Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 84–99

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 84–99

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД ФУНКЦІОНАЛА ВІД НАПІВМАРКОВСЬКОЇ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

В. С. КОРОЛЮК, І. В. САМОЙЛЕНКО

Анотація. У роботі знайдено регулярну та сингулярну складові розкладу функціонала від напівмарковської випадкової еволюції, показано регулярність граничних умов. Крім того, із використанням граничних умов для сингулярної частини розкладу, запропоновано алгоритм для знаходження початкових умов при $t = 0$ в явному вигляді.

Ключові слова і фрази. Асимптотичний розклад, напівмарковський процес, випадкова еволюція, регуляризація граничних умов.

1. Вступ

Багато стохастичних систем можуть бути описані із застосуванням абстрактної математичної моделі в банаховому просторі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ функцій $\varphi(u), u \in \mathbb{R}^d$, що називається випадковою еволюцією (детальний огляд можна знайти у [18]). Таку модель вперше введено Гріего та Хершем [2, 3, 4].

Асимптотичні методи в теорії випадкових еволюцій використовувались багатьма математиками (див., наприклад [5, 11, 17]). Застосування цих методів для різних стохастичних систем можна знайти у [14]. У [18] за допомогою аналогічних підходів досліджено моделі кінетичної теорії газів, ізотропного руху на многовидах, стійкість випадкових осциляторів тощо.

Серед робіт, що стосуються галузі математичної біології, ми можемо нагадати результати Хіллена та Отмера [6, 15], див. також [16]. А саме, транспортні рівняння використовуються в математичній біології як модель руху і кількісної зміни популяції. Деякі бактерії демонструють такий характер пересування: періоди руху по прямій траєкторії чергуються з періодами випадкових обертань, які призводять до переорієнтації напрямку руху клітини. Ми можемо моделювати подібну картину за допомогою стрибкового процесу, що визначає швидкість, а це веде до необхідності розглядати транспортне рівняння.

Таким чином, лінійне транспортне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,v,t) + v\nabla p(x,v,t) = -\lambda p(x,v,t) + \int_V \lambda T(v,v')p(x,v',t)\,dv',$$

де $p(x,v,t)$ — це щільність частинок у точці $x \in R^d$, що рухаються зі швидкістю $v \in V \subset R^d$ в момент часу $t \geq 0$. Інтенсивність поворотів λ може бути залежною як від поточної позиції, так і від швидкості. Ядро, що задає поворот, або розподіл кута повороту $T(v,v')$ визначає ймовірність стрибка з v' до v, у момент, коли стрибок відбувається.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J25; Secondary 35C20.

Еволюційне рівняння, що досліджується в нашій роботі, узагальнює наведене транспортне рівняння. Аналогічне узагальнення телеграфного рівняння описано в [20].

Ще один приклад застосування асимптотичних методів описано в роботах Йіна і Жанга [26]. Вони вивчають модель планування виробництва для схильних до відмов виробничих систем, які складаються з машин, чия продуктивність моделюється марковським або напівмарковським ланцюгом. У великомасштабних системах різні компоненти можуть замінюватися з різною швидкістю. Таким чином, систему можна розбити на окремі компоненти, для яких відповідні стани ланцюга укрупнюються. Уведення малого параметра $\varepsilon > 0$ переводить систему до категорії систем, шкальованих двома часовими параметрами. У подібній моделі рівняння матиме вигляд

$$\frac{dp^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} p^\varepsilon(t) Q(t).$$

Тут $p^\varepsilon(t)$ — розподіл імовірностей марковського або напівмарковського ланцюга, $Q(t)$ — відповідний генератор. Як правило, швидкозмінний процес $p^\varepsilon(t)$ у фізичних та виробничих системах важко аналізувати. Але дослідники замінюють процес його «усередненням» завдяки використанню граничних властивостей, отриманих за допомогою асимптотичних розкладів.

Зокрема, проблеми мінімізації функції витрат і оптимального управління вивчаються в [26] саме за допомогою асимптотичних наближень. Подібні методи також використано при розв'язанні марковських проблем прийняття рішень, задач стохастичного контролю динамічних систем, чисельних методів управління й оптимізації.

Більш детальний огляд останніх результатів щодо методів асимптотичного аналізу випадкових еволюцій та можливих застосувань можна знайти в роботах [22, 27].

У цій роботі деякі з отриманих у [26] результатів узагальнено на випадок напівмарковських процесів. Робота стосується схеми дифузійної апроксимації та є логічним продовженням статті [1], в якій аналогічне дослідження проведено у схемі усереднення. Подібну задачу досліджено в [19], де автор уводить додаткові параметри з метою перетворення напівмарковської випадкової еволюції на марковську. Це суттєво спрощує технічний бік дослідження, але вимагає введення додаткової змінної як аргументу фукнціонала, і питання зворотного переходу залишається відкритим. Крім того, автор не формулює результат щодо вигляду регулярної частини розкладу, а лише пропонує алгоритм для її знаходження а також не проводить регуляризацію граничних умов, яка дозволяє, користуючись граничними умовами для сингулярної частини розкладу, запропонувати алгоритм для знаходження початкових умов при $t = 0$ в явному вигляді. Усі ці проблеми успішно розв'язано в даній роботі. Питання щодо збіжності асимптотичного ряду розв'язується за допомогою оцінки залишкового члена і цей результат автори залишають для окремої публікації.

Напівмарковська випадкова еволюція у схемі серій (більш детально її властивості розглянуто в [10]) задається розв'язком еволюційного рівняння в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$,

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} v\left(u^\varepsilon(t); æ\left(t/\varepsilon^2\right)\right). \tag{1}$$

Процес, що перемикає швидкості $æ(t), t \geq 0$, є напівмарковським [9] у просторі станів $(E, \mathcal{E})$, де E — повний сепарабельний метричний простір, $\mathcal{E}$ — відповідна σ-алгебра його підмножин, і задається напівмарковським ядром [10]:

$$Q(x, B, t) = P(x, B) F_x(t), \quad x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0,$$

що визначає ймовірності переходу процесу марковського відновлення $æ_n, \tau_n, n \geq 0$,

$$Q(x_n, B, t) = \mathsf{P}\{æ_{n+1} \in B, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid æ_n = x\} = \\ = \mathsf{P}\{æ_{n+1} \in B \mid æ_n = x\} \, \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid æ_n = x\}.$$

Стохастичне ядро

$$P(x, B) = \mathsf{P}\{æ_{n+1} \in B \mid æ_n = x\}$$

задає перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $æ_n = æ(\tau_n), n \geq 0$; функції розподілу

$$F_x(t) = \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid æ_n = x\} =: \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t\}, \quad x \in E,$$

задають розподіли періодів перебування θ_x у станах $x \in E$.

