\zeta(t)$ стохастичного диференціального рівняння Іто $d\zeta(t) = \bar{\sigma}\big(\zeta(t)\big)\,dW(t)$, де $\bar{\sigma}(x) = \sigma_1$ при $x > 0$, $\bar{\sigma}(x) = \sigma_2$ при $x \le 0$, $\sigma_i = e^{-2\lambda_i}$, $\lambda_1 = \int_0^{\infty} a(x)\,dx$, $\lambda_2 = \int_0^{-\infty} a(x)\,dx$, при цьому для марковського процесу $\zeta(t)$ виписано явний вигляд перехідної щільності. Більше того, із роботи [5] випливає, що

$$\beta^{(1)}(t) = 2\left[\int_0^{\zeta(t)} \bar{b}(u)\,du - \int_0^t \bar{b}\big(\zeta(s)\big)\,d\zeta(s)\right], \quad x_0 = 0,$$

де $\bar{b}(x) = \lambda_1\sigma_1^{-2}$ при $x > 0$, $\bar{b}(x) = \lambda_2\sigma_2^{-2}$ при $x \le 0$. Зокрема, при $\lambda_1 = \lambda_2$ маємо $\beta^{(1)}(t) \equiv 0$, а при $\lambda_2\sigma_2^{-2} = -\lambda_1\sigma_1^{-2} = c_0$ отримуємо $\beta^{(1)}(t) = 2c_0 L_\zeta(t, 0)$, де $L_\zeta(t, 0)$ — локальний час процесу $\zeta(t)$ у точці 0 на відрізку $[0, t]$. Також із роботи [5] випливає, що розподіли функціонала $\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t \sqrt{|a_T(\xi_T(s))|}\,dW_T(s)$, де процеси $\xi_T(t)$ і $W_T(t)$ пов'язані через рівняння (1), у якому $x_0 = 0$, при $T \to \infty$ збігаються до розподілів процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес, процеси $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні. Тобто, у цьому випадку у граничних розподілах з'являється новий процес $W^*(t)$, який не залежить від граничних розподілів розв'язку $\xi_T(t)$. Уперше аналогічні граничні розподіли від вінерівського процесу $\zeta(t) = W(t)$ отримано в монографії [13, гл. 5, § 5] для адитивних функціоналів від випадкового блукання.

Ця робота є узагальненням і доповненням результатів робіт [8] і [9], у яких досліджувалась слабка збіжність такого типу функціоналів від розвязку ξ_T рівняння (1) при спеціальній залежності від параметра T коефіцієнта перенесення $a_T(x) = \sqrt{T}a\big(x\sqrt{T}\big)$. Також вона є продовженням роботи [7], у якій для розв'язку ξ_T рівняння (1) із класу $K(G_T)$ імовірнісним методом досліджувалась слабка збіжність при $T \to \infty$ функціоналів

$$\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,ds, \qquad \beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s),$$

$$I_T(t) = F_T\big(\xi_T(t)\big) + \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s), \qquad \beta_T(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,d\xi_T(s),$$

де процеси ξ_T, W_T пов'язані через рівняння (1), $g_T(x)$ — сім'я вимірних, локально обмежених дійсних функцій, $F_T(x)$ — дійсні неперервні функції. При цьому робота містить більш широкі класи збіжних функціоналів $\beta_T^{(2)}(t)$ (теорема 3.1 і теорема 3.2), а для $\beta_T^{(1)}(t)$ — достатні умови слабкої збіжності до вінерівського процесу (теорема 3.3). Детальний огляд відомих результатів досліджень цього напрямку наведено в роботі [8].

Стаття побудована таким чином. Наступний пункт містить основні означення і деякі зауваження. У п. 3 наведено формулювання основних результатів. У четвертому пункті доводяться основні результати. Допоміжні результати наведено у п. 5. Останній пункт доповнює основні результати низкою прикладів.

2. Основні означення і зауваження

У статті через C, N, C_N позначено певні сталі, які не залежать від T і x, а через $f_T(x)$ — функцію, яка визначається рівністю

$$f_T(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a_T(v)\,dv\right\} du. \tag{2}$$

Означення 2.1. Рівняння (1) належить до класу $K(G_T)$, якщо

1) існує сім'я неперервних функцій $G_T(x)$, $x \in \mathbb{R}$, які мають неперервні похідні $G'_T(x)$ і мають майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровні другі похідні $G''_T(x)$ і такі, що при всіх $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$(\boldsymbol{A_1})\quad \left[G'_T(x)a_T(x) + \frac{1}{2}\,G''_T(x)\right]^2 + \left[G'_T(x)\right]^2 \le C\left[1 + |G_T(x)|^2\right], \quad |G_T(x_0)| \le C$$

для певної сталої $C > 0$;

2) існують сталі $C > 0$, $\alpha > 0$ такі, що $|G_T(x)| \ge C|x|^\alpha$ при всіх $x \in \mathbb{R}$;

3) існують обмежена функція $\psi(x)$, $x \ge 0$, та стала $m \ge 0$ такі, що $\psi(x) \to 0$ при $x \to 0$ і для довільної вимірної, обмеженої множини B виконується нерівність

$$(\boldsymbol{A_2})\quad \int_0^x f'_T(u)\left(\int_0^u \frac{\chi_B\left(G_T(v)\right)}{f'_T(v)}\,dv\right)du \le \psi\big(\lambda(B)\big)\left[1 + |x|^m\right],$$

де $\chi_B(v)$ — індикатор множини B, $\lambda(B)$ — міра Лебега множини B, $f'_T(x)$ — похідна функції $f_T(x)$, яка визначена рівністю (2).

Також у статті для певних локально обмежених функцій $q_T(x)$ буде припускатися виконання такої умови:

$$(\boldsymbol{A_3})\quad \lim_{T\to\infty} \sup_{|x|\le N} f'_T(x)\left|\int_0^x \frac{q_T(v)}{f'_T(v)}\,dv\right| = 0$$

для довільної сталої $N > 0$.

Означення 2.2. Вважаємо, що сім'я процесів $\zeta_T = \{\zeta_T(t), t \ge 0\}$ слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\zeta = \{\zeta(t), t \ge 0\}$, якщо для довільного $L > 0$ міри $\mu_T[0, L]$, які відповідають процесам $\zeta_T(\cdot)$ на відрізку $[0, L]$, слабко збігаються до міри $\mu[0, L]$, яка відповідає процесу $\zeta(\cdot)$ на відрізку $[0, L]$.

