Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 163–170

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 163–170

УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОЛНОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ В ПОЧТИ КРИТИЧЕСКОМ ВЕТВЯЩЕМСЯ ПРОЦЕССЕ С ИММИГРАЦИЕЙ

Я. М. ХУСАНБАЕВ

Аннотация. Рассматривается последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда среднее число потомков одной частицы стремится к единице. Найдены скорость роста и асимптотика флуктуации полного числа частиц, участвующих в развитии популяции.

Ключевые слова и фразы. Ветвящиеся процессы с иммиграцией, полное число частиц, слабая сходимость.

1. Введение

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)},\ k,j \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{\varepsilon_{k}^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\right\}$ — две независимые совокупности независимых, неотрицательных, принимающих целые значения и одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\left\{X_k^{(n)}, k = 0, 1, \dots\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией, определенных следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0^{(n)} = 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Если интерпретировать (при фиксированном n) величину $\xi_{k,j}^{(n)}$ как число потомков j-й частицы $(k-1)$-го поколения некоторой популяции частиц, а величину $\varepsilon_k^{(n)}$ как число частиц, иммигрирующих в популяцию в k-м поколении, то величина $X_k^{(n)}$ будет представлять собой общее число частиц в популяции в k-м поколении.

Последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией (1) называют почти критической, если $\mathsf{E}\xi_{1,1}^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$. Введем в рассмотрение случайные ступенчатые процессы Z_n, $n \in \mathbb{N}$, определенные соотношениями $Z_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)}$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что траектории процессов Z_n, $n \in \mathbb{N}$ принадлежат пространству Скорохода $D[0, \infty)$. Величина $Z_n(t)$ представляет собой полное число частиц, участвующих в ветвящемся процессе с иммиграцией $X_k^{(n)}$, $k \geq 0$ до момента $[nt]$.

В работе [1] Э. Пэйкс исследовал при $n \to \infty$ скорость роста и асимптотическое поведение флуктуации полного числа потомков одной частицы в ветвящемся процессе Гальтона – Ватсона до момента n при условии, что процесс не вырождается до момента n. В работе [2] А. В. Карпенко и С. В. Нагаев исследовали предельное поведение условного распределения полного числа потомков одной частицы до n-го поколения в процессе Гальтона – Ватсона при условии, что вырождение происходит

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J80; Secondary 60F17.

в момент времени n, в случае, когда математическое ожидание числа частиц, порождаемых одной частицей, стремится к единице при $n \to \infty$. Функциональным предельным теоремам для последовательностей ветвящихся процессов с иммиграцией посвящено довольно много работ, например [3, 4, 8, 9]. Однако, асимптотическое поведение полного числа частиц Z_n исследовано мало.

Данная работа посвящена изучению асимптотики при $n \to \infty$ процесса Z_n и его флуктуации $Z_n - \mathsf{E}Z_n$ в случае, когда среднее число потомков одной частицы приближается к единице слева со скоростью, которая медленнее, чем n^{-1} при $n \to \infty$.

2. Основная часть

Будем предполагать, что величины

$$m_n = \mathsf{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = \operatorname{var}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathsf{E}\varepsilon_1^{(n)}, \quad b_n^2 = \operatorname{var}\varepsilon_1^{(n)}$$

являются конечными для всех $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем всюду d_n, $n \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность положительных чисел такая, что $d_n \to \infty$ и $n^{-1}d_n \to 0$ при $n \to \infty$; $W(t)$, $t \geq 0$ — стандартный винеровский процесс в пространстве $D[0,\infty)$; $I(A)$ — индикатор события A, а знак $\xrightarrow{\mathsf{P}}$ будет обозначать сходимость по вероятности случайных величин.

Теорема 1 дает представление о скорости роста процесса Z_n.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого фиксированного $\alpha < 0$;
2) существует конечный предел $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0$ при $n \to \infty$;
3) существуют конечные пределы $\lambda_n \to \lambda \geq 0$, $b_n^2 \to b^2 \geq 0$ при $n \to \infty$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{Z_n}{nd_n} \to Z \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

в пространстве $D[0,\infty)$ с J-топологией Скорохода, где процесс Z определяется соотношением $Z(t) = |\alpha|^{-1}\lambda t$, $t \geq 0$.

