Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 109–119

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 109–119

БАГАТОКАНАЛЬНІ МЕРЕЖІ ЗІ ВЗАЄМОЗАЛЕЖНИМИ ВХІДНИМИ ПОТОКАМИ У ПЕРЕВАНТАЖЕНОМУ РЕЖИМІ

Є. О. ЛЕБЄДЄВ, О. А. ЧЕЧЕЛЬНИЦЬКИЙ, Г. В. ЛІВІНСЬКА

Анотація. Розглядається процес обслуговування в багатоканальних стохастичних мережах зі взаємозалежними вхідними потоками. Такі моделі можуть бути використані в комп'ютерних мережах та мережах зв'язку, у медицині та фізиці високих енергій. При виконанні вимог критичного навантаження доведені теореми типу дифузійної апроксимації. Локальні характеристики дифузійного процесу виписані через параметри мережі.

Ключові слова і фрази. Багатоканальна мережа, багатовимірний пуассонівський вхідний потік, дифузійна апроксимація, рівномірна топологія.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60K25, 90B15.

1. Вступ

Сучасні інформаційно-телекомунікаційні мережі стають усе складнішими, що обумовлено необхідністю підвищення надійності, швидкості передачі та обробки інформації, широким розгалудженням мережі. Методи теорії випадкових процесів є ефективним інструментом аналізу для мереж передачі інформації, комп'ютерних мереж, систем колективного доступу. Вони дають можливість оцінити потужність мережі, знайти резерви навантаження, оптимальним чином керувати інформаційними потоками. Можна також підбирати об'єми буферної пам'яті для обслуговуючих вузлів у випадку комутації пакетів у мережі (див., наприклад, [1]).

Адекватними моделями процесів у реальних мережах служать стохастичні мережі або мережі масового обслуговування. Структура цих процесів задається ймовірнісними характеристиками вхідних потоків, алгоритмами обслуговування і схемами комутації пакетів. Процес обслуговування вимог у стохастичній мережі, який є об'єктом нашого дослідження, представляє собою вектор великої розмірності, який визначається складною системою стохастичних співвідношень. У попередніх роботах, зазвичай, розглядалися мережі з незалежними вхідними потоками (див. [2, 3], а також [4, 5]). Взаємозалежність компонент процесу обслуговування була зумовлена перетином траєкторій вимог у процесі їх обслуговування у вузлах мережі. У цій роботі ми знімаємо це припущення, що приводить до ускладнення моделей.

З урахуванням складності моделей для вивчення багатовимірного процесу обслуговування обрано метод функціональних граничних теорем. Цей підхід дає можливість знайти базові характеристики процесу обслуговування, побудувати відповідний апроксимуючий процес та підрахувати розподіли важливих функціоналів, що оцінюють ефективність обслуговування.

У другому розділі розглядається модель мережі паралельної структури, кожен вузол якої є багатоканальною системою масового обслуговування. На вхід мережі надходять два типи вхідних пуассонівських потоків вимог: автономні потоки (свій потік на кожен вузол) та спільний потік, в якому вимоги надходять пакетами. Розмір пакету дорівнює числу вузлів і вимоги з пакету одночасно надходять для паралельного обслуговування в кожний вузол. Потоки вимог такого типу розглядались у роботах [6, 7].

Для цієї моделі за умов перевантаження вивчено багатовимірний процес обслуговування у перехідному режимі. Доведено збіжність у рівномірній топології нормованого процесу обслуговування до дифузійного процесу.

У розділах 3 та 4 розглядається більш складна модель типу $[G|M|\infty]^r$ для багатоканальних стохастичних мереж. На структуру вхідного потоку не накладається жодних обмежень. Час обслуговування у вузлах мережі має показниковий розподіл. Рух вимоги всередині мережі задається матрицею маршрутизації.

За умов виконання функціональної центральної граничної теореми для багатовимірного вхідного потоку і малої інтенсивності обслуговування у кожному вузлі у розділі 3 доведено збіжність у рівномірній топології нормованого процесу обслуговування до гауссівського процесу. Граничний процес є сумою двох незалежних гауссівських процесів, кожен з яких має свою інтерпретацію в термінах мережі. Показано, що сумарний гауссівський процес є багатовимірною дифузією.

У розділі 4 $[G|M|\infty]^r$-мережа досліджується у квазістаціонарному режимі: на доданок до критичного навантаження стартове завантаження мережі є асимптотично великим. Спираючись на основну граничну теорему з розділу 3, доведено збіжність нормованого процесу обслуговування до багатовимірного процесу Орнштейна – Уленбека.

2. Багатоканальна мережа масового обслуговування з багатовимірним пуассонівським вхідним потоком

Розглянемо модель, яка складається з r вузлів $E_1, \ldots, E_r$. Кожен вузол функціонує як система масового обслуговування типу $M/M/\infty$. Це означає, що на вузол E_i іззовні надходить пуассонівський потік вимог (інтервали між моментами надходження показниково розподілені) $y_i(t)$ із параметром $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. У момент надходження вимога з $y_i(t)$ негайно займає один з обслуговуючих приладів. Зазначимо, що кожен вузол має необмежену кількість приладів. Відповідно час обслуговування у вузлі E_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, має експоненціальний розподіл із параметром $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Кожна вимога обслуговується тільки в одному вузлі і після завершення обслуговування залишає мережу. Додатково в мережу надходить пуассонівський потік $y(t)$ пакетів вимог інтенсивності $b > 0$. Пакет складається з r вимог, які одночасно надходять на r вузлів для паралельного обслуговування.

Відповідно до описаного вище алгоритму надходження вимог вхідний потік на обслуговуючі вузли системи буде багатовимірним пуассонівським потоком $\big(\nu_1(t), \ldots, \nu_r(t)\big)$ із параметрами $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $b > 0$. Компонента $\nu_i(t)$ має наступне подання: $\nu_i(t) = y_i(t) + y(t)$. Такі моделі можуть бути використані при плануванні роботи сучасних комп'ютерних мереж. Це дозволяє підвищувати швидкість обробки інформації й істотно зберегти час.