Зауваження 2.1. Якщо процеси ζ_T та ζ неперервні з імовірністю 1, то означення 2.2 є означенням слабкої збіжності процесів ζ_T при $T \to \infty$ до процесу ζ у рівномірній топології простору неперервних функцій (див. [2, гл. IX, § 1]).

Зауваження 2.2. У статті часто використовується формула Іто для процесу $\Phi(\xi_T(t))$, де ξ_T — розв'язок рівняння (1), функція $\Phi(x)$ має неперервну похідну $\Phi'(x)$ і має майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровну другу похідну $\Phi''(x)$. Із роботи [10] випливає, що в цьому випадку для процесу $\Phi(\xi_T(t))$ з імовірністю 1 для всіх $t \ge 0$ виконується рівність (формула Іто)

$$\Phi\big(\xi_T(t)\big) = \Phi(x_0) + \int_0^t \left[\Phi'\big(\xi_T(s)\big)a_T\big(\xi_T(s)\big) + \frac{1}{2}\Phi''\big(\xi_T(s)\big)\right]ds + \int_0^t \Phi'\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s).$$

Зауваження 2.3. Якщо ξ_T — розв'язок рівняння (1), а для сім'ї функцій $G_T(x)$ виконується припущення 1) означення 2.1, то у роботі [6] встановлено слабку компактність процесів $\zeta_T(t) = G_T(\xi_T(t))$. При доведенні слабкої компактності використовується формула Іто

$$\zeta_T(t) = G_T(x_0) + \int_0^t \left[G'_T\big(\xi_T(s)\big)a_T\big(\xi_T(s)\big) + \frac{1}{2}G''_T\big(\xi_T(s)\big)\right]ds + \eta_T(t), \tag{3}$$

$$\eta_T(t) = \int_0^t G'_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s)$$

і стандартним методом [1, гл. 2, § 6, теорема 4] установлено нерівності

$$\mathsf{E}\sup_{0\le t\le L}|\zeta_T(t)|^k \le C_k, \qquad \mathsf{E}|\zeta_T(t_2) - \zeta_T(t_1)|^4 \le C|t_2 - t_1|^2 \tag{4}$$

для довільних $k > 0$ і певних сталих C_k, C. Із цих нерівностей випливають збіжності

$$\begin{gathered}\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}\sup_{0\le t\le L}\mathsf{P}\left\{|\zeta_T(t)| > N\right\} = 0,\\ \lim_{h\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\sup_{|t_1-t_2|\le h;\, t_i\le L}\mathsf{P}\left\{|\zeta_T(t_2)-\zeta_T(t_1)| > \varepsilon\right\} = 0\end{gathered}\tag{5}$$

для довільних сталих $L > 0$, $\varepsilon > 0$. Також у роботі [6] показано, що аналогічні нерівності (4) і збіжності (5) виконуються і для процесів $\eta_T(t)$. Зрозуміло, що аналогічні нерівності (4) і збіжності (5) виконуються і для процесів W_T.

Зауваження 2.4. Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$ і $G_T(x_0) \to y_0$ при $T \to \infty$. Нехай також існують вимірні й локально обмежені функції $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$, що задовольняють умову

(A_4) 1) для функцій

$$\begin{aligned} q_T^{(1)}(x) &= G_T'(x)\,a_T(x) + \frac{1}{2}\,G_T''(x) - a_0\big(G_T(x)\big),\\ q_T^{(2)}(x) &= \left[G_T'(x)\right]^2 - \sigma_0^2\big(G_T(x)\big)\end{aligned}$$

виконується умова (A_3);

2) стохастичне рівняння Іто

$$\zeta(t) = y_0 + \int_0^t a_0\big(\zeta(s)\big)\,ds + \int_0^t \sigma_0\big(\zeta(s)\big)\,d\widehat{W}(s)\tag{6}$$

має слабко єдиний розв'язок $\Big(\zeta(t), \widehat{W}(t)\Big)$.

Тоді в [7, теорема 2.1] установлено, що процес $\zeta_T = \zeta_T(t) = G_T(\xi_T(t))$ слабко збігається при $T \to \infty$ до розв'язку ζ рівняння (6).

3. Формулювання основних результатів

Теорема 3.1. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$ і виконуються умови (A_4). Крім того, нехай для вимірних, локально обмежених функцій $g_T(x)$ існують вимірні, локально обмежені функції $\hat{g}_T(x)$, $g_0(x)$ такі, що для функцій*

$$\begin{aligned} Q_T^{(1)}(x) &= \left[g_T(x) - \hat{g}_T\big(G_T(x)\big)\right]^2,\\ Q_T^{(2)}(x) &= \hat{g}_T^2\big(G_T(x)\big) - g_0^2\big(G_T(x)\big)\end{aligned}$$

виконується умова (A_3), а також

(A_5) *для функції $Q_T^{(3)}(x) = \left|\hat{g}_T\big(G_T(x)\big)\right|$ виконується умова (A_3) і*

$$\left|\int_0^x f_T'(u)\int_0^u \frac{Q_T^{(3)}(v)}{f_T'(v)}\,dv\,du\right| \le C\left(1 + |x|^\alpha\right)$$

при певних сталих $C > 0$, $\alpha \ge 0$.

Тоді випадковий процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s)$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta^{(2)}(t) = W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = \int_0^t g_0^2\big(\zeta(s)\big)\,ds,$$

тут ζ — розв'язок рівняння (6), $W^* = \{W^*(t), t \ge 0\}$ — вінерівський процес, процеси W^* і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні.

Теорема 3.2. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$ і виконуються умови (A_4). Також нехай для вимірних, локально обмежених функцій $g_T(x)$ існують вимірні, локально обмежені функції $\hat{g}_T(x)$, $g_0(x)$ такі, що виконується умова (A_5), а для функції $Q_T^{(1)}(x) = [g_T(x) - \hat{g}_T(G_T(x))]^2$ виконується умова (A_3) і нехай*

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|x|\le N} |J_T(x)| = 0 \tag{7}$$

для всіх $N > 0$, де

$$J_T(x) = f_T'(x) \int_0^x \frac{\hat{g}_T^2\big(G_T(v)\big)}{f_T'(v)}\, dv - g_0\big(G_T(x)\big) G_T'(x).$$

Тоді випадковий процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\, dW_T(s)$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta^{(2)}(t) = W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = 2\left[\int_{y_0}^{\zeta(t)} g_0(x)\, dx + \int_0^t g_0\big(\zeta(s)\big)\sigma_0\big(\zeta(s)\big)\, d\widehat{W}(s)\right],$$

$\left(\zeta(t), \widehat{W}(t)\right)$ — розв'язок рівняння (6), $W^* = \{W^*(t), t \ge 0\}$ — вінерівський процес, процеси W^* і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні.