$\mathfrak{B}(E)$ — банахів простір дійснозначних тест-функцій $\varphi(x)$, що обмежені разом з усіма своїми похідними. Цей простір оснащений sup-нормою. Генератор асоційованого марковського процесу діє на $\mathfrak{B}(E)$ та має вигляд

$$Q = q(x)(P - I),$$

де оператор перехідних ймовірностей

$$P\varphi(x) = \int_E P(x, dy)\varphi(y), \quad x \in E,$$

$q(x) = 1/m_1(x)$, $m_k(x) = \int_0^\infty s^k F_x(ds)$.

Нехай перемикаючий напівмарковський процес $æ(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно ергодичним (детально див. [10]). Позначимо як $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, стаціонарний розподіл перемикаючого напівмарковського процесу $æ(t)$, $t \geq 0$, що задовольняє співвідношення

$$\pi(dx) = \rho(dx)\, m_1(x)/\widehat{m},$$
$$\widehat{m} = \int_E \rho(dx)\, m_1(x),$$

$\rho(B), B \in \mathcal{E}$, є стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $æ_n, n \geq 0$, що визначається формулою

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)\, P(x, B), \quad \rho(E) = 1.$$

У такому випадку [10, 12] банахів простір $\mathfrak{B}(E)$ розкладається у пряму суму підпросторів: $N_Q := \{\varphi(x) : Q\varphi(x) = 0\}$ — нуль-підпростір оператора Q та $R_Q := \{\psi(x) : Q\varphi(x) = \psi(x)\}$ — підпростір значень оператора Q.

Позначимо через Π проектор на нуль-підпростір оператора Q: $\Pi\varphi(x) := \widehat{\varphi}\, \mathbf{1}(x)$, де $\mathbf{1}(x) = 1$ для всіх $x \in E$, $\widehat{\varphi} := \int_E \varphi(x)\, \pi(dx)$.

У монографії [10, п. 3.4.3] досліджено умови слабкої збіжності

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

та отримано рівняння, що визначає граничний процес. Питання про швидкість збіжності можна розглядати із двох точок зору:

(i) асимптотичний аналіз флуктуацій

$$\zeta^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - \hat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0;$$

(ii) асимптотичний аналіз функціонала, що визначає математичне сподівання від напівмарковської випадкової еволюції

$$\Phi_t^\varepsilon(u, x) = \mathsf{E}\big[\varphi\big(u^\varepsilon(t)\big) \bigm| u^\varepsilon(0) = u, æ(0) = x\big],$$

де функція $\varphi(u)$ належить банаховому простору $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ дійснозначних тест-функцій, що обмежені разом з усіма своїми похідними. Норма визначається таким чином:

$$\|\varphi\| = \sup_{u\in\mathbb{R}^d} |\varphi(u)| < C_\varphi$$

для деякого $C_\varphi > 0$.

Метою нашої роботи є реалізація другого підходу, а саме, побудова асимптотичного розкладу функціонала від напівмарковської випадкової еволюції у вигляді

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = U^\varepsilon(t) + W^\varepsilon(\tau) = U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \big(U_k(t) + W_k(\tau)\big), \tag{2}$$

де $\tau = t/\varepsilon^2$.

Зауваження 1.1. Початкові умови мають вигляд

$$\Phi_0^\varepsilon(u,x) = U^\varepsilon(0) + W^\varepsilon(0) = \varphi(u),$$

звідси

$$U_0(0) = \varphi(u),$$
$$U_k(0) + W_k(0) = 0, \quad k \ge 1.$$

Сингулярна частина розкладу задовольняє граничні умови:

$$W^\varepsilon(\infty) = 0.$$

Асимптотичні розклади з «пограничним шаром» вивчалися багатьма авторами [8, 25]. Зокрема, функціонали від марковських та напівмарковських процесів досліджено з цієї точки зору в [11, 20, 24].

У даній роботі асимптотичний розклад (2) для функціонала від напівмарковської випадкової еволюції у схемі дифузійної апроксимації будується з використанням інтегрального рівняння марківського відновлення. Алгоритм побудови явного вигляду регулярних і сингулярних членів асимптотики і граничні умови сформульовано в теоремі 1.1. Основний результат буде доведено в декілька етапів у вигляді лем.

Уведемо такі позначення.

Детермінована еволюція

$$\Phi_x(t,u) = \varphi\big(u_x^\varepsilon(t)\big), \quad u_x^\varepsilon(0) = u,$$

породжує відповідну напівгрупу

$$V_t(x)\varphi(u) \coloneqq \varphi(u_x^\varepsilon(t)), \quad u_x^\varepsilon(0) = u,$$

її генератор має вигляд

$$\mathbb{V}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \frac{1}{\varepsilon} v(u,x)\varphi'(u).$$

Для зручності подальших викладок позначимо допоміжний генератор

$$\mathbb{V}(x)\varphi(u) \coloneqq v(u,x)\varphi'(u).$$

Уведемо додатково позначення:

$$\mu_k(x) = \frac{m_k(x)}{k!\,m_1(x)}, \qquad \mu_1(x) \coloneqq 1, \qquad L_{k,n}^i U_n(t) \coloneqq (-1)^i C_{k-n-2i}^{k-n-i} \mathbb{V}^{k-n-2i}(x) P U_n^{(i)}(t),$$

$$\Pi\mathfrak{L}_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]} \Pi\mu_{k-n-i}(x) L_{n,k}^i \mathbb{R}_0 \mathfrak{L}_n + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \Pi\mu_{k-i}(x) L_{0,k}^i,$$

$$\nu_k(x) = (-1)^k [m_k(x) - \mu_{k+1}(x)],$$

$$\widehat{L}_{k-1}(x) := \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n C_k^n \mathbb{V}^{k-n}(x)PU^{(n)}(t),$$
$$\widehat{L}_k(x) := \mathbb{V}^k(x)P.$$