Позначимо через $\mathcal{Q}(t) = \big(\mathcal{Q}_1(t), \ldots, \mathcal{Q}_r(t)\big)'$, $t \in [0, T]$, кількість вимог у вузлах нашої мережі у момент часу t. Ми вивчимо перехідний режим багатовимірного процесу обслуговування $\mathcal{Q}(t)$ в умовах перевантаження. Це означає, що параметри показникового розподілу часу обслуговування $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, у нашій моделі залежать від номера серії n ($\mu_i = \mu_i(n)$) і при $n \to +\infty$ справедлива така умова:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu_i(n) = \mu_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$

Позначимо через $\mathcal{Q}^{(n)}(nt) = \left(\mathcal{Q}_1^{(n)}(nt), \ldots, \mathcal{Q}_r^{(n)}(nt)\right)'$, $t \in [0, T]$, кількість вимог у вузлах нашої мережі у зміненому масштабі часу nt. Ми також вважаємо, що у початковий момент часу мережа порожня, тобто

(б) $\mathcal{Q}_i^{(n)}(0) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, r.$

Для нормованого процесу обслуговування

$$\xi^{(n)}(t) = \Big(\xi_1^{(n)}(t), \dots, \xi_r^{(n)}(t)\Big)' = n^{-1/2}\Big(\mathcal{Q}^{(n)}(nt) - \alpha(t)n\Big),$$

де $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t))'$, $\alpha_i(t) = (\lambda_i + b)(1 - e^{-\mu_i t})$, $i = 1, 2, \dots, r$, ми доведемо збіжність у рівномірній топології до дифузійного процесу.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (а) і (б). Тоді послідовність процесів* $\xi^{(n)}(t) = \big(\xi_1^{(n)}(t), \dots, \xi_r^{(n)}(t)\big)'$ *збігається у рівномірній топології на будь-якому інтервалі* $[0, T]$ *до дифузійного процесу* $\xi(t)$ $\big(\xi(0) = \xi_0 = (0, \dots, 0)'\big)$, *із вектором перенесення* $\alpha(x) = \big(\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x)\big)' = \big(-\mu_1 x_1, \dots, -\mu_r x_r\big)'$ *і матрицею дифузії:*

$$B = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + b)(2 - e^{-\mu_1 t}) & b & \dots & b \\ b & (\lambda_2 + b)(2 - e^{-\mu_2 t}) & b & b \\ \vdots & b & \ddots & b \\ b & \dots & b & (\lambda_r + b)(2 - e^{-\mu_r t}) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Дослідження перевантаженого режиму роботи систем обслуговування має тривалу історію й існує декілька підходів, що орієнтовані на різні класи систем. Ми доведемо теорему, використовуючи локальний підхід, який найбільш зручний у випадку нашої моделі. Обґрунтування цього підходу містить робота [8]. Згідно з локальним підходом скінченновимірні розподіли процесу $\xi^{(n)}(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів дифузійного процесу $\xi(t)$ із вектором перенесення $\alpha(x)$ і матрицею дифузії B, якщо виконуються наступні умови:

$$\xi^{(n)}(0) \overset{d}{\Rightarrow} \xi_0, \ \ n \to +\infty,$$

$$\delta_1(n) = \sum_{k=0}^{d_n - 1} \mathsf{E}\Big|\mathsf{E}\{\Delta\xi_{n_k} \mid F_{n_k}\} - \alpha\big(\xi_{n_k}\big)\Delta t_{n_k}\Big| \to 0, \ \ n \to +\infty,$$

$$\delta_2(n) = \sum_{k=0}^{d_n - 1} \mathsf{E}\Big|\mathsf{E}\Big\{\big(\Delta\xi_{n_k}, z\big)^2 \ \Big|\ F_{n_k}\Big\} - \big(Bz, z\big)\Delta t_{n_k}\Big| \to 0, \ n \to +\infty, \ z \in \mathbb{R}^r,$$

$$\delta_3(n) = \sum_{k=0}^{d_n - 1} \mathsf{P}\big\{\big|\Delta\xi_{n_k}\big| \geq \varepsilon\big\} \to 0, \ \ n \to +\infty, \ \ \text{для будь-якого} \ \ \varepsilon > 0 \ \ \text{і} \ \ z \in \mathbb{R}^r,$$

де $\overset{d}{\Rightarrow}$ — слабка збіжність випадкових векторів, $\Delta\xi_{n_k} = \xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}$, $\xi_{n_k} = \xi^{(n)}(t_{n_k})$, $\{t_{n_k}, k = 0, 1, \dots, d_n\}$ представляє собою послідовність розбиттів інтервалу $[0, T]$ точками $0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{d_n}} = T$, $\max \Delta t_{n_k} \to 0$, $F_{n_k} = F(t_{n_k})$, $\{F_n(t), t \in [0, T]\}$ — послідовність сімей монотонно зростаючих σ-алгебр ($F_n(t_1) \subseteq F_n(t_2)$, якщо $t_1 < t_2$), породжених $\xi^{(n)}(u)$, $u \leq t$.