Зауваження 3.1. Для розв'язків рівняння (1) із класу $K(G_T)$, де $G_T(x) = f_T(x)$ й існують сталі $\delta > 0$, $C > 0$ такі, що $0 < \delta \le f_T'(x) \le C$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, у теоремі 3.2 умову (7) можна замінити на більш слабку умову: $J_T(x) \to 0$ майже скрізь при $T \to \infty$ і $|J_T(x)|\, \chi_{\{|x|\le N\}} \le C_N$ для кожного $N > 0$. Цей факт випливає з доведення теореми 3 роботи [5] і леми 4.1 роботи [7].

Зауваження 3.2. Умова (A_5) у теоремі 3.1 та теоремі 3.2 використовується тільки при доведенні незалежності процесів W^* і $\beta^{(1)}(t)$. Отже, при невипадковому $\beta^{(1)}(t)$ умова (A_5) відповідно у теоремі 3.1 та теоремі 3.2 зайва.

Теорема 3.3. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$ і нехай виконуються умови (A_4). Вважаємо, що для коефіцієнта $a_T(x)$ рівняння (1) виконується умова (A_3). Якщо для вимірних, локально обмежених функцій $g_T(x)$ існують певні сталі c_0, b_0 такі, що для довільного $N > 0$*

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|x|\le N} \left| \int_0^x \left[f_T'(u) \int_0^u \frac{g_T(v)}{f_T'(v)}\, dv - c_0 \right] du \right| = 0,$$

а для функції

$$Q_T(x) = \left[f_T'(x) \int_0^x \frac{g_T(v)}{f_T'(v)}\, dv - c_0 \right]^2 - b_0^2$$

виконується умова (A_3), то випадковий процес

$$\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t g_T\big(\xi_T(s)\big)\, ds$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $2b_0 W(t)$, де $W(t)$ — вінерівський процес.

4. Доведення основних результатів

Доведення теореми 3.1. Рівність (3) перепишемо у вигляді

$$\zeta_T(t) = G_T(x_0) + \int_0^t a_0\big(\zeta_T(s)\big)\,ds + \alpha_T^{(1)}(t) + \eta_T(t), \tag{8}$$

де

$$\alpha_T^{(1)}(t) = \int_0^t q_T^{(1)}\big(\xi_T(s)\big)\,ds, \quad q_T^{(1)}(x) = G_T'(x)a_T(x) + \frac{1}{2}G_T''(x) - a_0\big(G_T(x)\big),$$

а характеристику $\langle\eta_T\rangle(t)$ неперервних з імовірністю 1 мартингалів $\eta_T(t)$ — у вигляді

$$\langle\eta_T\rangle(t) = \int_0^t \big[G_T'\big(\xi_T(s)\big)\big]^2\,ds = \int_0^t \sigma_0^2\big(\zeta_T(s)\big)\,ds + \alpha_T^{(2)}(t), \tag{9}$$

де

$$\alpha_T^{(2)}(t) = \int_0^t q_T^{(2)}\big(\xi_T(s)\big)\,ds, \quad q_T^{(2)}(x) = [G_T'(x)]^2 - \sigma_0^2\big(G_T(x)\big).$$

Для функцій $q_T^{(1)}(x)$, $q_T^{(2)}(x)$ виконуються умови леми 5.1 і тому для довільного $L > 0$

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\alpha_T^{(k)}(t)\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad k = 1,2, \tag{10}$$

при $T \to \infty$.

Зрозуміло, що

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t \hat{g}_T\big(\zeta_T(s)\big)\,dW_T(s) + \gamma_T(t), \tag{11}$$

де

$$\gamma_T(t) = \int_0^t q_T\big(\xi_T(s)\big)\,dW_T(s), \quad q_T(x) = g_T(x) - \hat{g}_T\big(G_T(x)\big).$$

Оскільки для функцій $q_T^2(x)$ виконується умова (A_3), то за лемою 5.1

$$\int_0^L q_T^2\big(\xi_T(s)\big)\,ds \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$ для довільної сталої $L > 0$.

Для довільних сталих $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $L > 0$ виконується нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\gamma_T(t)| > \varepsilon\right\} \le \delta + \mathsf{P}\left\{\int_0^L q_T^2\big(\xi_T(s)\big)\,ds > \varepsilon^2\delta\right\}$$

(див. [1, гл. 1, § 3, теорема 2]), тому справедлива збіжність

$$\sup_{0\le t\le L}|\gamma_T(t)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{12}$$

при $T \to \infty$ для довільної сталої $L > 0$.

Оскільки для процесів $\zeta_T(t)$, $\eta_T(t)$, $W_T(t)$ виконуються співвідношення (5) і зрозуміло, що згідно зі збіжностями (10) і (12) співвідношення (5) справедливі і для процесів $\alpha_T^{(k)}(t)$, $k = 1,2$ та $\gamma_T(t)$, то для процесу

$$\Big(\zeta_T(t), \eta_T(t), W_T(t), \alpha_T^{(1)}(t), \alpha_T^{(2)}(t), \gamma_T(t)\Big)$$

можна скористатись принципом А. В. Скорохода вибору збіжних за ймовірністю підпослідовностей [12, § 6]. Тому для довільної послідовності $T_n' \to \infty$ існують: підпослідовність $T_n \to \infty$, імовірнісний простір $\Big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mathsf{P}}\Big)$, випадковий процес на цьому просторі $\Big(\tilde{\zeta}_{T_n}(t), \tilde{\eta}_{T_n}(t), \widetilde{W}_{T_n}(t), \tilde{\alpha}_{T_n}^{(1)}(t), \tilde{\alpha}_{T_n}^{(2)}(t), \tilde{\gamma}_{T_n}(t)\Big)$, скінченновимірні розподіли якого збігаються з відповідними скінченновимірними розподілами випадкового процесу

$\left(\zeta_{T_n}(t), \eta_{T_n}(t), W_{T_n}(t), \alpha^{(1)}_{T_n}(t), \alpha^{(2)}_{T_n}(t), \gamma_{T_n}(t)\right)$, при цьому $\tilde{\zeta}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{\eta}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\eta}(t)$, $\widetilde{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \widetilde{W}(t)$, $\tilde{\alpha}^{(1)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\alpha}^{(1)}(t)$, $\tilde{\alpha}^{(2)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\alpha}^{(2)}(t)$, $\tilde{\gamma}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\gamma}(t)$ для всіх $0 \le t \le L$, де $\tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$, $\widetilde{W}(t)$, $\tilde{\alpha}^{(1)}(t)$, $\tilde{\alpha}^{(2)}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ — деякі випадкові процеси. Зрозуміло, що завдяки збіжності (10) $\tilde{\alpha}^{(k)}(t) \equiv 0$, $k = 1, 2$ з імовірністю 1, а завдяки збіжності (12) $\tilde{\gamma}(t) \equiv 0$ з імовірністю 1.