І, нарешті:

$$\mathbf{Q}W(\tau) = \int_0^\infty F_x(ds)\, PW(\tau - s),$$
$$\psi^k(\tau) = \bar{F}_x^{(k)}(\tau)\mathbb{V}^k(x)P\varphi(u), \qquad \psi_0^k(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^r W_{k-r}(\tau), \tag{3}$$
$$\bar{F}_x^{(k)}(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\bar{F}_x(s)\,ds, \qquad \mathbf{Q}^r W(\tau) = \int_0^\infty \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r(x)PW(\tau - s).$$

Нехай виконується умова балансу, а саме, середнє значення $v(u,x)$ по стаціонарній мірі перемикаючого напівмарковського процесу є нулем

$$\Pi\mathbb{V}(x)\Pi = \int_E v(u,x)\,\pi(dx) = 0. \tag{4}$$

Теорема 1.1. *За умов рівномірної ергодичності перемикаючого напівмарковського процесу та умови балансу (4) асимптотичний розклад функціонала від напівмарковської випадкової еволюції*

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = \mathsf{E}\big[\varphi\big(u^\varepsilon(t)\big) \bigm| u^\varepsilon(0) = u, æ(0) = x\big]$$

має вигляд

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = U^\varepsilon(t) + W^\varepsilon(\tau) = U_0(t) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k\big(U_k(t) + W_k(\tau)\big), \quad \tau = t/\varepsilon^2,$$

де

$$U_0(t) = c_0(t,u)\mathbf{1},$$

функція $c_0(t,u)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} = \tilde{v}(u)\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial u} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(u)\frac{\partial^2 c_0(t,u)}{\partial u^2} \tag{5}$$

з початковою умовою

$$c_0(0,u) = \varphi(u).$$

Тут

$$\tilde{v}(u) := \Pi\mu_2(x)\frac{\partial v(u,x)}{\partial u} - \Pi v(x,u)\mathbb{R}_0\frac{\partial v(x,u)}{\partial u},$$
$$\tilde{\sigma}(u) := 2\big(\Pi\mu_2(x)v(u,x) - \Pi v(x,u)\mathbb{R}_0 v(x,u)\big).$$

Наступні регулярні члени мають вигляд

$$U_k(t) = \mathbb{R}_0\left(\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]}\mu_{k-n-i}(x)L_{k,n}^i U_n(t)\right) + c_k(t,u),$$

де, згідно з [8], $\mathbb{R}_0 = \Pi - [Q + \Pi]^{-1}$.

Функції $c_k(t,u)$ задовольняють рівняння

$$\frac{\partial c_k(t,u)}{\partial t} - \Pi\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)c_k(t,u) + \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)c_k(t,u) =$$
$$= -\Pi\mathfrak{L}_k c_0(t,u) - \ldots - \Pi\mathfrak{L}_1 c_{k-1}(t,u).$$

Сингулярні члени асимптотики («пограничний шар») мають вигляд

$$W_1(\tau) = \mathbf{R_0}\left[\psi^1(\tau) + \bar{F}_x(\tau)PU_1(0) + \int_\tau^\infty (\tau - s)F_x(ds)PU_0'(0)\right],$$

$$W_k(\tau) = \mathbf{R_0}\left[\psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau) + \bar{F}_x(\tau)PU_k(0) + \sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\int_\tau^\infty \frac{(\tau - s)^n}{n!}F_x(ds)PU_{k-2n}^{(n)}(0)\right],$$

де $\mathbf{R_0}$ — *матриця марковського відновлення* [21].

Початкові умови:

$$(I - \Pi)[U_k(0) + W_k(0)] = 0,$$

$$c_k(0,u) = -\Pi W_k(0),$$

$$c_k(0,u) = \left[\sum_{r=0}^{k-1}\int \pi(dx)\nu_{k-r}(x)\widehat{L}_{k-r}(x)U_r(0) - \right.$$
$$\left. - \sum_{r=1}^{k-1}\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r(x)PW_{k-r}(\tau - s)d\tau\right]/\widehat{m}.$$

Зауваження 1.2. Вигляд рівняння (5) повністю відповідає результатам, отриманим у п. 3.4.3 монографії [10], і означає, що випадковий процес, до якого слабко збігається догранична випадкова еволюція при $\varepsilon \to 0$, визначається рівнянням дифузійного типу

$$du^0(t) = \tilde{v}(u)\,dt + \tilde{\sigma}^{1/2}(u)\,dw(t).$$

2. Рівняння марковського відновлення

Лема 2.1. *Функціонал від напівмарковської випадкової еволюції* $\Phi_t^\varepsilon(u,x)$ *задовольняє рівняння*

$$\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) - \Phi_t^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^2\mathbb{V}^\varepsilon(x)\int_\tau^\infty \bar{F}_x(s)V_{\varepsilon^2 s}(x)\varphi(u)ds, \qquad (6)$$

де $\tau = t/\varepsilon^2$.