Для спрощення записів збіжність будемо доводити на одиничному інтервалі: $[0, T] = [0, 1]$. Покладемо, що $t_{n_k} = \frac{k}{d_n}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, d_n$, де $d_n \to \infty$, $n \to \infty$, така послідовність натуральних чисел, що $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n} = 0$; σ-алгебра $F_n(t)$ породжена сім'єю випадкових величин $\big\{\xi^{(n)}(\tau), \tau \leq t\big\}$. Тоді для процесу $\mathcal{Q}^{(n)}(nt) = \Big(\mathcal{Q}_1^{(n)}(nt), \dots, \mathcal{Q}_r^{(n)}(nt)\Big)'$ вказані вище умови можуть бути записані у такому вигляді:

$$\xi_n(0) \overset{d}{\Rightarrow} \xi_0, \ n \to \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{d_n - 1} \mathsf{E}\Big|\mathsf{E}\Big\{\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k}) \ \Big|\ F_{n_k}\Big\} + \mu_i \xi_i^{(n)}(t_{n_k})\Delta t_{n_k}\Big| \to 0, \ n \to +\infty, \ i = 1, 2, \dots, r, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} \mathsf{E}\Big|\mathsf{E}\Big\{\Big(\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k})\Big)^2 \;\Big|\; F_{n_k}\Big\} - (\lambda_i + b)(2 - e^{-\mu_i t})\Delta t_{n_k}\Big| \to 0, \quad n \to +\infty,\ i = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} \mathsf{E}\Big|\mathsf{E}\Big\{\Big(\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k})\Delta\xi_j^{(n)}(t_{n_k})\Big) \;\Big|\; F_{n_k}\Big\} - b\Delta t_{n_k}\Big| \to 0,\ n \to +\infty,\ i \neq j, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{d_n-1} \mathsf{P}\big\{\big|\Delta\xi_{n_k}\big| \geq \varepsilon\big\} \to 0,\ n \to +\infty,\ \text{для будь-якого } \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Оскільки $\Big(\xi_1^{(n)}(0), \ldots, \xi_r^{(n)}(0)\Big) = (0, \ldots, 0)$, то умова (1) виконується для $\Big(\xi_1^{(0)}(0), \ldots, \xi_r^{(0)}(0)\Big) = (0, \ldots, 0)$. Умови (2)–(4) означають, що процес $\xi^{(n)}(t)$ збігається до дифузійного процесу, якщо його локальні характеристики асимптотично близькі до відповідних характеристик дифузійного процесу.

Для того, щоб перевірити умови (2)–(4), ми повинні обчислити умовні математичні сподівання

$$\mathsf{E}\Big\{\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k}) \;\Big|\; F_{n_k}\Big\}, \quad \mathsf{E}\Big\{\Big(\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k})\Big)^2 \;\Big|\; F_{n_k}\Big\}, \quad \mathsf{E}\Big\{\Big(\Delta\xi_i^{(n)}(t_{n_k})\Delta\xi_j^{(n)}(t_{n_k})\Big) \;\Big|\; F_{n_k}\Big\},$$
$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Враховуючи вид нормованого процесу, ми зможемо знайти вказані вище умовні математичні сподівання, якщо обчислимо наступні умовні математичні сподівання для процесу $\mathcal{Q}(t)$:

$$\mathsf{E}\{\mathcal{Q}_i(t) \mid \mathcal{Q}_i(0) = m_i\}, \quad \mathsf{E}\big\{\mathcal{Q}_i(t)^2 \mid \mathcal{Q}_i(0) = m_i\big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r\ ;$$
$$\mathsf{E}\{\mathcal{Q}_i(t)\mathcal{Q}_j(t) \mid \mathcal{Q}_i(0) = m_i, \mathcal{Q}_j(0) = m_j\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r.$$

У першу чергу отримаємо явний вираз для генератриси

$$\varphi(z_i, z_j, t) = M\Big\{z_i^{\mathcal{Q}_i(t)} z_j^{\mathcal{Q}_j(t)} \;\Big|\; \mathcal{Q}_i(0) = m_i, \mathcal{Q}_j(0) = m_j\Big\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Щоб розв'язати цю задачу, ми використаємо метод, який базується на конструктивному поданні компонент $(\mathcal{Q}_i(t), \mathcal{Q}_j(t))$ як суми випадкових індикаторів уздовж траєкторій вхідних пуассонівських потоків. Кожен індикатор описує процес обслуговування окремих вимог, що надійшли у систему.

Ми введемо три сім'ї незалежних двовимірних випадкових векторів $\big\{\chi_k^i(t)\big\}_{k=1}^{\infty}$, $\Big\{\chi_k^j(t)\Big\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\chi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, розподіл яких не залежить від індексу k. Двовимірний випадковий вектор $\chi_k^i(t)$ набуває значення $(1,0)$ з імовірністю $e^{-\mu_i t}$ і значення $(0,0)$ з імовірністю $1 - e^{-\mu_i t}$. Випадковий вектор $\chi_k^j(t)$ набуває значення $(0,1)$ з імовірністю $e^{-\mu_j t}$ і значення $(0,0)$ з імовірністю $1 - e^{-\mu_j t}$.

Нарешті випадковий вектор $\chi_k(t)$ набуває значення $(1,1)$ з імовірністю $e^{-(\mu_i+\mu_j)}t$, значення $(1,0)$ з імовірністю $e^{-\mu_i t}\big(1 - e^{\mu_j t}\big)$, значення $(0,1)$ з імовірністю $e^{-\mu_j t}\big(1 - e^{\mu_i t}\big)$ і значення $(0,0)$ з імовірністю $\big(1 - e^{\mu_i t}\big)\big(1 - e^{\mu_j t}\big)$. Тоді для i-ї і j-ї компонент процесу обслуговування справедливе наступне подання:

$$\big(\mathcal{Q}_i(t), \mathcal{Q}_j(t)\big) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{m_i} \chi_k^i(t) + \sum_{k=1}^{m_j} \chi_k^j(t) + \sum_{k=1}^{y_i(t)} \chi_k^i\big(t - t_k^i\big) + \sum_{k=1}^{y_j(t)} \chi_k^j\big(t - t_k^j\big) + \sum_{k=1}^{y(t)} \chi_k\big(t - t_k\big),$$

де $\stackrel{d}{=}$ означає рівність умовних розподілів при фіксованих m_i, m_j, t_k^i, t_k^j, t_k, $k = 1, 2, \ldots$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$ — послідовні моменти надходження вимог із незалежних пуассонівських потоків $y_i(t)$, $y_j(t)$, $y(t)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$.