Сформулированная ниже теорема 2 дает представление об асимптотическом поведении флуктуации процесса Z_n.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого фиксированного $\alpha < 0$;
2) существует конечный предел $d_n\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0$ при $n \to \infty$;
3) существуют конечные пределы $\lambda_n \to \lambda \geq 0$, $b_n^2 \to b^2 \geq 0$ при $n \to \infty$;
4) для любого $\varepsilon > 0$ $d_n\mathsf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$;
5) для любого $\varepsilon > 0$ $\mathsf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$\left(d_n\sqrt{n}\right)^{-1}\left(Z_n - \mathsf{E}Z_n\right) \to Y \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

в пространстве $D[0,\infty)$ с J-топологией Скорохода, где процесс Y определяется соотношением $Y(t) = |\alpha|^{-1}\left(|\alpha|^{-1}\lambda\sigma^2 + b^2\right)^{1/2} W(t)$, $t \geq 0$.

Замечание 1. В случае, когда $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$, с помощью результатов работ [3, 4, 8] и теоремы 5.1 [5] нетрудно получить асимптотику процесса Z_n и его флуктуации.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 показывают, что скорость стремления m_n к единице существенно влияет на скорость роста и асимптотику флуктуации процесса Z_n.

Замечание 3. Из условия $b_n^2 \to b^2 > 0$, $d_n\sigma^2 \to \sigma^2 > 0$, вообще говоря, не следует выполнение условий 4 и 5 теоремы 2, соответственно. Например, пусть $\varepsilon_k^{(n)}$ принимает значения 0, 1 и n с вероятностями n^{-2}, $1-2n^{-2}$ и n^{-2}, соответственно. Тогда $\lambda_n = 1 + n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$, $b_n^2 = 1 - 2n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$. Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \approx \frac{(n-1)^2}{n^2} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, в данном случае $b_n^2 \to 1$, но условие 5 не выполняется.

Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Легко видеть, что

$$\mathsf{E}X_k^{(n)} = \frac{1-m_n^k}{1-m_n}\,\lambda_n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Положим $G_n(t) = (nd_n)^{-1} Z_n(t)$. Учитывая условия теоремы имеем

$$\mathsf{E}G_n(t) \to |\alpha|^{-1}\lambda t \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Оценим $\operatorname{var} G_n(t)$. В силу формулы (2.13) из работы [4]

$$\operatorname{var} G_n(t) = (nd_n)^{-2}\left(U_n(t)b_n^2 + V_n(t)\lambda_n\sigma_n^2\right),$$

где

$$U_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]+1} \frac{1-m_n^{2(k-1)}}{1-m_n^2}\left(2\,\frac{1-m_n^{[nt]-k+2}}{1-m_n} - 1\right),$$

$$V_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]+1} \frac{\left(1-m_n^{k-1}\right)\left(1-m_n^{k-2}\right)}{(1-m_n)\left(1-m_n^2\right)}\left(2\,\frac{1-m_n^{[nt]-k+2}}{1-m_n} - 1\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$U_n(t) \le \frac{2(1+nt)}{(1-m_n)^2}, \quad V_n(t) \le \frac{2(1+nt)}{(1-m_n)^3}.$$

Тогда

$$\operatorname{var} G_n(t) \le 2\alpha^{-2}\left(\frac{b_n^2}{n} + \frac{\lambda_n\sigma_n^2 d_n}{\alpha n}\right) t \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4}$$

