Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 157–170

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 157–170

СТОХАСТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ТА ПОТРАЄКТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ДРОБОВОГО ПРОЦЕСУ КОКСА – ІНГЕРСОЛЛА – РОССА

Ю. С. МІШУРА, В. І. ПІТЕРБАРГ, К. В. РАЛЬЧЕНКО, А. Ю. ЮРЧЕНКО-ТИТАРЕНКО

Анотація. Ми розглядаємо дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (СДР) $dX_t = aX_t\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t^H$, яке керується дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста, що перевищує $\frac{2}{3}$, а інтеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\,dB_s^H$ визначено як потраєкторний, що дорівнює границі інтегральних сум Рімана – Стілтьєса. Встановлено, що до моменту першого попадання в нуль процес Кокса – Інгерсолла – Росса є квадратом дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Базуючись на цьому, ми розглядаємо квадрат дробового процесу Орнштейна – Уленбека з будь-яким індексом Хюрста і доводимо, що до першого моменту попадання в нуль він задовольняє СДР вказаного вигляду, якщо інтеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\,dB_s^H$ визначено як потраєкторний інтеграл Стратоновича. Природним тоді є питання про момент першого попадання в нуль дробового процесу Кокса – Інгерсолла – Росса, що збігається з першим моментом попадання в нуль дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Оскільки останній є гауссовим процесом, то з використанням оцінок для розподілів гауссового процесу доведено, що при $a < 0$ ймовірність попадання в нуль за скінченний час дорівнює 1, а при $a > 0$ вона додатна, але менше 1. Наведено верхню оцінку для цієї ймовірності.

Ключові слова і фрази. Дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса, стохастичне диференціальне рівняння, дробовий процес Орнштейна – Уленбека, інтеграл Стратоновича.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G22; Secondary 60G15; 60H10.

1. Вступ

Стандартний дифузійний процес Кокса – Інгерсолла – Росса (КІР) було введено в розгляд та вивчено в статтях [5–7] із метою кращого моделювання відсоткових ставок та як узагальнення моделі Васічека. Процес КІР — це однофакторна модель, що містить єдине джерело випадковості. У цій моделі припускається, що миттєве значення відсоткової ставки r_t є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t, \quad t \ge 0,$$

де $a, b, \sigma \in \mathbb{R}^+$, $W = \{W_t, t \ge 0\}$ — вінерівський процес, $r|_{t=0} = r_0 > 0$. Параметр a називають таким, що відповідає швидкості «узгодження», тобто збіжності до середнього, b є «середнім», а σ — волатильністю. Якщо виконується умова $2ab \ge \sigma^2$, то процес з імовірністю 1 набуває лише додатних значень і не потрапляє в нуль. На відміну від моделі Васічека, де стандартне відхилення є сталим, стандартне відхилення в моделі КІР дорівнює $\sigma\sqrt{r_t}$, тобто залежить від значення процесу.

Процес КІР є ергодичним і має стаціонарний розподіл. Розподіл його майбутніх значень r_{t+T}, за умови, що відоме r_t, є нецентральним хі-квадрат-розподілом, а розподіл граничної величини r_∞ є гамма-розподілом. Процес КІР широко використовується також при моделюванні стохастичної волатильності в моделі Хестона. Обширна бібліографія з цього питання міститься, наприклад, у статтях [11, 12].

Поруч зі сказаним вище відзначимо, що в реальності багато фінансових моделей демонструють так званий феномен пам'яті, тобто зміни цін на ринку не можуть бути охарактеризовані тільки випадковістю, згенерованою вінерівським процесом. Опис фінансових ринків із пам'яттю можна знайти, наприклад, у роботах [1, 3, 9, 23]. Причому, якщо до недавнього часу вважалося, що найкращою моделлю для відсоткових ставок і стохастичної волатильності є такі, що містять дробовий броунівський рух