Використовуючи властивості умовних математичних сподівань, ми знаходимо

$$\varphi(z_i, z_j, t) = \left(1 - e^{-\mu_i t} + z_i e^{-\mu_i t}\right)^{m_i} \left(1 - e^{-\mu_j t} + z_j e^{-\mu_j t}\right)^{m_j} \times$$
$$\times \mathsf{E}\left\{ \prod_{k=1}^{y_i(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu_i (t - t_k^i)}\right) + z_i e^{-\mu_i (t - t_k^i)} \right) \prod_{k=1}^{y_j(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k^j)}\right) + z_j e^{-\mu_j (t - t_k^j)} \right) \times \right.$$
$$\times \prod_{k=1}^{y(t)} \left\{ \left(1 - e^{-\mu_i (t - t_k)}\right)\left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k)}\right) + z_i e^{-\mu_i (t - t_k)} \left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k)}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + z_j e^{-\mu_j (t - t_k)} \left(1 - e^{-\mu_i (t - t_k)}\right) + z_i z_j e^{-(\mu_i + \mu_j)(t - t_k)} \right\} \right\}.$$

Для того, щоб з останнього виразу отримати явний вид генератриси, ми перепишемо його як умовне математичне сподівання відносно $y_i(t)$, $y_j(t)$ і $y(t)$:

$$\varphi(z_i, z_j, t) = \left(1 - e^{-\mu_i t} + z_i e^{-\mu_i t}\right)^{m_i} \left(1 - e^{-\mu_j t} + z_j e^{-\mu_j t}\right)^{m_j} \times$$
$$\times \mathsf{E}\left\{ \mathsf{E}\left\{ \prod_{k=1}^{y_i(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu_i t}\right) + z_i e^{-\mu_i (t - t_k^i)} \right) \prod_{k=1}^{y_j(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k^j)}\right) + z_j e^{-\mu_j (t - t_k^j)} \right) \times \right.\right.$$
$$\times \prod_{k=1}^{y(t)} \left\{ \left(1 - e^{-\mu_i (t - t_k)}\right)\left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k)}\right) + z_i e^{-\mu_i (t - t_k)} \left(1 - e^{-\mu_j (t - t_k)}\right) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + z_j e^{-\mu_j (t - t_k)} \left(1 - e^{-\mu_i (t - t_k)}\right) + z_i z_j e^{-(\mu_i + \mu_j)(t - t_k)} \right\} \,\right|\, y_i(t),\, y_j(t),\, y(t) \right\} \right\}.$$

Із теорії випадкових потоків вимог відомо, що при фіксованій кількості стрибків пуассонівського потоку моменти стрибків розподілені як порядкові статистики з рівномірного на інтервалі $[0, t]$ розподілу. Ця властивість пуассонівського потоку дає можливість отримати явний вид генератриси $\left(\mathcal{Q}_i(t),\ \mathcal{Q}_j(t)\right)$:

$$\varphi(z_i, z_j, t) = \left(1 - e^{-\mu_i t} + z_i e^{-\mu_i t}\right)^{m_i} \left(1 - e^{-\mu_j t} + z_j e^{-\mu_j t}\right)^{m_j} \times$$
$$\times \mathsf{E}\left\{A_1(z_i, t)\right\}^{y_i(t)} \mathsf{E}\left\{A_2(z_j, t)\right\}^{y_j(t)} \mathsf{E}\left\{A_3(z_i, z_j, t)\right\}^{y(t)}.$$

Генератриси $A_1(z_i, t)$, $A_2(z_j, t)$, $A_3(z_i, z_j, t)$ мають таке подання:

$$A_1(z_i, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - e^{-\mu_i (t - u)} + z_i e^{-\mu_i (t - u)}\right) du;$$

$$A_2(z_j, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - e^{-\mu_j (t - u)} + z_j e^{-\mu_j (t - u)}\right) du;$$

$$A_3(z_i, z_j, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \Big(1 - \left(e^{-\mu_i (t - u)} - e^{-(\mu_i + \mu_j)(t - u)}\right)(1 - z_i) -$$
$$- \left(e^{-\mu_j (t - u)} - e^{-(\mu_i + \mu_j)(t - u)}\right)(1 - z_j) - e^{-(\mu_i + \mu_j)(t - u)}(1 - z_i z_j)\Big) du.$$

Зазначимо, що в останніх виразах для $A_1(z_i, t)$, $A_2(z_j, t)$ *і* $A_3(z_i, z_j, t)$ множник $\frac{1}{t}$ представляє собою щільність рівномірного розподілу на інтервалі $[0, t]$. Остаточно генератриси $A_1(z_i, t)$, $A_2(z_j, t)$ і $A_3(z_i, z_j, t)$ можуть бути записані у вигляді:

$$A_1(z_i, t) = 1 - \frac{1}{\mu_i t}\left(1 - e^{-\mu_i t}\right)(1 - z_i);$$

$$A_2(z_j,t) = 1 - \frac{1}{\mu_j t}\bigl(1-e^{-\mu_j t}\bigr)(1-z_j);$$

$$A_3(z_i,z_j,t) = 1 - \left(\frac{1}{\mu_i t}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr) - \frac{1}{(\mu_i+\mu_j)t}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr)\right)(1-z_i) - \\ - \left(\frac{1}{\mu_j t}\bigl(1-e^{-\mu_j t}\bigr) - \frac{1}{(\mu_i+\mu_j)t}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr)\right)(1-z_j) - \\ - \left(\frac{1}{(\mu_i+\mu_j)t}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr)\right)(1-z_iz_j).$$