Згідно з нерівностями (4) процеси $\tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$, $\widetilde{W}(t)$ неперервні з імовірністю 1, крім того, $\tilde{\eta}(t)$ — мартингал, $\widetilde{W}(t)$ — вінерівський процес. Більше того, за лемою 5.2 із рівностей (8), (9), (11) отримуємо

$$\tilde{\zeta}_{T_n}(t) = G_{T_n}(x_0) + \int_0^t a_0\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) ds + \tilde{\alpha}^{(1)}_{T_n}(t) + \tilde{\eta}_{T_n}(t),$$

$$\langle \tilde{\eta}_{T_n} \rangle(t) = \int_0^t \sigma_0^2\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) ds + \tilde{\alpha}^{(2)}_{T_n}(t),$$

$$\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t) = \int_0^t \hat{g}_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) d\widetilde{W}_{T_n}(s) + \tilde{\gamma}_{T_n}(t),$$

де

$$\tilde{\zeta}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\zeta}(t), \quad \tilde{\eta}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \tilde{\eta}(t), \quad \widetilde{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} \widetilde{W}(t),$$

$$\sup_{0 \le t \le L} \left|\tilde{\alpha}^{(k)}_{T_n}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0,\ k = 1, 2, \quad \sup_{0 \le t \le L} \left|\tilde{\gamma}_{T_n}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0 \quad \text{при } T_n \to \infty.$$

Із роботи [6] випливає, що для довільних сталих $L > 0$, $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{h \to 0} \varlimsup_{T_n \to \infty} \widetilde{\mathsf{P}}\left\{\sup_{|t_1 - t_2| \le h;\, t_i \le L} \left|\lambda_{T_n}(t_2) - \lambda_{T_n}(t_1)\right| > \varepsilon\right\} = 0 \tag{13}$$

при $\lambda_{T_n}(t) = \tilde{\zeta}_{T_n}(t)$, $\lambda_{T_n}(t) = \tilde{\eta}_{T_n}(t)$, $\lambda_{T_n}(t) = \widetilde{W}_{T_n}(t)$.

Тому за лемою 1.11 [11] при $T_n \to \infty$ для довільного $L > 0$

$$\sup_{0 \le t \le L} \left|\tilde{\zeta}_{T_n}(t) - \tilde{\zeta}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0, \quad \sup_{0 \le t \le L} \left|\tilde{\eta}_{T_n}(t) - \tilde{\eta}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0, \quad \sup_{0 \le t \le L} \left|\widetilde{W}_{T_n}(t) - \widetilde{W}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0.$$

Із роботи [7, лема 4.3] випливає, що

$$\tilde{\eta}(t) = \int_0^t \sigma_0\left(\tilde{\zeta}(s)\right) d\widehat{W}(s),$$

а процес $\tilde{\zeta}(t)$ задовольняє рівняння (6).

За лемою 5.2 цієї статті процеси $\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t)$ і $\beta^{(2)}_{T_n}(t)$ стохастично еквівалентні. Далі, згідно з лемою 5.3, можемо використати випадкову заміну часу в стохастичних інтегралах (див. [1, гл. 1, § 4]) і отримаємо, що для довільного $t \ge 0$ з імовірністю 1 виконується рівність

$$\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t) = W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t)\right) + \tilde{\gamma}_{T_n}(t), \tag{14}$$

де $W^*_{T_n}(t)$ — сім'я вінерівських процесів,

$$\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t) = \int_0^t \hat{g}^2_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) ds.$$

Для функції $\hat{g}^2_{T_n}(G_T(x)) - g_0^2(G_T(x))$ виконується умова (A_3), тому з доведення теореми 2.2 роботи [7] випливає збіжність

$$\sup_{0 \le t \le L} \left|\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t) - \tilde{\beta}^{(1)}(t)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0$$

при $T_n \to \infty$, де $\tilde{\beta}^{(1)}(t) = \int_0^t g_0^2\left(\tilde{\zeta}(s)\right) ds$.

Зрозуміло, що для довільних $L > 0$, $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ справедлива нерівність

$$\widetilde{\mathsf{P}}\left\{\sup_{0\le t\le L}\left|W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t)\right) - W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)\right| > \varepsilon\right\} \le \widetilde{\mathsf{P}}\left\{\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(L) > N\right\} +$$
$$+ \widetilde{\mathsf{P}}\left\{\tilde{\beta}^{(1)}(L) > N\right\} + \widetilde{\mathsf{P}}\left\{\sup_{|t_1-t_2|\le\delta;\, t_i\le N}\left|W^*_{T_n}(t_2) - W^*_{T_n}(t_1)\right| > \varepsilon\right\} +$$
$$+ \widetilde{\mathsf{P}}\left\{\sup_{0\le t\le L}\left|\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t) - \tilde{\beta}^{(1)}(t)\right| > \delta\right\},$$

а для вінерівського процесу $W^*_{T_n}(t)$ має місце аналог збіжності (13), тому виконується збіжність

$$\sup_{0\le t\le L}\left|W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(t)\right) - W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0$$

при $T_n \to \infty$, а отже, згідно з (14), і збіжність

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t) - W^*_{T_n}\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0 \tag{15}$$

при $T_n \to \infty$. Використовуючи властивості стохастичних інтегралів, отримаємо нерівність

$$\left|\mathsf{E}W^*_{T_n}(t)\widetilde{W}_{T_n}(t)\right| = \left|\mathsf{E}\int_0^{\tau_{T_n}(t)} \hat{g}_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) d\widetilde{W}_{T_n}(s)\,\widetilde{W}_{T_n}(t)\right| =$$
$$= \left|\mathsf{E}\int_0^{\min(t,\tau_{T_n}(t))} \hat{g}_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right) ds\right| \le \mathsf{E}\int_0^t \left|\hat{g}_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right)\right| ds,$$

де $\tau_{T_n}(t) = \min\left\{s : \tilde{\beta}^{(1)}_{T_n}(s) = t\right\}$.