(ДБР) із показником Хюрста $H > \frac{1}{2}$, то в недавніх дослідженнях ринків (див., наприклад, [2]) відзначено, що волатильність може бути настільки нерегулярною, що індекс Хюрста оцінюється величиною 0.1. Отже, для моделювання відповідних відсоткових ставок або стохастичної волатильності доцільно використовувати дробовий процес Орнштейна – Уленбека або, щоб зберігати невід'ємність випадкового процесу, запровадити дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса. При цьому, якщо дробовий процес Орнштейна – Уленбека є гауссовим і за його використання не виникає проблем зі стохастичним інтегруванням (властивості дробового процесу Орнштейна – Уленбека описано в [4]), то у випадку дробового КІР-процесу існує декілька різних підходів до означення. Так, підхід, за якого інтеграл по дробовому броунівському руху розуміється як потраєкторний, було розглянуто при $H > 2/3$ у [18], а так званий «грубий», або «шорсткий», підхід (rough-path approach) запроваджено в [17]. Ще один спосіб спирається на те, що стандартний процес Кокса – Інгерсолла – Росса належить до класу дифузій Пірсона, а тому дробовий КІР-процес можна означити як КІР-процес зі зміненим часом з оберненим стійким субординатором [15, 16].

У цій статті спочатку розглядається СДР вигляду

$$dX_t = aX_t\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t^H, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де $X|_{t=0} = x_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ — ДБР з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, тобто центрований гауссівський процес із коваріаційною функцією $\mathsf{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$. При цьому ми припускаємо, що $H \in (2/3, 1)$, тому що тоді інтеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\,dB_s^H$ визначений як потраєкторний інтеграл, що є границею інтегральних сум Рімана – Стілтьєса. Доведено, що єдиний розв'язок рівняння (1) до моменту першого потрапляння в нуль є квадратом дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Зрозуміло, що, в силу єдності розв'язку, після першого потрапляння в нуль розв'язок рівняння (1) залишається в нулі. Після цього ми розглядаємо квадрат дробового процесу Орнштейна – Уленбека з довільним індексом Хюрста $H \in (0,1)$ та доводимо, що до моменту потрапляння в нуль цей квадрат задовольняє рівняння (1), якщо стохастичний інтеграл розуміти як потраєкторний інтеграл Стратоновича. Природним чином постає питання про скінченність моменту першого потрапляння в нуль дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Доведено, що при $a < 0$ ймовірність скінченності цього моменту дорівнює 1, а при $a > 0$ вона міститься між 0 та 1, при цьому наведено верхню оцінку для цієї ймовірності, а як допоміжний результат використано вигляд коваріаційної функції дробового процесу Орнштейна – Уленбека.

Стаття має таку структуру. У розділі 2 розглянуто рівняння (1) для випадку $H \in (2/3, 1)$ із потраєкторним інтегралом Рімана – Стілтьєса відносно ДБР та показано, що його розв'язок до моменту першого відвідування нуля є квадратом дробового процесу Орнштейна – Уленбека. У розділі 3 введено дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса для всіх $H \in (0,1)$ як квадрат відповідного процесу Орнштейна – Уленбека та показано, що означений таким чином процес задовольняє рівняння (1) із потраєкторним інтегралом Стратоновича. Розділ 4 присвячено дослідженню ймовірності потрапляння описаного процесу в нуль за скінченний час. Розділ 5 містить допоміжний результат — формулу для коваріаційної функції дробового процесу Орнштейна – Уленбека.

2. Дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса при $H \in (2/3, 1)$

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння вигляду

$$dX_t = \tilde{a}X_t\,dt + \tilde{\sigma}\sqrt{X_t}\,dB_t^H, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

де $X|_{t=0} = x_0 > 0$, $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma} > 0$.