Підставляючи ці вирази у $\varphi(z_i,z_j,t)$, ми приходимо до явного виразу для генератриси:

$$\varphi(z_i,z_j,t) = \bigl(1-e^{-\mu_i t}+z_ie^{-\mu_i t}\bigr)^{m_i}\bigl(1-e^{-\mu_j t}+z_je^{-\mu_j t}\bigr)^{m_j} \times \\ \times \exp\Bigl\{-\Bigl(\frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr) - \frac{b}{\mu_i+\mu_j}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr)\Bigr)(1-z_i) - \\ -\Bigl(\frac{\lambda_j+b}{\mu_j}\bigl(1-e^{-\mu_j t}\bigr) - \frac{b}{\mu_i+\mu_j}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr)\Bigr)(1-z_j) - \\ -\frac{b}{\mu_i+\mu_j}\Bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\Bigr)(1-z_iz_j)\Bigr\}, \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,\ldots,r.$$

Шляхом диференціювання генератриси ми отримаємо умовні математичні сподівання:

$$\mathsf{E}\{\mathcal{Q}_i(t)\mid \mathcal{Q}_i(0)=m_i\} = m_ie^{-\mu_i t} + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr), \quad i=1,2,\ldots,r; \tag{6}$$

$$\mathsf{E}\bigl\{\mathcal{Q}_i(t)^2\mid \mathcal{Q}_i(0)=m_i\bigr\} = m_i(m_i-1)e^{-2\mu_i t} + 2m_ie^{-\mu_i t}\frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr) + \\ + \frac{(\lambda_i+b)^2}{\mu_i^2}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr)^2 + m_ie^{-\mu_i t} + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr), \quad i=1,2,\ldots,r\ ; \tag{7}$$

$$\mathsf{E}\{\mathcal{Q}_i(t)\mathcal{Q}_j(t)\mid \mathcal{Q}_i(0)=m_i, \mathcal{Q}_j(0)=m_j\} = m_je^{-\mu_j t}\left\{m_ie^{-\mu_i t} + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr)\right\} + \\ + m_ie^{-\mu_i t}\frac{\lambda_j+b}{\mu_j}\bigl(1-e^{-\mu_j t}\bigr) + \frac{b}{\mu_i+\mu_j}\bigl(1-e^{-(\mu_i+\mu_j)t}\bigr) + \\ + \frac{(\lambda_i+b)(\lambda_j+b)}{\mu_i\mu_j}\bigl(1-e^{-\mu_i t}\bigr)\bigl(1-e^{-\mu_j t}\bigr), \quad i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,r. \tag{8}$$

Тепер ми можемо перевірити умови (2)–(4) для послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$. У першу чергу використаємо вираз (6) для обчислення умовного математичного сподівання $\mathsf{E}\Bigl\{\xi^i_{n_{k+1}} - x \Bigm| \xi^i_{n_k} = x\Bigr\}$:

$$\mathsf{E}\Bigl\{\xi^i_{n_{k+1}} - x \Bigm| \xi^i_{n_k} = x\Bigr\} = \mathsf{E}\left\{\xi^i_{n_{k+1}} - x \mid \mathcal{Q}^n_i(nt_{nk}) = \sqrt{n}x + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t_{n_k}}\bigr)\right\} = \\ = n^{-1/2}\left\{\Bigl(\sqrt{n}x + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}\bigl(1-e^{-\mu_i t_{n_k}}\bigr)\Bigr)e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}} + \frac{\lambda_i+b}{\mu_i}n\bigl(1-e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}\bigr)\right\} - x = \\ = -x\bigl(1-e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}\bigr), \tag{9}$$

де $\xi^i_{n_k} = \xi^{(n)}_i(t_{n_k})$, $\xi^i_{n_{k+1}} = \xi^{(n)}_i(t_{n_{k+1}})$.

Крім цього із (7) в силу рівномірної обмеженості на інтервалі $[0,T]$ експоненційної функції і другого моменту розподілу Пуассона кількості вимог у вузлах мережі маємо рівномірну обмеженість другого моменту процесу $\xi^{(n)}(t)$:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\left|\xi^{(n)}(t)\right|^2 < L_0. \tag{10}$$

Використовуючи (9) і (10), ми отримаємо

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} \mathsf{E}\left|-\xi^i_{n_k}\left(1-e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}\right)+\mu_i\xi^i_{n_k}\Delta t_{n_k}\right| =$$
$$= \sum_{k=0}^{d_n-1} \mathsf{E}\left|\xi^i_{n_k}\right|\left(e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}-1+\mu_i\Delta t_{n_k}\right) \le \sum_{k=0}^{d_n-1}\sqrt{\mathsf{E}\left(\xi^i_{n_k}\right)^2}\left(e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}-1+\mu_i\Delta t_{n_k}\right) \le$$
$$\le \sqrt{L_0}\sum_{k=0}^{d_n-1}\left(e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}-1+\mu_i\Delta t_{n_k}\right) = \sqrt{L_0}\,d_n\left(e^{-\mu_i\frac{1}{d_n}}-1+\mu_i\frac{1}{d_n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Остання оцінка доводить справедливість умови (2) для $\xi^{(n)}(t)$. Аналогічно, використовуючи явний вигляд (7), (8) для моментів другого порядку, можна перевірити справедливість умов (3) і (4).

Збіжність у рівномірній топології процесу $\xi^{(n)}(t)$ для мережі доводиться аналогічно випадку однієї системи $M/M/\infty$ [12, с. 158]. Це випливає з того, що

$$\mathsf{P}\left\{\left|\xi^{(n)}(t)-\xi^{(n)}(t_1)\right|\ge\varepsilon,\ \left|\xi^{(n)}(t)-\xi^{(n)}(t_2)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^{2r}}\left(H(t_2)-H(t_1)\right)^{2\alpha} \tag{11}$$

для $t_1\le t\le t_2$, $t_1,t_2,t\in[0,T]$, $n\ge1$, $\gamma=2$, $\alpha=\frac{3}{4}$, $\varepsilon>0$ і $H(t)=ct$.