Згідно з умовами теореми 3.1 на функцію $Q^{(3)}_T(x)$ і лемою 5.1 отримаємо збіжність

$$\mathsf{E}\int_0^t \left|\hat{g}_{T_n}\left(\tilde{\zeta}_{T_n}(s)\right)\right| ds \to 0$$

для довільного $t > 0$ при $T_n \to \infty$. Отже, $\mathsf{E}W^*_{T_n}(t)\widetilde{W}_{T_n}(t) \to 0$ при $T_n \to \infty$.

Оскільки процеси $W^*_{T_n}(t)$ і $\widetilde{W}_{T_n}(t)$ є вінерівськими і у границі при $T_n \to \infty$ некорельовані, то $W^*_{T_n}(t)$ асимптотично не залежить від $\widetilde{W}(t)$. Зрозуміло, що процес $\tilde{\beta}^{(1)}(t)$ повністю визначається процесом $\tilde{\zeta}(s)$ при $s \le t$. Із сильної єдиності розв'язку $\big(\xi_T(t), W_T(t)\big)$ рівняння (1) випливає, що процеси $\tilde{\zeta}(t)$, $\widehat{W}(t)$ є вимірними відносно σ-алгебри $\sigma\left(\widetilde{W}(s), s \le t\right)$ вінерівського процесу $\widetilde{W}(t)$, що є граничним для $\widetilde{W}_{T_n}(t)$. Отже, процес $W^*_{T_n}(t)$ асимптотично не залежить від процесу $\tilde{\beta}^{(1)}(t)$. Скінченновимірні розподіли процесу $W^*_{T_n}(t)$ не залежать від T_n, тому граничний процес можемо позначити через $W^*\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес, незалежний від процесу $\tilde{\beta}^{(1)}(t)$. Використовуючи (15), отримаємо, що

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t) - W^*\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)\right| \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0$$

при $T_n \to \infty$.

Тому процес $\tilde{\beta}^{(2)}_{T_n}(t)$ слабко збігається при $T_n \to \infty$ до процесу $W^*\left(\tilde{\beta}^{(1)}(t)\right)$, а це у свою чергу означає справедливість твердження теореми 3.1 для процесу $\beta^{(2)}_{T_n}(t)$.

Із довільності підпослідовності $T_n \to \infty$ і єдиності розподілів процесу $W^*\left(\tilde\beta^{(1)}(t)\right)$ випливає доведення теореми 3.1. □

Доведення теореми 3.2. Міркування доведення теореми 3.2 повністю збігається з доведенням теореми 3.1 із тією лише різницею, що тут процес $\beta^{(1)}(t)$ має вигляд

$$\beta^{(1)}(t) = 2\left[\int_{y_0}^{\zeta(t)} g_0(x)\,dx + \int_0^t g_0\big(\zeta(s)\big)\sigma_0\big(\zeta(s)\big)\,d\widehat{W}(s)\right],$$

де $\left(\zeta(t), \widehat{W}(t)\right)$ — розв'язок рівняння (6), а для доведення аналога збіжності (15) використовується теорема 2.3 роботи [7]. □

Доведення теореми 3.3. До процесу $\Phi_T(\xi_T(t))$, де

$$\Phi_T(x) = 2\int_0^x f_T'(u)\left(\int_0^u \frac{g_T(v)}{f_T'(v)}\,dv\right)du,$$

$\xi_T(t)$ — розв'язок рівняння (1), застосуємо формулу Іто. Отримаємо

$$\beta_T^{(1)}(t) = 2c_0\int_0^t a_T\big(\xi_T(s)\big)\,ds + \alpha_T(t) + \eta_T^{(1)}(t),$$

де

$$\alpha_T(t) = 2\int_{x_0}^{\xi_T(t)}\left[f_T'(u)\int_0^u \frac{g_T(v)}{f_T'(v)}\,dv - c_0\right]du,$$

$$\eta_T^{(1)}(t) = -\int_0^t \left[\Phi_T'\big(\xi_T(s)\big) - 2c_0\right]dW_T(s).$$

Оскільки для функцій $a_T(x)$ виконується умова (A_3), то згідно з лемою 5.1 для довільного $L > 0$

$$\sup_{0\le t\le L}\left|\int_0^t a_T\big(\xi_T(s)\big)\,ds\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$. Із очевидної нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\alpha_T(t)| > \varepsilon\right\} \le P_{NT} + \frac{1}{\varepsilon}\mathsf{E}\sup_{0\le t\le L}\left|\int_{x_0}^{\xi_T(t)}\left[\Phi_T'(u) - 2c_0\right]du\right|\chi_{\{|\xi_T(t)|\le N\}} \le$$
$$\le P_{NT} + \frac{2}{\varepsilon}N\sup_{|x|\le N}\left|\int_{x_0}^{x}\left[f_T'(u)\int_0^u \frac{g_T(v)}{f_T'(v)}\,dv - c_0\right]du\right|$$

для довільних $N > 0$, $L > 0$, $\varepsilon > 0$, де $P_{NT} = \mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\xi_T(t)| > N\right\}$, і того, що $\lim_{N\to\infty}\overline{\lim}_{T\to\infty} P_{NT} = 0$, отримаємо

$$\sup_{0\le t\le L}|\alpha_T(t)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$. Збіжність для P_{NT} випливає з нерівностей $|G_T(x)| \ge C|x|^\alpha$ та (4). Справді,

$$\sup_{0\le t\le L}|\xi_T(t)| \le \sup_{0\le t\le L}\left(\frac{|\zeta_T(t)|}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

і

$$P_{NT} \le \mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}\left(\frac{|\zeta_T(t)|}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > N\right\} \le \mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\zeta_T(t)|^{\frac{1}{\alpha}} > C^{\frac{1}{\alpha}}N\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}N}\mathsf{E}\left\{\sup_{0\le t\le L}|\zeta_T(t)|^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Отже, маємо
$$\sup_{0\le t\le L}\left|\beta_T^{(1)}(t)-\eta_T^{(1)}(t)\right|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$
при $T\to\infty$.