Згідно з теоремою 6 зі статті [18], за умови $H > 2/3$ рівняння (2) має єдиний розв'язок до моменту першого відвідування нуля, причому інтеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\, dB_s^H$ існує як потраєкторний інтеграл, що є границею сум Рімана – Стілтьєса. Емпірично це можна пояснити наступним чином: інтеграл відносно ДБР (щодо умов існування і властивостей таких інтегралів див., наприклад, [24]) існує як потраєкторна границя сум Рімана – Стілтьєса, якщо сума показників Гельдера функції, що інтегрується, та функції, відносно якої проводиться інтегрування, перевищує 1. З іншого боку, за умови існування розв'язку, він є гельдеровим до порядку H (див., наприклад, [10]), а значить, підінтегральна функція $\sqrt{X_t}$ буде гельдеровою до порядку $H/2$. Таким чином, умовою існування потраєкторного інтеграла відносно ДБР, і того, що інтеграл буде границею сум Рімана – Стілтьєса, є нерівність $H/2 + H > 1$ або $H > 2/3$. У цьому випадку, повторимо, рівняння (2) має єдиний розв'язок, траєкторії якого строго додатні до моменту першого відвідування нуля.

Позначимо $\tau_0 \coloneqq \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$ і розглянемо траєкторії процесу $\{X_t, t \geq 0\}$ на інтервалі $[0, \tau_0)$. Після заміни $Y_t = \sqrt{X_t}$ з використанням формули Іто для інтегралів по ДБР ([19]) отримаємо

$$dY_t = \frac{dX_t}{2\sqrt{X_t}} = \frac{\tilde{a} X_t\, dt}{2\sqrt{X_t}} + \frac{\tilde{\sigma}}{2}\, dB_t^H.$$

Позначивши $a = \tilde{a}/2$, $\sigma = \tilde{\sigma}/2$, приходимо до рівняння

$$dY_t = a\, Y_t\, dt + \sigma\, dB_t^H \tag{3}$$

з початковою умовою $Y_0 = \sqrt{X_0}$. Таким чином, до моменту першого відвідування нуля розв'язок $\{X_t, t \in [0, \tau_0)\}$ рівняння (2) є квадратом дробового процесу Орнштейна – Уленбека $\{Y_t, t \geq 0\}$, введеного в [4].

3. Узагальнення дробового процесу Кокса – Інгерсолла – Росса на випадок $H \in (0, 1)$

Візьмемо до уваги висновки розділу 2 і визначимо дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса для всіх індексів Хюрста $H \in (0, 1)$.

Означення 3.1. Нехай $H \in (0, 1)$ — довільне, $\{Y_t, t \geq 0\}$ — дробовий процес Орнштейна – Уленбека, що задовольняє рівняння вигляду (3), τ — момент першого відвідування ним нуля. Тоді *дробовим процесом Кокса – Інгерсолла – Росса* називатимемо процес $\{X_t, t \geq 0\}$ такий, що для всіх $t \geq 0$

$$X_t(\omega) = Y_t^2(\omega) \mathbf{1}_{\{t < \tau(\omega)\}}. \tag{4}$$

Зауважимо, що означений таким чином процес задовольняє рівняння вигляду (2), якщо розглядати інтеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\, dB_s^H$ як потраєкторний інтеграл Стратоновича. Наведемо відповідне означення.

Означення 3.2. Нехай $\{X_t, t \geq 0\}$, $\{Y_t, t \geq 0\}$ — випадкові процеси. *Потраєкторним інтегралом Стратоновича* $\int_0^T X_s \circ dY_s$ по відрізку $[0, T]$ називається потраєкторна границя сум вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{X_{t_k} + X_{t_{k-1}}}{2} \left(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}\right),$$

коли діаметр розбиття $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ прямує до нуля, за умови, що така границя існує.

Дійсно, нехай $\{Y_t, t \geq 0\}$ — дробовий процес Орнштейна–Уленбека, який починається в точці $\sqrt{X_0}$, $\tau = \inf\{s > 0 : Y_s = 0\}$, і при деякому $\omega \in \Omega$ розглядається така точка t, що $t < \tau(\omega)$. Тоді, за означенням 3.1,

$$X_t = Y_t^2 = \left(\sqrt{X_0} + a\int_0^t Y_s\,ds + \sigma B_t^H\right)^2. \tag{5}$$

Розглянемо довільне розбиття інтервалу $[0, t]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t.$$