Доведення. З урахуванням моменту першого стрибка перемикаючого процесу, функціонал має вигляд

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = E_{u,x}\left[\varphi\big(u^\varepsilon(t)\big); \theta_x > t/\varepsilon^2\right] + E_{u,x}\left[\varphi\big(u^\varepsilon(t)\big); \theta_x \le t/\varepsilon^2\right] =$$
$$= \bar{F}_x\left(t/\varepsilon^2\right)V_t(x)P\varphi(u) + \int_0^{t/\varepsilon^2} F_x(ds)V_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x).$$

Таким чином, маємо

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^{t/\varepsilon^2} F_x(ds)V_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) = \bar{F}_x(\tau)V_t(x)P\varphi(u).$$

Продовживши за неперервністю $\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) = \varphi(u)$, $t - \varepsilon^2 s \le 0$, перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^\infty F_x(ds)V_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) =$$
$$= \bar{F}_x(\tau)V_t(x)P\varphi(u) - \int_\tau^\infty F_x(ds)V_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) =$$
$$= \bar{F}_x(\tau)V_t(x)P\varphi(u) - \int_\tau^\infty F_x(ds)V_{\varepsilon^2 s}(x)P\varphi(u).$$

Отже,

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^\infty F_x(ds) V_{\varepsilon^2 s}(x) P \Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon(u,x) =$$

$$= \bar{F}_x(\tau) V_t(x) P\varphi(u) - \bar{F}_x(s) V_{\varepsilon^2 s}(x) P\varphi(u)\Big|_\tau^\infty - \varepsilon^2 \mathbb{V}^\varepsilon(x) \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s) V_{\varepsilon^2 s}(x)\varphi(u)ds.$$

Після скорочення доданків отримуємо (6). Лему доведено. □

3. Рівняння для регулярних членів

Уведемо позначення: $L_k = \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^{k-n} P\left(U^{\varepsilon(n)}(t)\right)$.

Лема 3.1. *Рівняння для регулярних членів асимптотики мають вигляд*

$$QU(t) = -\left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \mu_k(x) L_k\right] U^\varepsilon(t). \tag{7}$$

Доведення. Скористаємось рівністю

$$aPb - 1 = (P-1) + (a-1)P + P(b-1) + (a-1)P(b-1),$$

де

$$a = V_{\varepsilon^2 s}(x) = I + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} \left(\mathbb{V}^\varepsilon(x)\right)^k, \qquad b = \Phi_{t-\varepsilon^2 s}^\varepsilon = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} \Phi_t^{(k)}(u,x).$$

Перепишемо (6) у вигляді

$$(P-I)\Phi_t^\varepsilon(u,x) + \int_0^\infty F_x(ds) \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right) P\Phi_t^\varepsilon(u,x) +$$
$$+ \int_0^\infty F_x(ds) P \left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} \Phi_t^{(k)}(u,x)\right) +$$
$$+ \int_0^\infty F_x(ds) \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right) P \left(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} \Phi_t^{(k)}(u,x)\right) =$$
$$= \varepsilon^2 \mathbb{V}^\varepsilon(x) \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s) V_{\varepsilon^2 s}(x) P\varphi(u) ds.$$

Підставивши вираз (2) для регулярних доданків, отримаємо

$$(P-I)U^\varepsilon(t) = -\int_0^\infty F_x(ds) \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right) PU^\varepsilon(t) -$$
$$- \int_0^\infty F_x(ds) P \left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (U^{\varepsilon(k)}(t))\right) -$$
$$- \int_0^\infty F_x(ds) \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right) P \left(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{s^k}{k!} (U^{\varepsilon(k)}(t))\right).$$

Зібравши доданки при однакових степенях ε, маємо

$$(P-I)U^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \left[-\int_0^\infty F_x(ds) \frac{s^k}{k!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k PU^\varepsilon(t) -\right.$$
$$- \int_0^\infty F_x(ds) \left(\sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \frac{s^k}{n!(k-n)!} (\mathbb{V}^\varepsilon(x))^n P(U^{\varepsilon(k-n)}(t))\right) -$$

$$- \int_0^\infty (-1)^k F_x(ds) P \frac{s^k}{k!} (U^{\varepsilon(k)}(t)) \Big] = - \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k} \frac{m_k(x)}{k!} L_k U^\varepsilon(t).$$

Поділивши останню рівність на $m_1(x)$, ми отримуємо (7). Лему доведено. □

Якщо підставити в (7) розклад $U^\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k U_k(t)$, врахувати співвідношення $\mathbb{V}^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{V}(x)$ та зібрати доданки при однакових степенях ε, отримаємо наслідок.

Наслідок 3.1. *Регулярні члени асимптотики задовольняють таку систему рівнянь:*

$$\begin{cases} QU_0(t) = 0, \\ QU_1(t) = -\mathbb{V}(x) P U_0(t), \\ QU_2(t) = \dfrac{\partial P U_0(t)}{\partial t} - \mu_2(x) \mathbb{V}^2(x) P U_0(t) - \mathbb{V}(x) P U_1(t), \\ QU_3(t) = \dfrac{\partial P U_1(t)}{\partial t} - \mu_2(x) \mathbb{V}^2(x) P U_1(t) - \mathbb{V}(x) P U_2(t) + \\ \qquad + \mu_2(x) C_1^2 \mathbb{V}(x) P \dfrac{\partial U_0(t)}{\partial t} - \mu_3(x) \mathbb{V}^3(x) P U_0(t), \\ \qquad \dots \\ QU_k(t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]} \mu_{k-n-i}(x) L^i_{k,n} U_n(t), \quad k \geq 3, \\ \qquad \dots \end{cases} \tag{8}$$

де

$$L^i_{k,n} U_n(t) := (-1)^i C^{k-n-i}_{k-n-2i} \mathbb{V}^{k-n-2i}(x) P U_n^{(i)}(t).$$

Із першого рівняння системи (8) ми маємо $U_0(t) \in N_Q$, таким чином можемо покласти

$$U_0(t) = c_0(t, u)\mathbf{1},$$

де $c_0(t, u)$ — скалярна функція, що не залежить від x, натомість залежить від u.