для любого $t \ge 0$. Следовательно, отсюда и из (3), применяя неравенство Чебышева, приходим к выводу, что $G_n(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} Z(t)$ при $n \to \infty$ для любого $t \ge 0$. Так как предельный процесс Z является непрерывным и неслучайным, то в силу теоремы 15.1 [5] для завершения доказательства теоремы остается показать плотность последовательности процессов $\{G_n(t), t \ge 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, учитывая соотношения (3), (4), для любых $t, s \ge 0$ и для достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big(G_n(t) - G_n(s)\big)^2 &\le 3\left(\operatorname{var} G_n(s) + \operatorname{var} G_n(t) + \big(\mathsf{E}G_n(t) - \mathsf{E}G_n(s)\big)^2\right) \le \\ &\le 4\alpha^{-2}\lambda^2(t-s)^2.\end{aligned}$$

Тогда, согласно критериям плотности 15.5 и 12.3 [5], последовательность процессов $\{G_n(t), t \ge 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, является плотной. □

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 2, докажем несколько лемм, из которых затем будет следовать утверждение теоремы 2. Положим

$$M_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right) + \varepsilon_k^{(n)} - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через $F_k^{(n)}$ σ-алгебру, порожденную совокупностью случайных величин $\left\{X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)}\right\}$. Ясно, что $\left\{M_k^{(n)}, k \geq 0\right\}$ образует мартингал-разность относительно потока $F_k^{(n)}$, $k \geq 0$.

Лемма 1. *Имеет место следующее представление:*

$$W_n(t) = \left[d_n\left(1 - m_n\right)\right]^{-1}\left(\widetilde{M}_n^{(1)}(t) - m_n \widetilde{M}_n^{(2)}(t)\right),$$

где

$$W_n(t) = \left(d_n\sqrt{n}\right)^{-1}\left(Z_n(t) - \mathsf{E}Z_n(t)\right),$$

$$\widetilde{M}_n^{(1)}(t) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nt]} M_j^{(n)}, \qquad \widetilde{M}_n^{(2)}(t) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{[nt]-j} M_j^{(n)}.$$

Доказательство леммы 1. В силу (1) величину $X_k^{(n)}$ представим в виде

$$X_k^{(n)} = m_n X_{k-1}^{(n)} + \lambda_n + M_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда $\mathsf{E}X_k^{(n)} = m_n \mathsf{E}X_{k-1}^{(n)} + \lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots$ Значит, случайные величины $X_k^{(n)} - \mathsf{E}X_k^{(n)}$, $k \geq 0$, удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$X_k^{(n)} - \mathsf{E}X_k^{(n)} = m_n\left(X_{k-1}^{(n)} - \mathsf{E}X_{k-1}^{(n)}\right) + M_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

решение которого имеет вид

$$X_k^{(n)} - \mathsf{E}X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} m_n^{k-j} M_j^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

С помощью суммирования последнего соотношения по k от 1 до $[nt]$ и нормирования соответствующим образом приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 2. *Если выполнены условия 1–3 теоремы 2, то имеет место слабая сходимость*

$$\widetilde{M}_n^{(2)}(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$.

Доказательство леммы 2. Нетрудно видеть, что

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-1)}\mathsf{E}\left(\left(M_k^{(n)}\right)^2 / F_{j-1}^{(n)}\right) = \frac{\sigma_n^2}{n}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-1)} X_{j-1}^{(n)} + \frac{b_n^2}{n}\cdot\frac{1 - m_n^{2[nt]}}{1 - m_n^2}. \quad (5)$$

В силу условия теоремы, а также учитывая соотношение (2), получаем

$$\frac{b_n^2}{n}\cdot\frac{1 - m_n^{2[nt]}}{1 - m_n^2} \sim \frac{b^2}{2|\alpha|}\cdot\frac{d_n}{n} \to 0, \qquad \frac{\sigma_n^2}{n}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)}\mathsf{E}X_{j-1}^{(n)} \sim \frac{\lambda\sigma^2}{2\alpha^2}\cdot\frac{d_n}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда и из (5) следует, что

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)}\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2 / F_{j-1}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда тем более

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-j)}\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2 I\left(m_n^{[nt]-j}\left|M_j^{(n)}\right|>\varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{j-1}^{(n)}\right)\xrightarrow{\mathsf{P}}0$$

при $n\to\infty$. Значит, выполнены условия теоремы 7.1.11 [6], откуда и следует утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место слабая сходимость*

$$\widetilde{M}_n^{(1)}\to\left(|\alpha|^{-1}\lambda\sigma^2+b^2\right)^{1/2}W \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{6}$$

в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$.