Використовуючи зображення (5), маємо

$$\begin{aligned}
X_t &= \sum_{k=1}^n \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) + X_0 = \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\left[\sqrt{X_0} + a\int_0^{t_k} Y_s\,ds + \sigma B_{t_k}^H\right]^2 - \left[\sqrt{X_0} + a\int_0^{t_{k-1}} Y_s\,ds + \sigma B_{t_{k-1}}^H\right]^2\right) + X_0 = \\
&= \sum_{k=1}^n \left(2\sqrt{X_0} + a\left(\int_0^{t_k} Y_s\,ds + \int_0^{t_{k-1}} Y_s\,ds\right) + \sigma\left(B_{t_k}^H + B_{t_{k-1}}^H\right)\right)\times \\
&\quad\times\left(a\int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + \sigma\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right)\right) + X_0.
\end{aligned}$$

Розкриваючи дужки в останньому виразі, отримуємо

$$\begin{aligned}
X_t = 2a\sqrt{X_0}\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + a^2\sum_{k=1}^n \left(\int_0^{t_k} Y_s\,ds + \int_0^{t_{k-1}} Y_s\,ds\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + \\
+ a\sigma\sum_{k=1}^n \left(B_{t_k}^H + B_{t_{k-1}}^H\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + 2\sigma\sqrt{X_0}\sum_{k=1}^n\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right) + \\
+ a\sigma\sum_{k=1}^n \left(\int_0^{t_k} Y_s\,ds + \int_0^{t_{k-1}} Y_s\,ds\right)\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right) + \\
+ \sigma^2\sum_{k=1}^n \left(B_{t_k}^H + B_{t_{k-1}}^H\right)\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Спрямуємо діаметр розбиття Δt до нуля. При цьому перші три доданки

$$\begin{aligned}
2a\sqrt{X_0}\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + a^2\sum_{k=1}^n \left(\int_0^{t_k} Y_s ds + \int_0^{t_{k-1}} Y_s\,ds\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds + \\
+ a\sigma\sum_{k=1}^n \left(B_{t_k}^H + B_{t_{k-1}}^H\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_s\,ds \to \\
\to 2a\sqrt{X_0}\int_0^t Y_s\,ds + 2a^2\int_0^t Y_s\int_0^s Y_u\,du\,ds + 2a\sigma\int_0^t B_s^H Y_s\,ds = \\
= 2a\int_0^t Y_s\left(\sqrt{X_0} + a\int_0^s Y_u\,du + \sigma B_s^H\right)ds = 2a\int_0^t Y_s^2\,ds = \\
= 2a\int_0^t X_s\,ds = \tilde{a}\int_0^t X_s\,ds, \quad \Delta t \to 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

а останні три доданки

$$2\sigma\sqrt{X_0}\sum_{k=1}^{n}\Big(B^H_{t_k}-B^H_{t_{k-1}}\Big)+a\sigma\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_0^{t_k}Y_s ds+\int_0^{t_{k-1}}Y_s ds\Big)\Big(B^H_{t_k}-B^H_{t_{k-1}}\Big)+$$
$$+\sigma^2\sum_{k=1}^{n}\Big(B^H_{t_k}+B^H_{t_{k-1}}\Big)\Big(B^H_{t_k}-B^H_{t_{k-1}}\Big)\to$$
$$\to 2\sigma\int_0^t\left(\sqrt{X_0}+a\int_0^s Y_u du+\sigma B^H_s\right)\circ dB^H_s=\tilde{\sigma}\int_0^t\sqrt{X_s}\circ dB^H_s,\quad \Delta t\to 0. \tag{8}$$

Таким чином, уведений означенням 3.1 дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t=X_0+\tilde{a}\int_0^t X_s ds+\tilde{\sigma}\int_0^t\sqrt{X_s}\circ dB^H_s, \tag{9}$$

де $\int_0^t\sqrt{X_s}\circ dB^H_s$ — потраєкторний інтеграл Стратоновича.

Зробимо декілька зауважень щодо отриманого стохастичного диференціального рівняння.

Зауваження 3.3. Граничний перехід у (8) коректний, оскільки ліва частина рівності (6) не залежить від розбиття, а границя у (7) існує в сенсі потраєкторного інтеграла Лебега, а тому відповідний потраєкторний інтеграл Стратоновича теж існує.