Теорему 1 доведено. □

Ця теорема дозволяє при обчисленні функціоналів від складного стрибкоподібного процесу обслуговування (наприклад, при обчисленні загального прибутку, пов'язаного з обслуговуванням вимог у мережі) використовувати функціонали від дифузійного процесу.

3. Мережі типу $[G|M|\infty]^r$. Перехідний режим

У цьому розділі ми розглянемо більш складні моделі багатоканальних мереж. Мережа складається з r обслуговуючих вузлів. Іззовні на i-й вузол вимоги надходять у моменти часу $\tau^{(i)}_k$, $k=1,2,\ldots$, $\nu_i(t)$ — загальна кількість вимог, що надійшли на проміжку часу $[0,t]$. Кожен з r вузлів представляє собою багатоканальну систему масового обслуговування. Якщо вимога надходить у таку систему, то зразу починається її обслуговування. Для вузла i час обслуговування має експоненціальний розподіл з параметром μ_i, $i=1,2,\ldots,r$. Напрямок руху вимоги всередині мережі задається матрицею маршрутизації $P=\|p_{ij}\|_1^r$. Для будь-якого $i=1,2,\ldots,r$ $p_{ir+1}=1-\sum\limits_{j=1}^{r}p_{ij}$ представляє собою ймовірність виходу з мережі вимоги, обслуговування якої завершилося в i-му вузлі.

Розглянемо процес обслуговування в $[G|M|\infty]^r$-мережі як r-вимірний процес $Q'(t)=(Q_1(t),\ldots,Q_r(t))$, $t\ge0$, де $Q_i(t)$ — кількість вимог в i-му вузлі у момент часу t.

Наша головна мета вивчити процес обслуговування $Q(t)$ у перевантаженому режимі. Перевантажений режим означає таке: параметри мережі залежать від n (номера серії) таким чином, що виконуються умови (а), (б) з попереднього розділу, і вхідний потік є близьким до броунівського руху, тобто справедлива така умова:

(в) Існують константи $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \neq 0$, такі, що

$$n^{-1/2}\Big(\nu_1^{(n)}(nt) - \lambda_1 nt, \ldots, \nu_r^{(n)}(nt) - \lambda_r nt\Big) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Longrightarrow}} W(t)' = \big(W_1(t), \ldots, W_r(t)\big),$$

де $W(t)$ є r-вимірним процесом броунівського руху з нульовим вектором середніх значень $\mathsf{E}\,W(1) = 0$ і кореляційною матрицею $\mathsf{E}\,W(1)W'(1) = \sigma^2 = \|\sigma_{ij}^2\|_1^r$, символ $\overset{U}{\Longrightarrow}$ означає слабку збіжність у рівномірній топології.

Інші параметри $[G|M|\infty]^r$-мережі не залежать від n.

У контексті умов (а)–(в) для відкритої $[G|M|\infty]^r$-мережі ми розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2}\big(Q^{(n)}(nt) - nq(t)\big),\ t \geq 0,$$

де $q'(t) = \big(q_1(t), \ldots, q_r(t)\big) = \big(\frac{\theta}{\mu}\big)'\big(I - P(t)\big)$, $\big(\theta/\mu\big)' = \big(\theta_1/\mu_1, \ldots, \theta_r/\mu_r\big)$, $\theta' = \big(\theta_1, \ldots, \theta_r\big) = \lambda'\big(I - P\big)^{-1}$ — розв'язок рівняння балансу для $[G|M|\infty]^r$-мережі, $\lambda' = \big(\lambda_1, \ldots, \lambda_r\big)$, $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_1^r = \exp[\Delta(\mu)(P - I)t]$, $\Delta(\mu) = \|\delta_{ij}\mu_i\|_1^r$ — діагональна матриця.

Щоб для послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ побудувати граничний процес, ми введемо два незалежні гауссівські процеси $\xi^{(1)'}(t) = \Big(\xi_1^{(1)}(t), \ldots, \xi_r^{(1)}(t)\Big)$ і $\xi^{(2)'}(t) = \Big(\xi_1^{(2)}(t), \ldots, \xi_r^{(2)}(t)\Big)$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ задається своїми середніми значеннями

$$\mathsf{E}\,\xi^{(1)}(t) = 0$$

і кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t) = \mathsf{E}\,\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)'}(t) - \mathsf{E}\,\xi^{(1)}(t)\,\mathsf{E}\,\xi^{(1)'}(t) = \int_0^1 P'(u)\sigma^2 P(u)du,$$

$$P^{(1)}(s,t) = \mathsf{E}\,\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)}(t) - \mathsf{E}\,\xi^{(1)}(s)\,\mathsf{E}\,\xi^{(1)'}(t) = R^{(1)}(s)P(t-s), \quad s > t.$$

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$\mathsf{E}\,\xi^{(2)}(t) = 0,$$

$$R^{(2)}(t) = \sum_{m=1}^{r} \lambda_m \int_0^1 \big(\Delta[p_m(u)] - p_m(u)p'_m(u)\big)du,$$

$$R^{(2)}(s,t) = R^{(2)}(s)P(t-s),\ \ s < t,$$

де $p'_m(u) = \big(p_{m1}(u), \ldots, p_{mr}(u)\big)$ — це m-й рядок матриці $P(u)$, а $\Delta[p_m(u)] = \|p_{mi}(u)\delta_{ij}\|_1^r$ — діагональна матриця.

Процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ описує асимптотичну поведінку послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$.

Теорема 2. *Нехай для стохастичної мережі типу $[G|M|\infty]^r$ виконуються умови (а)–(в) і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1. Тоді на будь-якому скінченному інтервалі $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ слабко збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ при $n \to \infty$.*

Доведення теореми у частині збіжності скінченновимірних розподілів є наслідком двох допоміжних тверджень.