Доказательство леммы 3. Так как последовательность $\left(M_k^{(n)},F_k^{(n)}\right)$, $k\geq 1$, образует мартингал-разность, то, в силу теоремы 7.1.11 [6], достаточно показать, что

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]}\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2/F_{j-1}^{(n)}\right)\xrightarrow{\mathsf{P}}\left(|\alpha|^{-1}\lambda\sigma^2+b^2\right)t \tag{7}$$

и для любого $\varepsilon>0$

$$R_n(\varepsilon,t)=n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt]}\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2 I\left(\left|M_j^{(n)}\right|>\varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{j-1}^{(n)}\right)\xrightarrow{\mathsf{P}}0 \tag{8}$$

при $n\to\infty$. Нетрудно убедиться в справедливости (7), если учесть соотношение $\mathsf{E}\left(\left(M_j^{(n)}\right)^2/F_k^{(n)}\right)=\sigma_n^2X_{k-1}^{(n)}+b_n^2$, теорему 1, а также условия 1–3 теоремы 2. Поэтому перейдем к доказательству (8). Положим

$$N_{n,k}^{(1)}=\sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}}\left(\xi_{k,j}-m_n\right),\qquad N_{n,k}^{(2)}=\varepsilon_k^{(n)}-\lambda_n.$$

Так как $M_k^{(n)}=N_{n,k}^{(1)}+N_{n,k}^{(2)}$, то, применяя элементарное неравенство $(a+b)^2\leq\leq 2(a^2+b^2)$ и неравенство

$$I(|X+Y|>2\varepsilon)\leq I(|X|>\varepsilon)+I(|Y|>\varepsilon), \tag{9}$$

справедливое для любых двух случайных величин X, Y и для любого $\varepsilon>0$, имеем

$$R_n(2\varepsilon,t)\leq 2\sum_{i,j=1}^{2}R_{i,j}^{(n)}(\varepsilon,t),$$

с вероятностью 1, где

$$R_{i,j}^{(n)}(\varepsilon,t)=n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathsf{E}\left(\left(N_{n,k}^{(i)}\right)^2 I\left(\left|N_{n,k}^{(j)}\right|>\varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right),\quad i,j=1,2.$$

Следовательно, для доказательства (8) достаточно показать, что

$$R_{i,j}^{(n)}(\varepsilon,t)\xrightarrow{\mathsf{P}}0 \ \text{ при } \ n\to\infty \tag{10}$$

для $i,j=1,2$ и для любых $t>0$, $\varepsilon>0$.

Для этого исследуем сначала случай $i=j=1$. Имеем $\left(N_{n,k}^{(1)}\right)^2 = J_k^{(n)} + L_k^{(n)}$, где

$$J_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right)^2, \qquad L_k^{(n)} = 2\sum_{i=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \sum_{j=i+1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,i}^{(n)} - m_n\right)\left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right).$$

Введем в рассмотрение случайные величины

$$S_{k,j}^{(n)} = N_{n,k}^{(1)} - \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right), \quad j = 1, 2, \ldots, X_{k-1}^{(n)}.$$

Применяя (9), получаем

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(J_k^{(n)} I\left(\left|N_{n,k}^{(1)}\right| > 2\varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right) \le$$

$$\le n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right) +$$

$$+ n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|S_{k,j}^{(n)}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right) = A_n + B_n. \quad (11)$$

Так как величины $\xi_{k,j}^{(n)}$, $k,j \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены, то из условия 3 и из теоремы 1 следует, что для любого $t > 0$

$$A_n \overset{\mathsf{P}}{\sim} |\alpha|^{-1}\lambda t d_n \mathsf{E}\left(\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right)\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \quad (12)$$

где знак $\varphi \overset{\mathsf{P}}{\sim} \psi$ означает, что $\varphi\psi^{-1} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$ при $n \to \infty$.