З умови балансу (4) бачимо, що права частина другого рівняння належить R_Q, а отже маємо розв'язок [9]:

$$U_1(t) = \mathbb{R}_0 \mathbb{V}(x) P U_0(t) + c_1(t, u) = \mathbb{R}_0 \mathbb{V}(x) c_0(t, u) + c_1(t, u).$$

Таким чином, третє рівняння перепишемо у вигляді

$$QU_2(t) = \frac{\partial c_0(t, u)}{\partial t} - \mu_2(x) \mathbb{V}^2(x) c_0(t, u) - \mathbb{V}(x) \mathbb{R}_0 \mathbb{V}(x) c_0(t, u) - \mathbb{V}(x) c_1(t, u),$$

а отже з умови балансу (4) та умови розв'язності для цього рівняння ми отримуємо рівняння для $c_0(t, u)$:

$$\Pi Q \Pi U_2(t) = 0 = \frac{\partial c_0(t, u)}{\partial t} - \Pi \mu_2(x) \mathbb{V}^2(x) \Pi c_0(t, u) - \Pi \mathbb{V}(x) \mathbb{R}_0 \mathbb{V}(x) \Pi c_0(t, u).$$

Наслідок 3.2. *Функція $c_0(t, u)$ задовольняє рівняння дифузійного типу з початковою умовою*

$$\frac{\partial c_0(t, u)}{\partial t} = \tilde{v}(u) \frac{\partial c_0(t, u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(u) \frac{\partial^2 c_0(t, u)}{\partial u^2},$$
$$c_0(0, u) = \varphi(u).$$

Тут

$$\tilde{v}(u) := \Pi \mu_2(x) \frac{\partial v(u, x)}{\partial u} - \Pi v(x, u) \mathbb{R}_0 \frac{\partial v(x, u)}{\partial u},$$
$$\tilde{\sigma}(u) := 2\big(\Pi \mu_2(x) v(u, x) - \Pi v(x, u) \mathbb{R}_0 v(x, u)\big).$$

Для $U_2(t)$ ми отримаємо

$$U_2(t) = \mathbb{R}_0 \left(\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} - \mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)c_0(t,u) - \mathbb{V}(x)PU_1(t) \right) + c_2(t,u).$$

Скориставшись умовою балансу (4) та умовою розв'язності для четвертого рівняння системи (8), маємо

$$\begin{aligned} 0 = \Pi \Bigg(& R_0\mathbb{V}(x)\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial c_1(t,u)}{\partial t} - \mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)c_0(t,u) - \\ & - \mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)c_1(t,u) - \mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} + \mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)c_0(t,u) + \\ & + \mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)c_0(t,u) + \mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)c_1(t,u) - \mathbb{V}(x)c_2(t,u) + \\ & + \mu_2(x)C_1^2\mathbb{V}(x)\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} - \mu_3(x)\mathbb{V}^3(x)c_0(t,u) \Bigg)\Pi, \end{aligned}$$

звідки рівняння для $c_1(t,u)$ має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_1(t,u)}{\partial t} - \Pi\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)\Pi c_1(t,u) + \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\Pi c_1(t,u) = -\Pi\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} + \\ & + \Pi\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\Pi c_0(t,u) + \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} - \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)\Pi c_0(t,u) - \\ & - \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\Pi c_0(t,u) - \Pi\mu_2(x)C_1^2\mathbb{V}(x)\frac{\partial c_0(t,u)}{\partial t} + \Pi\mu_3(x)\mathbb{V}^3(x)\Pi c_0(t,u). \end{aligned}$$

Для $U_k(t)$ аналогічно

$$U_k(t) = \mathbb{R}_0 \left(\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]} \mu_{k-n-i}(x)L^i_{k,n}U_n(t) \right) + c_k(t,u),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_k(t,u)}{\partial t} - \Pi\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)\Pi c_k(t,u) + \Pi\mathbb{V}(x)\mathbb{R}_0\mathbb{V}(x)\Pi c_k(t,u) = \\ = -\Pi\mathfrak{L}_k c_0(t,u) - \ldots - \Pi\mathfrak{L}_1 c_{k-1}(t,u), \end{aligned}$$

де

$$\Pi\mathfrak{L}_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]} \Pi\mu_{k-n-i}(x)L^i_{n,k}\mathbb{R}_0\mathfrak{L}_n + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \Pi\mu_{k-i}(x)L^i_{0,k}.$$

4. Рівняння для сингулярних членів («пограничного шару»)

Використаємо позначення (3).

Лема 4.1. *Рівняння для сингулярних членів мають вигляд*

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} - I)W_1(\tau) &= \psi^1(\tau), \\ (\mathbf{Q} - I)W_k(\tau) &= \psi^k(\tau) - \psi^k_0(\tau). \end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. Підставивши розклад сингулярної частини $W^\varepsilon(\tau) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau)$ у (6) та врахувавши, що $\mathbb{V}^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{V}(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty F_x(ds) \left[I + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x) \right] P \left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau - s) \right] - \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau) = \\ & = \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s) \left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{V}^k(x) \right] P\varphi(u)ds. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\varepsilon[\mathbf{Q}-I]W_1(\tau)+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k[\mathbf{Q}-I]W_k(\tau)+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^rW_{k-r+1}(\tau)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{F}_x^k(\tau)\mathbb{V}^k(x)P\varphi(u),$$

зібравши члени при степенях ε отримуємо (9). Лему доведено. □

Наслідок 4.1. *Сингулярні члени асимптотики мають вигляд*

$$W_1(\tau)=\mathbf{R_0}\left[\psi^1(\tau)-\int_\tau^\infty F_x(ds)PW_1(\tau-s)\right],$$

$$W_k(\tau)=\mathbf{R_0}\left[\psi^k(\tau)-\psi_0^k(\tau)-\int_\tau^\infty F_x(ds)PW_k(\tau-s)\right],\quad \tau\ge 0,\ k\ge 2.$$

5. Початкові умови. Регулярність граничних умов

Запишемо розклад $\Phi_{\varepsilon^2\tau}(u,x)$ у ряд Тейлора при $\tau<0$:

$$\varphi(u)=\Phi_{\varepsilon^2\tau}(u,x)\Big|_{\tau<0}=U_0(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\frac{\tau^k}{k!}U_0^{(k)}(0)+\varepsilon U_1(0)+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\frac{\tau^k}{k!}U_1^{(k)}(0)+\ldots+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kW_k(\tau).$$

Отже,

$$\begin{aligned}W^\varepsilon(\tau)&=W^\varepsilon(0)-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\frac{\tau^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0),\\ W_k(\tau)&=W_k(0)-\sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\tau^n}{n!}U_{k-2n}^{(n)}(0).\end{aligned}\tag{10}$$

Лема 5.1. *Для* $\tau=0$ *маємо*

$$Q[U^\varepsilon(0)+W^\varepsilon(0)]=0.$$

Доведення. Для доведення леми необхідно довести такі рівності:

$$QU^\varepsilon(0)=-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\mu_k(x)L_k\right)U^\varepsilon(0),$$

$$QW^\varepsilon(0)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\mu_k(x)L_k\right)U^\varepsilon(0).$$

Перша рівність є наслідком (7).