Лема 1. *Скінченновимірні розподіли $\int_0^1 dW'(u)P(t-u)$ збігаються зі скінченновимірними розподілами гауссівського процесу $\xi^{(1)}(t)$.*

Цей результат є наслідком властивостей стохастичного інтеграла (див., наприклад, [9]).

Відзначимо, що траєкторія вимоги, що надійшла в $[G|M|\infty]^r$-мережу через m-й вузол, може бути описана ланцюгом Маркова $\eta^{(m)}(t) \in \{1, 2, \dots, r, r+1\}$, $t \geq 0$, який задається інфінітезимальною матрицею $\|q_{ij}\|_1^{r+1}$:

$$q_{ij} = \begin{cases} -\mu_i(1-p_{ii}), & i = j = 1, 2, \dots, r, \\ \mu_i p_{ij}, & i \neq j,\ i = 1, 2, \dots, r,\ j = 1, 2, \dots, r, r+1, \\ 0, & i = r+1, j = 1, 2, \dots, r, r+1. \end{cases}$$

Початковий розподіл збігається з $\mathsf{P}\big(\eta^{(m)}(0) = i\big) = \delta_{mi}$, $i = 1, 2, \dots, r+1$.

Ми зв'яжемо з ланцюгом $\eta^{(m)}(t)$ r-вимірний процес індикаторного типу $\chi^{(m)}(t) = \Big(\chi_1^{(m)}(t), \dots, \chi_r^{(m)}(t)\Big)'$, $t \geq 0$, $m = 1, \dots, r$, таким чином:

$$\chi^{(m)}(t) = \begin{cases} e_j, & \eta^{(m)}(t) = j,\ j = 1, \dots, r, \\ e_o, & \eta^{(m)}(t) = r+1, \end{cases}$$

де e_j — r-вимірний вектор, j-та компонента якого дорівнює 1, а інші дорівнюють 0; e_0 — нульовий r-вимірний вектор.

Для будь-якого натурального N і $z(j) = \big(z_1(j), \dots, z_r(j)\big)'$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\big|z(j)\big| \leq 1$, через $\Phi^{(m)} = \Phi^{(m)}\big(t_1, \dots, t_N, z(1), \dots, z(N)\big)$ будемо позначати сумісну генератрису векторів $\chi^{(m)}(t_1), \dots, \chi^{(m)}(t_N)$, $0 < t_1 < \ldots < t_N$, $\Phi = \big(\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(r)}\big)'$.

Лема 2. *Для будь-якого $N = 1, 2, \dots$ і $0 < t_1 < \ldots < t_N$*

$$\Phi = \overline{1} + \sum_{j=1}^{N} P(\Delta t_1)\Delta[z(1)] \dots P(\Delta t_{j-1})\Delta[z(j-1)]P(\Delta t_j)(z(j) - \overline{1}), \tag{12}$$

де $\overline{1}$ — r-вимірний вектор, складений з 1; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(t_0 = 0)$; $\Delta[z(i)] = \|z_k(i)\delta_{km}\|_1^r$ — діагональна матриця.

Доведення (12) можна отримати методом математичної індукції за параметром N.

Додатково до збіжності скінченновимірних розподілів можна довести, що для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}\big(\omega_\Delta(\xi^{(n)}) > \delta\big) = 0, \tag{13}$$

де $\omega_\Delta(x) = \sup_{\substack{|t-u|\leq\Delta \\ 0\leq t,u\leq T}} \big|x(t) - x(u)\big|$. Доведення (13) базується на умові (в) і поданні процесу обслуговування як суми $\chi^m(\cdot)$-індикаторів на траєкторії вхідного потоку.

Можна перевірити, що граничний гауссівський процес у теоремі 2 є дифузією. В одновимірному випадку для гауссівських процесів існує критерій у термінах "необхідно і достатньо" для перевірки марковської властивості [10, с. 115]. Головна умова критерію, яка виписана в термінах корреляцій, відповідає характеристичній властивості експоненціальної функції. Її досить зручно перевіряти на практиці. У багатовимірному випадку ситуація більш складна і відповідний критерій відсутній. У роботі [11] вказано один варіант достатніх умов марковської властивості для r-вимірних гауссівських процесів. Перевіряючи ці умови для граничного процесу з теореми 2, ми отримаємо такий результат.

Наслідок 1. *Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1, то граничний гауссівський процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ є r-вимірною дифузією з вектором перенсення $A(x) = Q'x$ і матрицею дифузії $B(t) = \Delta[q'(t)Q] - Q'\Delta[q(t)] - \Delta[q(t)]Q + \sigma^2$, де $Q = \Delta(\mu)(P - I)$, $\Delta(x)$ — діагональна матриця з вектором x на головній діагоналі.*

Таким чином, теорема 2 є основою дифузійної апроксимації. Проте її формулювання в термінах гауссівських процесів містить більше інформації про структуру граничного процесу. Перший доданок $\xi^{(1)}(t)$ пов'язаний із флуктуаціями вхідного потоку, а другий $\xi^{(2)}(t)$ "—- із флуктуаціями часу обслуговування у вузлах мережі.

4. $[G|M|\infty]^r$-мережі у квазістаціонарному режимі

У цьому розділі замість умови (б) ми розглянемо таку:

(г) $Q_i^{(n)}(0) = \left[n\theta_i/\mu_i + \sqrt{n}\eta_i^0\right]$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\eta^0 = (\eta_1^0, \ldots, \eta_r^0) \in \mathbb{R}^r$ і послідовність випадкових процесів
$$\eta^{(n)}(t) = n^{-1/2}\big(Q^{(n)}(nt) - n\theta/\mu\big), \quad n \geq 1.$$

При виконанні умови (г) процес $\eta^{(n)}(t)$ функціонує у квазістаціонарному режимі. Це вносить особливості у граничний процес.