Теперь рассмотрим B_n. Учитывая независимость величин $\xi_{k,j}^{(n)} - m_n$ и $S_{k,j}^{(n)}$, а также применяя условный вариант неравенства Чебышева, убедимся в том, что

$$B_n \le \frac{4}{\varepsilon^2 n^2}\sigma_n^4 \sum_{k=1}^{[nt]} \left(X_k^{(n)}\right)^2 \quad (13)$$

с вероятностью 1. Применяя лемму 2.1 [2], получаем

$$\sigma_n^4 n^{-2} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(X_k^{(n)}\right)^2 \le 2\alpha^{-2}\left(d_n\sigma_n^2\right)^2\left(|\alpha| b_n^2 + \lambda_n^2\right)[nt]n^{-2} \to 0 \quad (14)$$

при $n \to \infty$. Отсюда и из (13), в силу неравенства Маркова, заключаем, что

$$B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Последнее соотношение вместе с (12), в силу (11), приводят к тому, что

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(J_k^{(n)} I\left(\left|N_{n,k}^{(1)}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \quad (15)$$

Далее, применяя условные варианты неравенств Коши – Буняковского и Чебышева, получаем

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}\left(\left|L_k^{(n)}\right| I\left(\left|N_{n,k}^{(1)}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right)/F_{k-1}^{(n)}\right) \le 2^{1/2}\varepsilon^{-1} n^{-3/2}\sigma_n^3 \sum_{k=1}^{[nt]} \left(X_{k-1}^{(n)}\right)^2 \quad (16)$$

с вероятностью 1. Аналогично выражению (14)

$$(nd_n)^{-3/2}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathsf{E}\left(X_{k-1}^{(n)}\right)^2 \le 2\left(n^{-1}d_n\right)^{1/2}\alpha^{-2}\left(|\alpha|b_n^2+\lambda_n^2\right)t\to 0 \quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Отсюда из (16) и (15) следует справедливость (10) для случая $i=j=1$. Рассмотрим случай $i=1$, $j=2$. Учитывая независимость $N_{n,k}^{(1)}$ и $N_{n,k}^{(2)}$, применяя условный вариант неравенства Чебышева, а также теорему 1, имеем

$$R_{1,2}^{(n)}(\varepsilon,t)\le\frac{b_n^2\sigma_n^2}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{[nt]}X_{k-1}^{(n)}\overset{\mathsf{P}}{\sim}\frac{\lambda\sigma^2b^2}{\varepsilon^2|\alpha|}t\cdot\frac{1}{n}\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Аналогично имеем

$$R_{2,1}^{(n)}(\varepsilon,t)\xrightarrow{\mathsf{P}}0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

В случае, когда $i=j=2$, соотношение (10) непосредственно следует из условия 4 в силу того, что случайные величины $\varepsilon_k^{(n)}$, $k\in\mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены. Доказательство леммы 3 завершено. □

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из лемм 1–3 и теоремы 4.1 [5].

Примеры. Приведем примеры последовательностей ветвящихся процессов с иммиграцией, для которых выполнены условия теорем 1 и 2.

1) Пусть $\xi_{1,1}^{(n)}$ имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха p_n, причем $p_n=1+\alpha d_n^{-1}+o\left(d_n^{-1}\right)$ при $n\to\infty$, где $\alpha<0$ — фиксированное число, а поток иммиграции подчиняется пуассоновскому закону с параметром $\lambda_n\ge 0$, причем существует конечное неотрицательное число λ такое, что $\lambda_n\to\lambda$ при $n\to\infty$. Нетрудно убедиться в том, что выполнены все условия теорем 1 и 2. В рассматриваемом случае $Z(t)=|\alpha|^{-1}\lambda t$, $Y(t)=|\alpha|^{-1}(2\lambda)^{1/2}W(t)$. Если $\xi_{1,1}^{(n)}$ и $\varepsilon_1^{(n)}$ оба имеют распределение Бернулли с одной и той же вероятностью успеха $p_n=1+\alpha d_n^{-1}$, $\alpha<0$, то $Z(t)=|\alpha|^{-1}t$, $Y(t)=|\alpha|^{-1}W(t)$.