Підставимо (10) у рівняння (9) $\big(\mathbf{Q}(\tau)W(\tau):=\int_0^\tau F_x(ds)PW(\tau-s)\big)$:

$$(\mathbf{Q}(\tau)-I)W^\varepsilon(\tau)=-\int_\tau^\infty F_x(ds)P\left(W^\varepsilon(0)-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\frac{(\tau-s)^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0)\right)+$$

$$+\int_\tau^\infty \bar{F}_x(ds)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{V}^k(x)\right)PU_0(0)ds-$$

$$-\int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)\right)P\left(W^\varepsilon(0)-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k}\frac{(\tau-s)^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0)\right)=$$

$$
\begin{aligned}
=& - PW^\varepsilon(0) + \int_\tau^\infty F_x(ds)P\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{(\tau-s)^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0)\right) + \\
&+ \int_\tau^\infty \bar{F}_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}(\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right)PU_0(0)ds + \\
&+ \int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{s^k}{k!}(\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right)P(U^\varepsilon(0)-U_0(0)) + \\
&+ \int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{s^k}{k!}(\mathbb{V}^\varepsilon(x))^k\right)P\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{(\tau-s)^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0)\right).
\end{aligned}
$$

Якщо $\tau = 0$, то враховуючи початкову умову із зауваження 1.1

$$W^\varepsilon(0) = -U^\varepsilon(0) + \varphi(u) = -U^\varepsilon(0) + U_0(0),$$

а також рівності

$$\mathbf{Q}(0)W(0) = 0, \qquad \int_0^\infty F_x(ds)PW(0) = PW(0),$$

маємо

$$(P-I)W^\varepsilon(0) = \left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{2k}\frac{m_k(x)}{k!}L_k\right)U^\varepsilon(0).$$

Рівність для $QW^\varepsilon(0)$ випливає з останнього співвідношення. Лему доведено. $\square$

Наслідок 5.1.

$$(I-P)[U^\varepsilon(0) + W^\varepsilon(0)] = 0,$$

або, що те саме,

$$(I-\Pi)[U_k(0) + W_k(0)] = 0.$$

Таким чином, ми бачимо, що у просторі значень оператора Q регулярна та сингулярна частини розв'язку забезпечують виконання початкової умови із зауваження 1.1.

У той же час у підпросторі нулів оператора Q початкові умови для регулярних членів визначаються значеннями початкових умов для «пограничних шарів», тобто маємо таке твердження.

Наслідок 5.2. $c_k(0,u) = -\Pi W_k(0)$, $k \geq 1$.

Доведення. Очевидно, $\Pi[W_k(0) + U_k(0)] = \Pi W_k(0) + c_k(0,u) = 0$. $\square$

Наслідок 5.3. *Сингулярні члени асимптотики мають такий явний вигляд:*

$$
\begin{aligned}
W_1(\tau) &= \mathbf{R_0}\left[\psi^1(\tau) + \bar{F}_x(\tau)PU_1(0) + \int_\tau^\infty (\tau-s)F_x(ds)PU_0'(0)\right], \\
W_k(\tau) &= \mathbf{R_0}\left[\psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau) + \bar{F}_x(\tau)PU_k(0) + \sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\int_\tau^\infty \frac{(\tau-s)^n}{n!}F_x(ds)PU_{k-2n}^{(n)}(0)\right].
\end{aligned}
$$

Доведення. Скориставшись формулами (10) та наслідком 5.1, нескладно обчислити

$$\int_\tau^\infty F_x(ds)PW_k(\tau-s) = \int_\tau^\infty F_x(ds)P\left[-U_k(0) - \sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{(\tau-s)^n}{n!}U_{k-2n}^{(n)}(0)\right] =$$

$$= -\bar{F}_x(\tau)PU_k(0) - \sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \int_\tau^\infty \frac{(\tau-s)^n}{n!} F_x(ds)PU_{k-2n}^{(n)}(0). \quad \square$$

6. Початкові умови для регулярних членів

Враховуючи граничні умови (див. зауваження 1.1) при $\tau \to \infty$, запишемо алгоритм для знаходження початкових умов для регулярної частини розкладу при $\tau = 0$. Для першого сингулярного члена $W_1(\tau)$ маємо рівняння (див. (9)):

$$\int_0^\infty Q(ds)W_1(\tau - s) - W_1(\tau) = \bar{F}_x^{(1)}(\tau)\mathbb{V}(x)P\varphi(u), \tag{11}$$

де $\bar{F}_x^{(1)}(\tau) = \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s)ds$.

Розділивши перший інтеграл на дві частини, отримаємо рівняння:

$$\int_0^\tau Q(ds)W_1(\tau - s) - W_1(\tau) = \bar{F}^{(1)}(\tau)\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int_\tau^\infty Q(ds)W_1(\tau - s).$$

Згідно з теоремою відновлення [21] маємо при $\tau \to \infty$:

$$0 = W_1(\infty) = \left(\int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s)dsd\tau \mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \right.$$
$$\left. - \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty Q(ds)W_1(\tau - s)d\tau \right) / \widehat{m}, \tag{12}$$

де $\widehat{m} = \int \rho(dx)m_1(x)$.