Зрозуміло, що $\eta_T^{(1)}(t)$ – неперервний з імовірністю 1 мартингал із характеристикою
$$\left\langle\eta_T^{(1)}\right\rangle(t)=4b_0^2t+\int_0^t q_T\bigl(\xi_T(s)\bigr)\,ds,$$
де $q_T(x)=\left[\Phi_T'(x)-2c_0\right]^2-4b_0^2$. Для функції $q_T(x)$ виконується умова (A_3), тому за лемою 5.1
$$\sup_{0\le t\le L}\left|\left\langle\eta_T^{(1)}\right\rangle(t)-4b_0^2t\right|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$
при $T\to\infty$ для довільного $L>0$.

Далі скористаємося випадковою заміною часу, тобто $\eta_T^{(1)}(t)=W_T^*\left(\left\langle\eta_T^{(1)}\right\rangle(t)\right)$, де $W_T^*(t)$ — вінерівський процес. Аналогічно доведенню збіжності (15) отримаємо
$$\sup_{0\le t\le L}\left|\beta_T^{(1)}(t)-W_T^*\left(4b_0^2t\right)\right|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$
при $T\to\infty$. Отже, процес $\beta_T^{(1)}(t)$ слабко збігається при $T\to\infty$ до процесу $2b_0W(t)$. □

5. Формулювання допоміжних результатів

Лема 5.1. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$. Якщо для вимірних, локально обмежених функцій $q_T(x)$ виконується умова (A_3), то для довільного $L>0$*
$$\sup_{0\le t\le L}\left|\int_0^t q_T\bigl(\xi_T(s)\bigr)\,ds\right|\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$
при $T\to\infty$.

Лема 5.2. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1) із класу $K(G_T)$ і нехай випадковий процес $\bigl(\zeta_T(t),\eta_T(t)\bigr)$, де $\zeta_T(t)=G_T(\xi_T(t))$, $\eta_T(t)=\int_0^t G_T'(\xi_T(s))\,dW_T(s)$ стохастично еквівалентний процесу $\left(\tilde\zeta_T(t),\ \tilde\eta_T(t)\right)$. Тоді процес*
$$S_T(t)=\int_0^t g\bigl(\zeta_T(s)\bigr)\,ds+\int_0^t q\bigl(\zeta_T(s)\bigr)\,d\eta_T(s),$$
де $g(x)$, $q(x)$ — вимірні, локально обмежені функції, стохастично еквівалентний процесу
$$\widetilde S_T(t)=\int_0^t g\left(\tilde\zeta_T(s)\right)ds+\int_0^t q\left(\tilde\zeta_T(s)\right)d\tilde\eta_T(s).$$

Лема 5.3. *Нехай ξ_T — розв'язок рівняння (1), тоді для локально інтегровної із квадратом дійсної функції $g\ne0$ на певній обмеженій вимірній множині B додатної міри Лебега з імовірністю 1 виконується рівність*
$$\int_0^\infty g^2\bigl(\xi_T(s)\bigr)\,ds=\infty$$
при кожному $T>0$.

Доведення сформульованих лем 5.1 та 5.2 наведено у роботі [7]. Доведення леми 5.3 при уточненні $B\subseteq[-1,0]$ наведено у роботі [8, лема 3.1].

6. Приклади

Позначимо через b_T сім'ю таких сталих, що $b_T > 1$ і $b_T \uparrow \infty$ при $T \to \infty$.

Приклад 6.1. Нехай у рівнянні (1) $a_T(x) \equiv 0$. Розглянемо $g_T(x) = \sqrt{\frac{b_T}{1+b_T^2 x^2}}$. Зрозуміло, що $g_T^2(x)$ — δ-подібна сім'я в точці $x = 0$ із вагою π. При $G_T(x) = x$ виконуються умови зауваження 3.1 при $g_0(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$. Тому за теоремою 3.2 процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{b_T}{1 + b_T^2 W_T^2(s)}}\, dW_T(s)$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta^{(2)}(t) = W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = \pi \left[\int_{x_0}^{\zeta(t)} \operatorname{sign} x\, dx - \int_0^t \operatorname{sign} \zeta(s)\, dW(s)\right],$$

$\zeta(t) = x_0 + W(t)$, процеси $W^*(t)$, $W(t)$ — незалежні.

Отже, $\beta^{(2)}(t) = W^*\big(\pi L_W(t, x_0)\big)$, де

$$L_W(t, x_0) = |x_0 + W(t)| - |x_0| - \int_0^t \operatorname{sign}\big(x_0 + W(s)\big)\, dW(s)$$

є локальним часом вінерівського процесу $W(t)$ у точці x_0 на відрізку $[0, t]$.

Приклад 6.2. Розглянемо рівняння (1), де $a_T(x) = b_T \left[1 + (b_T x - 1)^2\right]^{-1}$. Покажемо, що в цьому випадку рівняння (1) належить до класу $K\,(G_T)$ при $G_T(x) = f_T(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a_T(v)\, dv\right\} du$.

$$f_T'(x) = \exp\left\{-2\int_0^x a_T(v)\, dv\right\} = \exp\Big\{-2 \operatorname{arctg}(b_T v - 1)\Big|_0^x\Big\} =$$

$$= \exp\big\{-2\left[\operatorname{arctg}(b_T x - 1) + \operatorname{arctg} 1\right]\big\} \to \sigma_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2}\pi}, & x > 0, \\ e^{\frac{\pi}{2}}, & x < 0 \end{cases} \quad \text{при } T \to \infty.$$

Оскільки $f_T'(x) a_T(x) + \frac{1}{2} f_T''(x) = 0$, то

$$\left[G_T'(x) a_T(x) + \frac{1}{2} G_T''(x)\right]^2 + \left[G_T'(x)\right]^2 = \left[f_T'(x)\right]^2 \le C \le C\left[1 + |G_T(x)|^2\right].$$

Із нерівностей $0 < \delta_0 \le G_T'(x) = f_T'(x) \le C_0$ отримаємо $|G_T(x)| \ge C|x|^\alpha$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ для $C = \delta_0$, $\alpha = 1$, а також нерівності

$$\left|\int_0^x f_T'(u)\left(\int_0^u \frac{\chi_B\big(G_T(v)\big)}{f_T'(v)}\, dv\right) du\right| \le \frac{C_0}{\delta_0}\left|\int_0^x \int_0^u \chi_B\big(G_T(v)\big)\, dv\, du\right| \le C_1 \lambda(B)|x|,$$

тому в цьому випадку виконується умова (A_2) при $\psi\left(|x|\right) = C_1|x|$, $m = 1$.