2) Пусть $\xi_{1,1}^{(n)}$ принимает значения 0, 1, и 2 с вероятностями $2d_n^{-1}$, $1-3d_n^{-1}$ и d_n^{-1}, соответственно, а величина $\varepsilon_1^{(n)}$ имеет геометрическое распределение с вероятностью успеха p_n, т. е.

$$\mathsf{P}\left(\varepsilon_1^{(n)}=k\right)=p_n(1-p_n)^{k-1},\quad k=1,2,\dots$$

Имеем $m_n=1-d_n^{-1}$, $\sigma_n^2=d_n^{-1}(3-d_n^{-1})$, $\lambda_n=p_n^{-1}$, $b_n^2=(1-p_n)p_n^{-2}$. Пусть $p_n\to p>0$. Ясно, что условия 1, 2 и 3 теорем 1 и 2 выполнены, причем $\alpha=-1$, $\sigma^2=3$, $\lambda=p^{-1}$, $b^2=(1-p)p^{-2}$. Нетрудно также проверить справедливость условий 4 и 5 теоремы 2. В рассматриваемом случае $Z(t)=p^{-1}t$, $Y(t)=\left(p^{-1}\left(2+p^{-1}\right)\right)^{1/2}W(t)$.

Автор выражает свою признательность рецензенту за замечания и указанные недостатки, устранение которых способствовало улучшению данной работы.

Список литературы

1. A. G. Pakes, *Some limit theorems for the total progeny of a branching process*, Adv. Appl. Probab. **3** (1971), no. 1, 176–192.
2. A. V. Karpenko and S. V. Nagaev, *Limit theorems for the complete number of descendants in a Galton–Watson branching process*, Theory Probab. Appl. **38** (1993), no. 3, 433–455.
3. T. N. Sriram, *Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration*, Ann. Statist. **22** (1994), 1013–1023.
4. M. Ispany, G. Pap, and M. C. A. Van Zuijlen, *Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean*, Adv. Appl. Probab. **37** (2005), 523–528.
5. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1968.

6. R. Sh. Liptser and A. N. Shiryayev, *Theory of Martingales*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 49, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
7. D. S. Silvestrov, *Limit Theorems for Composite Random Functions*, Vyshcha Shkola, Kiev, 1974. (Russian)
8. C. Z. Wei and J. Winicki, *Some asymptotic results for the branching process with immigration*, Stochastic Process. Appl. **31** (1989), 261–282.
9. Ya. M. Khusanbaev, *On the rate of convergence in a limit theorem for branching processes with immigration*, Sib. Math. J. **55** (2014), no. 1, 178–184.

Институт математики им. В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, ул. Дурмон йули, 29, г. Ташкент, Узбекистан, 100129
Адрес электронной почты: yakubjank@mail.ru

Статья поступила в редколлегию 16.01.2017

ON ASYMPTOTICS OF COMPLETE NUMBER OF PARTICLES IN ALMOST CRITICAL BRANCHING PROCESS WITH IMMIGRATION

YA. M. KHUSANBAEV

Abstract. We consider a sequence of branching processes with immigration, where the offspring mean tends to 1. Rates of growth and the asymptotic of fluctuation of common number individuals are investigated.

ПРО АСИМПТОТИКУ ПОВНОГО ЧИСЛА ЧАСТИНОК У МАЙЖЕ КРИТИЧНОМУ ГІЛЛЯСТОМУ ПРОЦЕСІ З ІММІГРАЦІЄЮ

Я. М. ХУСАНБАЄВ

Анотація. Розглядається послідовність гіллястих процесів з імміграцією у випадку, коли середнє число нащадків однієї частинки прямує до одиниці. Знайдено швидкість збіжності та асимптотику флуктуації повного числа частинок, які беруть участь у розвитку популяції.