Для апроксимації $\eta^{(n)}(t)$ ми додатково введемо гауссівський процес $\xi^{(3)}(t)$, який не залежить від $\xi^{(1)}(t)$, $\xi^{(2)}(t)$ і визначається своїми середніми значеннями
$$\mathsf{E}\,\xi^{(3)}(t) = P'(t)\eta^0$$
і корреляційними матрицями
$$R^{(3)}(t) = \Delta\big[(\theta/\mu)'P(t)\big] - P'(t)\Delta(\theta/\mu)P(t),$$
$$R^{(3)}(s,t) = R^{(3)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Квазістаціонарний режим апроксимується сумою гауссівських процесів у такий спосіб.

Теорема 3. *Нехай для стохастичної мережі типу $[G|M|\infty]^r$ виконуються умови (а), (в), (г) і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1. Тоді на будь-якому скінченному інтервалі $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\eta^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, слабко збігається при $n \to \infty$ до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$ у рівномірній топології.*

Додатковий доданок $\xi^{(3)}(t)$ у граничному процесі пов'язаний із флуктуаціями часу обробки тих вимог, які містились у вузлах мережі у початковий момент часу.

Граничний процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$ можна подати як дифузію.

Наслідок 2. *Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший за 1, то граничний гауссівський процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$ є r-вимірним дифузійним процесом Орнштейна – Уленбека $\eta(t)$ $(\eta(0) = \eta^0)$ із вектором перенесення $A(x) = Q'x$ і матрицею дифузії $B = \Delta(\theta)(I-P) + (I-P')\Delta(\theta) - \Delta(\lambda) + \sigma^2$.*

Оскільки обмеження на структуру вхідного потоку відсутні, то теореми 2 і 3 узагальнюють результати про дифузійну апроксимацію багатоканальних мереж із [12].

На завершення ми зробимо деякі коментарі.

Перевантажений квазістаціонарний режим у теоремі 3 і наслідку 2 пов'язаний із заміною умови (б) на умову (г). Початковий розподіл граничного процесу $\eta(t)$ вироджений ($\eta(0) = \eta^0$ з імовірністю 1) і не збігається зі стаціонарним розподілом процесу Орнштейна – Уленбека. Таким чином, у результаті апроксимації квазістаціонарного режиму граничний процес $\eta(t)$ опинився у перехідному режимі.

У нашому випадку компоненти матриці маршрутизації не залежать від параметра серії n. Якщо зняти це обмеження і покласти
$$P = P_n = P_0 + n^{-1}B_o + (n^{-1}),$$
де $P_0 = \left\|\delta_{\alpha\beta}P^{(\alpha)}\right\|_1^{r_0}$, $P^{(\alpha)} = \left\|p_{ij}^{(\alpha)}\right\|_{i,j\in I_\alpha}$ — нерозкладні стохастичні матриці, то у процесі апроксимації можливе укрупнення (об'єднання) вузлів початкової мережі: $r \to r_0$, $r_0 \leq r$. Вузли з підмножини I_α об'єднуються в один вузол із номером α.

Список літератури

1. V. M. Vishnevskiy, *Theoretical foundations of computer networks projecting*, Technosphera, Moscow, 2003.
2. B. V. Gnedenko, I. N. Kovalenko, *Introduction to queueing theory*, ComKniga, Moscow, 2005.
3. V. A. Ivnitskiy, *Theory of queueing networks*, Fizmatlit, Moscow, 2004.
4. E. A. Lebedev, A. A. Chechelnitsky, *Diffusion approximation of queueing networks of open type*, Ukr. Math. J., **41** (1989), no. 1, 95–99.
5. E. A. Lebedev, G. Livinska, *Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic*, Commun. Comput. Inf. Sci., **356** (2013), 122–130.
6. R. S. Grifiths, R. K. Milne, *A class of bivariate Poisson process*, J. Multivar. Anal., **8** (1978), no. 3, 380–396.
7. K. Kawamura, *The structure of bivariate Poisson distribution*, Kodai Mathematical Seminar, 1973, REP 25, 246–256.
8. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Stochastic differential equations*, Naukova Dumka, Kiev, 1982.
9. A. V. Skorohod, *Studies in the theory of random processes*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1965.
10. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1971.
11. E. A. Lebedev, *On Markov property of multi-dimensional Gaussian processes*, Bulletin of Kyiv University (2001), no. 4, 287–291.
12. V. V. Anisimov, E. A. Lebedev, *Stochastic queueing networks. Markov models*, Lybid, Kiev, 1992.

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: leb@unicyb.kiev.ua

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: achechelnitski@gmail.com

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: livinskaav@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 13.09.2017

MULTI-CHANNEL NETWORKS WITH INTERDEPENDENT INPUT FLOWS IN HEAVY TRAFFIC

E. A. LEBEDEV, A. A. CHECHELNITSKYI, H. V. LIVINSKA

Abstract. A service process in multi-channel stochastic networks with interdependent input flows are considered. The models can be used in computing and communication networks, in medicine and in high energy physics. In heavy traffic conditions functional limit theorems of diffusion approximation types are proved. Local characteristics of the diffusion are represented via network parameters.

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СЕТИ С ВЗАИМОЗАВИСИМЫМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ В ПЕРЕГРУЖЕННОМ РЕЖИМЕ

Е. А. ЛЕБЕДЕВ, А. А. ЧЕЧЕЛЬНИЦКИЙ, А. В. ЛИВИНСКАЯ

Аннотация. Рассматривается процесс обслуживания в многоканальных стохастических сетях с взаимозависимыми входными потоками. Такие модели могут быть использованы в компьютерных сетях и сетях связи, в медицине и физике высоких энергий. При выполнении условий критической нарузки доказаны теоремы типа диффузионной аппроксимации. Локальные характеристики диффузионного процесса выписаны через параметры сети.