Маємо, що в умовах (A_4)

$$q_T^{(1)}(x) = G_T'(x) a_T(x) + \frac{1}{2} G_T''(x) \equiv 0,$$

$$q_T^{(2)}(x) = \left[G_T'(x)\right]^2 - \sigma_0^2\big(G_T(x)\big) = \begin{cases} \left[G_T'(x)\right]^2 - e^{-3\pi} \to 0, & x > 0, \\ \left[G_T'(x)\right]^2 - e^{\pi} \to 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{при } T \to \infty$$

і

$$\sup_{|x| \le N} f_T'(x) \left|\int_0^x \frac{q_T^{(2)}(v)}{f_T'(v)}\, dv\right| \le \frac{C_0}{\delta_0} \int_{-N}^N \left|q_T^{(2)}(v)\right| dv \to 0 \quad \text{при } T \to \infty.$$

Отже, виконуються умови (A_4) при

$$a_0(x) \equiv 0, \qquad \sigma_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2}\pi}, & \text{якщо } x > 0, \\ e^{\frac{\pi}{2}}, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases} \qquad y_0 = x_0\sigma_0(x_0).$$

Тому процес $\zeta_T(t) = G_T(\xi_T(t))$ слабко збігається при $T \to \infty$ до розв'язку $\zeta(t)$ рівняння Іто

$$\zeta(t) = x_0\sigma_0(x_0) + \int_0^t \sigma_0\big(\zeta(s)\big)\, d\widehat{W}(s).$$

Для функцій $g_T(x) = \cos(b_T x)$ при $\hat{g}_T(x) = g_T\left(G_T^{-1}(x)\right)$, де $G_T^{-1}(x)$ — функції, обернені до $G_T(x)$, $g_0(x) \equiv \frac{1}{2}$ виконуються умови зауваження 3.2 до теореми 3.1 при $\beta^{(1)}(t) = t/2$. Тому процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t \cos\big(b_T\xi_T(s)\big)\, dW_T(s)$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\frac{1}{\sqrt{2}}W^*(t)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес.

Приклад 6.3. Нехай у рівнянні (1) $a_T(x) = -\frac{1}{4}\frac{b_T^2 x}{1+b_T^2x^2}$. У цьому випадку рівняння (1) належить до класу $K(G_T)$ при $G_T(x) = x^2$ і виконуються умови (A_4) при $a_0(x) = \frac{1}{2}$, $\sigma_0(x) = 2\sqrt{|x|}$, $y_0 = x_0^2$. Отже, згідно із зауваженням 2.4 процес $\zeta_T(t) = \xi_T^2(t)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до розв'язку $\zeta(t)$ рівняння

$$\zeta(t) = x_0^2 + \frac{1}{2}\, t + 2\int_0^t \sqrt{\zeta(s)}\, d\widehat{W}(s). \tag{16}$$

Для функцій

$$g_T(x) = \frac{\sqrt[4]{b_T}}{\sqrt{\ln b_T}}\,\frac{\cos(b_T x)}{\sqrt[8]{1+b_T^2x^2}}$$

виконуються умови теореми 3.2 при

$$g_0(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}, \quad \hat{g}_T(x) = \frac{\sqrt[4]{b_T}}{\sqrt{\ln b_T}}\,\frac{\cos\left(b_T\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt[8]{1+b_T^2x^2}}.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $\hat{g}_T\left(x^2\right) = g_T(x)$. Тому за теоремою 3.2 процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \frac{\sqrt[4]{b_T}}{\sqrt{\ln b_T}}\int_0^t \frac{\cos\big(b_T\xi_T(s)\big)}{\sqrt[8]{1+b_T^2\xi_T^2(s)}}\, dW_T(s)$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = \frac{2}{3}\left[\zeta^{\frac{3}{4}}(t) - |x_0|^{\frac{3}{2}}\right] - \int_0^t \sqrt[4]{\zeta(s)}\, d\widehat{W}(s),$$

процес $\left(\zeta(t), \widehat{W}(t)\right)$ — розв'язок рівняння (16), $W^*(t)$ — вінерівський процес, процеси $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні.

Приклад 6.4. Нехай у рівнянні (1) $a_T(x) = b_T\chi_{[0,\lambda/b_T]}(x)$, $\lambda > 0$. У цьому випадку при $G_T(x) = f_T(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a_T(v)\, dv\right\} du$ рівняння (1) належить до класу $K(G_T)$ і виконуються умови (A_4) при $a_0(x) = 0$, $\sigma_0(x) = e^{-2\lambda}$ при $x > 0$, $\sigma_0(x) = 1$ при $x \le 0$, $y_0 = x_0\sigma_0(x_0)$. Отже, згідно із зауваженням 2.4 процес $\zeta_T(t) = G_T\big(\xi_T(t)\big)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до розв'язку $\zeta(t)$ рівняння Іто

$$\zeta(t) = x_0\sigma_0(x_0) + \int_0^t \sigma_0\big(\zeta(s)\big)\, d\widehat{W}(s), \qquad \sigma_0(x) = \begin{cases} e^{-2\lambda}, & x > 0, \\ 1, & x \le 0. \end{cases} \tag{17}$$

Для функцій $g_T(x) = \left(\frac{b_T}{1+b_T^2 x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ виконуються умови теореми 3.2 при

$$g_0(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sign} x}{\sigma_0(x)}, \qquad \hat{g}_T(x) = \left(\frac{b_T}{1 + b_T^2\left[G_T^{-1}(x)\right]^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $G_T^{-1}(x)$ — функції, обернені до $G_T(x)$.

Тому згідно з теоремою 3.2 процес

$$\beta_T^{(2)}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{b_T}{1 + b_T^2 \xi_T^2(s)}}\, dW_T(s) \tag{18}$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = \pi\left[\int_{x_0\sigma_0(x_0)}^{\zeta(t)} \frac{\operatorname{sign} v}{\sigma_0(v)}\, dv - \int_0^t \operatorname{sign}\zeta(s)\, d\widehat{W}(s)\right],$$

процес $\left(\zeta(t), \widehat{W}(t)\right)$ — розв'язок рівняння (17), $W^*(t)$ — вінерівський процес, процеси $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні.