При $\tau < 0$ маємо з (10):

$$W_1(\tau) = W_1(0). \tag{13}$$

Підставивши останній вираз у рівняння (12), отримаємо

$$\left(\int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty \bar{F}_x(s)dsd\tau \mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty Q(ds)W_1(0)d\tau \right) / \widehat{m} =$$
$$= \left(\int \rho(dx) \int_0^\infty \bar{F}_x^{(1)}(s)d\tau \mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty F_x(s)PW_1(0)dsd\tau \right) / \widehat{m} =$$
$$= \left(\int \rho(dx) \frac{m_2(x)}{2} \mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int \rho(dx)m_1(x)PW_1(0)\right) / \widehat{m} =$$
$$= \left(- \int \rho(dx)m_1(x)\mu_2(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int \rho(dx)m_1(x)(P - I)W_1(0) - \right.$$
$$\left. - \int \rho(dx)m_1(x)W_1(0)\right) / \widehat{m} =$$
$$= \left(- \int \rho(dx)m_1(x)\mu_2(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int \rho(dx)m_1(x)(P - I)W_1(0)\right) / \widehat{m} -$$
$$- c_1(0, u) = 0, \tag{14}$$

тут $\mu_2(x) = \frac{m_2(x)}{2m_1(x)}$.

Поклавши в (11) $\tau = 0$, дістанемо

$$\int_0^\infty Q(ds)W_1(-s) - W_1(0) = \int_0^\infty \bar{F}_x(s)ds\mathbb{V}(x)P\varphi(u).$$

Із (13) слідує $W_1(-s) = W_1(0)$. Підставимо цей вираз у попереднє співвідношення:

$$\int_0^\infty Q(ds)W_1(0) - W_1(0) = m_1(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u).$$

Таким чином, маємо

$$[P-I]W_1(0)=m_1(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u).$$

Підставивши цей вираз у (14), одержуємо остаточно

$$0=\left(-\int\rho(dx)m_1(x)\mu_2(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u)+\int\rho(dx)m_1^2(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u)\right)/\widehat{m}-c_1(0,u),$$

або

$$c_1(0,u)=\int\pi(dx)\nu_1(x)\mathbb{V}(x)P\varphi(u)/\widehat{m},$$

де $\pi(dx)=\rho(dx)m_1(x),\nu_1(x)=m_1(x)-\mu_2(x)=\frac{2m_1^2(x)-m_2(x)}{2m_1(x)}$.

Зауваження 6.1. Відомо, що $\nu_1(x)=0$, коли $F_x(t)$ має показниковий розподіл. У цьому випадку, очевидно, маємо

$$c_1(0,u)=0.$$

Алгоритм для наступних членів асимптотики наведемо на прикладі $W_2(\tau)$.

$$\int_0^\infty Q(ds)W_2(\tau-s)-W_2(\tau)=\bar{F}_x^{(2)}(\tau)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int_0^\infty\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s),\tag{15}$$

де $\bar{F}^{(2)}(\tau)=\int_\tau^\infty s\bar{F}_x(s)ds$.

Розділивши перший інтеграл на дві частини, отримаємо рівняння

$$\int_0^\tau Q(ds)W_2(\tau-s)-W_2(\tau)=$$
$$=\bar{F}^{(2)}(\tau)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int_0^\infty\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)-\int_\tau^\infty Q(ds)W_2(\tau-s).$$

Згідно з теоремою відновлення [21] маємо при $\tau\to\infty$:

$$\begin{aligned}0=W_2(\infty)=\Bigg(&\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty s\bar{F}_x(s)dsd\tau\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\\&-\int\rho(dx)\int_0^\infty\Bigg[\int_0^\tau\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau+\\&+\int_\tau^\infty\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau\Bigg]-\\&-\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)W_2(\tau-s)d\tau\Bigg)/\widehat{m}.\end{aligned}\tag{16}$$

При $\tau<0$ маємо з (10):

$$W_2(\tau)=W_2(0)-\tau U_0'(0).\tag{17}$$

Підставивши останній вираз у рівняння (16), отримаємо

$$\begin{aligned}\Bigg(&\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty s\bar{F}_x(s)dsd\tau\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\\&-\int\rho(dx)\int_0^\infty\left[\int_0^\tau\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau+\int_\tau^\infty\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(0)\right]-\\&-\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)[W_2(0)-(\tau-s)U_1'(0)]d\tau\Bigg)/\widehat{m}=\\=\Bigg(&\int\rho(dx)\frac{m_3(x)}{3!}\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau\frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau-\\&-\int\rho(dx)\frac{m_2(x)}{2!}\mathbb{V}(x)PW_1(0)-\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)W_2(0)d\tau+\end{aligned}$$

$$+\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)(\tau-s)U_1'(0)d\tau\Big)/\widehat{m}=$$

$$=\Big(\int \rho(dx)\frac{m_3(x)}{3!}\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau+$$

$$+\int \rho(dx)\frac{m_2(x)}{2!}\mathbb{V}(x)PW_1(0)-\int \rho(dx)m(x)[P-I]W_2(0)-$$

$$-\int \rho(dx)m_1(x)U_2(0)-\int \rho(dx)\frac{m_2(x)}{2!}PU_1'(0)\Big)/\widehat{m}=$$

$$=\Big(-\int \rho(dx)m_1(x)\mu_2(x)\left(\mathbb{V}(x)PU_1(0)-PU_1'(0)\right)-$$

$$-\int \rho(dx)m_1(x)\mu_3(x)\mathbb{V}^2(x)PU_0(0)-\int \rho(dx)m_1(x)(P-I)W_2(0)-$$

$$-\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau\Big)/\widehat{m}-c_2(0,u)=0. \tag{18}$$

Поклавши в (15) $\tau=0$, отримаємо

$$\int_0^\infty Q(ds)W_2(-s)-W_2(0)=m_2(x)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(-s),$$

звідки маємо

$$\int_0^\infty Q(ds)[W_2(0)+sU_1'(0)]-W_2(0)=m_2(x)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(0).$$

Таким чином:

$$[P-I]W_2(0)=m_2(x)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)-m_1(x)PU_1'(0)+m_1(x)\mathbb{V}(x)PU_1(0)=$$
$$=m_2(x)\mathbb{V}^2(x)PU_0(0)-m_1(x)(\mathbb{V}(x)PU_1(0)-PU_1'(0)).$$

Підставивши цей вираз у (16), дістаємо остаточно

$$c_2(0,u)=\Big[\int \pi(dx)\nu_2(x)\mathbb{V}^2(x)PU_0(0)+\int \pi(dx)\nu_1(x)\left(\mathbb{V}(x)PU_1(0)-PU_1'(0)\right)-$$
$$-\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)d\tau\Big]/\widehat{m},$$

де $\nu_2(x)=\mu_3(x)-m_2(x)=\frac{m_3(x)-2m_1(x)m_2(x)}{3!m_1(x)}$.