Зауваження 6.1. Класи $K(G_T)$, що пов'язані з рівнянням (1), визначаються неоднозначно. Зокрема, якщо в рівнянні (1) $a_T(x)$ такі, як у прикладі 6.4, то рівняння (1) належить і до класу $K(G_T)$ для $G_T(x) = x^2$, при цьому виконуються умови (A_4), якщо $a_0(x) = 1$, $\sigma_0(x) = 2\sqrt{|x|}$, $y_0 = x_0^2$. Отже, згідно із зауваженням 2.4 процес $\zeta_T(t) = \xi_T^2(t)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до розв'язку $\zeta(t)$ рівняння Іто

$$\zeta(t) = x_0^2 + t + 2\int_0^t \sqrt{\zeta(s)}\, d\widehat{W}(s) \tag{19}$$

(тут $\zeta(t) \geq 0$ з імовірністю 1 при всіх $t \geq 0$). Крім того, для функцій $g_T(x)$, які визначені у прикладі 6.4, виконуються умови теореми 3.2 при

$$\hat{g}_T(x) = \left(\frac{b_T}{1 + b_T^2|x|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad g_0(x) = \frac{\pi}{4\sqrt{|x|}}.$$

Тому за теоремою 3.2 процес $\beta_T^{(2)}(t)$, який визначений у (18), слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де

$$\beta^{(1)}(t) = \pi\left[\sqrt{\zeta(t)} - |x_0| - \widehat{W}(t)\right],$$

процес $\left(\zeta(t), \widehat{W}(t)\right)$ — розв'язок рівняння (19), $W^*(t)$ — вінерівський процес, процеси $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні.

Приклад 6.5. Нехай у рівнянні (1) $a_T(x) \equiv 0$. Тоді $\xi_T(t) = x_0 + W_T(t)$ є розв'язком рівняння (1), що належить до класу $K(G_T)$ при $G_T(x) = x$. Зрозуміло, що в цьому випадку виконуються умови (A_4) при $a_0(x) = 0$, $\sigma_0(x) = 1$, а для функцій $g_T(x) = b_T \sin(b_T x)$ справедливі умови теореми 3.3 при $c_0 = 1$, $b_0^2 = \frac{1}{2}$. Тому згідно із зауваженням 2.4 процес $\xi_T(t)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\zeta(t) = x_0 + \widehat{W}(t)$, де $\widehat{W}(t)$ — вінерівський процес, а процес $\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t b_T \sin\bigl(b_T \xi_T(s)\bigr)\, ds$ за теоремою 3.3 слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\sqrt{2}\,\widehat{W}(t)$.

Список літератури

1. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin–New York, 1972.
2. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, W. B. Saunders Co., Philadelphia–London–Toronto, 1969.
3. G. L. Kulinich, *Limit behavior of the distribution of the solution of a stochastic diffusion equation*, Ukr. Math. J. **19** (1968), 231–235.
4. G. L. Kulinich, *On the limit behavior of the distribution of the solution of a stochastic diffusion equation*, Theory Probab. Appl. **12** (1967), no. 3, 497–499.
5. G. L. Kulinich, *Limit distributions for functionals of integral type of unstable diffusion processes*, Theory Probab. Math. Statist. **11** (1976), 82–86.
6. G. L. Kulinich and E. P. Kaskun, *On the asymptotic behavior of solutions of one-dimensional Ito's stochastic differential equations with singularity points*, Theory Stoch. Process. **4 (20)** (1998), no. 1–2, 189–197.
7. G. Kulinich, S. Kushnirenko, Yu. Mishura, *Asymptotic behavior of homogeneous additive functionals of the solutions of Ito stochastic differential equations with nonregular dependence on parameter*, Mod. Stoch. Theory Appl. **3** (2016), no. 2, 191–208.
8. G. L. Kulinich, S. V. Kushnirenko and Yu. S. Mishura, *Asymptotic behavior of the martingale type integral functionals for unstable solutions to stochastic differential equations*, Theory Probab. Math. Statist. **90** (2015), 115–126.
9. G. L. Kulinich, S. V. Kushnirenko and Yu. S. Mishura, *Limit behavior of functionals of diffusion type processes*. Theory Probab. Math. Statist. **92** (2016), 93–107.
10. N. V. Krylov, *On Ito's stochastic integral equations*, Theory Probab. Appl. **14** (1969), no. 2, 330–336.
11. Yu. V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Probab. Appl. **1** (1956), no. 2, 157–214.
12. A. V. Skorokhod, *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965.
13. A. V. Skorokhod and N. P. Slobodenyuk, *Limit Theorems for Random Walks*, Naukova Dumka, Kiev, 1970. (Russian)
14. A. Yu. Veretennikov, *On the strong solutions of stochastic differential equations*, Theory Probab. Appl. **24** (1979), no. 2, 354–366.

Кафедра загальної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: zag_mat@univ.kiev.ua

Кафедра загальної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: bksv@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2017

WEAK CONVERGENCE OF INTEGRAL FUNCTIONALS DEFINED ON THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITÔ EQUATIONS WITH NON-REGULAR DEPENDENCE ON THE PARAMETER

G. L. KULINICH, S. V. KUSHNIRENKO, YU. S. MISHURA

Abstract. We study the weak convergence as $T \to \infty$ of functionals $\int_0^t g_T(\xi_T(s))\,dW_T(s)$, $t \geq 0$. Here $\xi_T(t)$ is a strong solution of stochastic differential equation $d\xi_T(t) = a_T(\xi_T(t))\,dt + dW_T(t)$, $T > 0$ is a parameter, $a_T(x)$ are real measurable functions, $x \in \mathbb{R}$, $|a_T(x)| \leq C_T$ for all x, $W_T(t)$ are standard Wiener processes, $g_T(x)$ are real, measurable, locally bounded, non-random functions. The explicit form of the limiting processes for these functionals is established under non-regular dependence $g_T(x)$, $a_T(x)$ on the parameter T.

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА

Г. Л. КУЛИНИЧ, С. В. КУШНИРЕНКО, Ю. С. МИШУРА

Аннотация. Исследуется слабая сходимость при $T \to \infty$ функционалов $\int_0^t g_T(\xi_T(s))\,dW_T(s)$, $t \geq 0$, где $\xi_T(t)$ — сильное решение стохастического дифференциального уравнения $d\xi_T(t) = a_T(\xi_T(t))\,dt + dW_T(t)$, $T > 0$ — параметр, $a_T(x)$ — вещественные измеримые функции, $x \in \mathbb{R}$, $|a_T(x)| \leq C_T$ при всех x, $W_T(t)$ — стандартные винеровские процессы, $g_T(x)$ — вещественные, измеримые, локально ограниченные, неслучайные функции. При нерегулярной зависимости $g_T(x)$, $a_T(x)$ от параметра для указаных функционалов найден явный вид предельных процессов.