Для наступних членів маємо аналогічно

$$c_k(0,u)=\Big[\sum_{r=0}^{k-1}\int \pi(dx)\nu_{k-r}(x)\widehat{L}_{k-r}(x)U_r(0)-$$
$$-\sum_{r=1}^{k-1}\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r(x)PW_{k-r}(\tau-s)d\tau\Big]/\widehat{m},$$

$$\nu_k(x)=(-1)^k[m_k(x)-\mu_{k+1}(x)],\qquad \widehat{L}_{k-1}(x)\coloneqq\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^nC_k^n\mathbb{V}^{k-n}(x)PU^{(n)}(t),$$
$$\widehat{L}_k(x)\coloneqq\mathbb{V}^k(x)P.$$

Список літератури

1. S. Albeverio, V. S. Koroliuk, and I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion of semi-Markov random evolutions*, Stochastics **81** (2009), no. 5, 343–356.
2. R. Griego and R. Hersh, *Random evolutions, Markov chains, and systems of partial differential equations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **62** (1969), 305–308.

3. R. Hersh, *Random evolutions: a survey of results and problems*, Rocky Mountain J. Math. **4** (1974), 443–477.
4. R. Hersh, *The birth of random evolutions*, Math. Intelligencer, **25** (2003), no. 1, 53–60.
5. R. Hersh and M. Pinsky, *Random evolutions are asymptotically Gaussian*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 33–44.
6. T. Hillen, *Transport Equations and Chemosensitive Movement*, Habilitation thesis, University of Tübingen, Tübingen, 2001.
7. V. S. Korolyuk, *Stochastic systems with averaging in the scheme of diffusion approximation*, Ukrainian Math. J. **57** (2005), no. 9, 1235–1252.
8. V. S. Korolyuk, *Boundary layer in asymptotic analysis for random walks*, Theory of Stoch. Process. **1–2** (1998), 25–36.
9. V. S. Korolyuk and V. V. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems*, Kluwer Acad. Publ., 1999.
10. V. S. Korolyuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific Publishers, 2005.
11. V. S. Korolyuk, I. P. Penev, and A. F. Turbin, *Asymptotic expansion for the distribution of absorption time of Markov chain*, Kibernetika **4** (1973), 133–135. (Russian)
12. V. S. Korolyuk and A. F. Turbin, *Mathematical Foundation of State Lumping of Large Systems*, Kluwer Acad. Publ., 1990.
13. V. S. Korolyuk and A. F. Turbin, *Semi-Markov Processes and Applications*, Naukova dumka, Kiev, 1976. (Russian)
14. H. J. Kushner, *Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory*, MIT Press, 1984.
15. H. G. Othmer and T. Hillen, *The diffusion limit of transport equations II: chemotaxis equations*, Siam J. Appl. Math. **62** (2002), no. 4, 1222–1250.
16. G .C. Papanicolaou, *Asymptotic analysis of transport processes*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 330–392.
17. G. C. Papanicolaou, *Probabilistic problems and methods in singular perturbations*, Rocky Mountain J. Math. **6** (1976), 653–673.
18. M. A. Pinsky, *Lectures on Random Evolutions*, World Scientific, 1991.
19. A. A. Pogorui and R. M. Rodriguez-Dagnino, *Asymptotic expansion for transport processes in semi-Markov media*, Theory Probab. Math. Statist. **83** (2011), 127–134.
20. I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion for the functional of Markovian evolution in R^d in the circuit of diffusion approximation*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. **3** (2005), 247–258.
21. V. M. Shurenkov, *Ergodic Markov Processes*, Nauka, Moscow, 1989. (Russian)
22. D. Silvestrov and S. Silvestrov, *Asymptotic expansions for stationary distributions of perturbed semi-Markov processes. I, II. Part I*, arXiv:1603.04734, 2016.
23. A. V. Skorokhod, F. C. Hoppensteadt, and H. Salehi, *Random Perturbation Methods with Applications in Science and Engineering*, Springer, New York, 2002.
24. A. Tajiev, *Asymptotic expansion for the distribution of absorption time of semi-Markov process*, Ukrain. Mat. Zh. **30** (1978), 422–426. (Russian)
25. A. B. Vasiljeva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations*, Vysshaja shkola, Moscow, 1990. (Russian)
26. G. G. Yin and Q. Zhang, *Continuous-Time Markov Chains and Applications: a Singular Perturbation Approach*, Springer, 1998.
27. Y. Zhang, D. Subbaram Naidu, C. Cai, and Y. Zou, *Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002-2012*, Int. J. Inf. Syst. Sci. **9** (2014), no. 1, 1–36.

Інститут математики, Національна академія наук України, вул. Терещенківська, 3, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: vskorol@yahoo.com

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: isamoil@i.ua

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2017

ASYMPTOTIC EXPANSION FOR A FUNCTIONAL OF SEMI-MARKOV RANDOM EVOLUTION IN DIFFUSION APPROXIMATION SCHEME

V. S. KOROLIUK, I. V. SAMOILENKO

Abstract. Regular and singular parts of asymptotic expansion for a functional of semi-Markov random evolution are given. Regularity of boundary conditions is shown. An obvious algorithm for calculation of initial conditions for $t = 0$ is proposed with the use of boundary conditions for the singular part of the expansion.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ОТ ПОЛУМАРКОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ В СХЕМЕ ДИФФУЗИОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В. С. КОРОЛЮК, И. В. САМОЙЛЕНКО

Аннотация. В работе найдены регулярная и сингулярная части разложения функционала от полумарковской случайной эволюции, показана регулярность граничных условий. Кроме того, с использованием граничных условий для сингулярной части разложения, предложен алгоритм для поиска начальных условий при $t = 0$ в явном виде.