Зауваження 3.4. У випадку $H>2/3$ розв'язок рівняння (9) збігається із розв'язком рівняння (2), оскільки збігаються відповідні потраєкторний інтеграл Стратоновича та потраєкторний інтеграл, що є границею сум Рімана – Стілтьєса.

4. Імовірність потрапляння в нуль дробового процесу Орнштейна – Уленбека

Дослідимо ймовірність скінченності випадкового моменту τ першого відвідування нуля дробовим процесом Орнштейна – Уленбека, який є розв'язком рівняння (3). Згідно з [4], цей розв'язок записується в явному вигляді як

$$Y_t=e^{at}\Big(Y_0+\sigma\int_0^t e^{-as}\,dB^H_s\Big), \tag{10}$$

де інтеграл по ДБР є границею інтегральних сум Рімана – Стілтьєса та може бути визначений за допомогою інтегрування частинами:

$$J_t:=\int_0^t e^{-as}\,dB^H_s:=e^{-at}B^H_t+a\int_0^t e^{-as}B^H_s\,ds. \tag{11}$$

Із формули (10) бачимо, що момент першого відвідування нуля процесом Y_t збігається з моментом першого досягнення рівня $-Y_0/\sigma$ інтегралом (11). Зауважимо, що цей інтеграл є нормально розподіленою випадковою величиною з нульовим середнім. Тому із симетричності нормального розподілу маємо, що ймовірність досягнення інтегралом (11) від'ємного рівня $-Y_0/\sigma$ збігається з імовірністю досягнення ним додатного рівня Y_0/σ. Таким чином, постає задача дослідження ймовірності досягнення інтегралом J_t рівня $x>0$ за скінченний час. Природно, що поведінка цього інтеграла істотно залежить від знаку параметра $a\in\mathbb{R}$.

Розглянемо два випадки.

Випадок $a \le 0$**.**

Твердження 4.1. *Якщо* $a < 0$, *тоді*

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{t\to\infty} J_t = +\infty\Big) = 1.$$

Доведення. Відомо [4], що для $a < 0$ процес

$$G_t = e^{at}\int_{-\infty}^{t} e^{-as}\,dB_s^H$$

є гауссовим, стаціонарним та ергодичним. За ергодичною теоремою, для довільного $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{G_k > x\}} \to \mathsf{E}\mathbf{1}_{\{G_0 > x\}} = \mathsf{P}(G_0 > x) > 0 \quad \text{м. н.}, \ n \to \infty.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{G_k > x\}} = +\infty \quad \text{м. н.}$$

Це означає, що подія $\{G_k > x\}$ трапляється нескінченно часто. Звідси

$$\limsup_{t\to\infty} G_t = +\infty \quad \text{м. н.}$$

Тоді

$$\limsup_{t\to\infty} J_t = \limsup_{t\to\infty}\big(e^{-at}G_t - G_0\big) = +\infty \quad \text{м. н.} \qquad \square$$

Зауваження 4.2. Твердження 4.1 залишається правильним і у випадку $a = 0$, коли $J_t = B_t^H$. Більш детальні результати щодо асимптотичної поведінки супремума та ймовірностей досягнення рівня для ДБР можуть бути знайдені, наприклад, у роботах [8, 14, 20, 21].

Випадок $a > 0$**.** За наслідком 5.6 розділу 5,

$$V_t^2 \coloneqq \operatorname{Var} J_t = H\int_0^t z^{2H-1}\big(e^{-2at+az} + e^{-az}\big)dz.$$

Похідна V_t^2 рівна

$$\frac{d}{dt}V_t^2 = 2H\left(t^{2H-1}e^{-at} - ae^{-2at}\int_0^t z^{2H-1}e^{az}\,dz\right).$$

Оскільки другий доданок у дужках експоненційно менший за перший, існує $t(a)$ таке, що похідна є додатною для всіх $t \ge t(a)$. Помітимо, що

$$\lim_{t\to\infty} V_t^2 = H\int_0^\infty z^{2H-1}e^{-az}dz = \frac{H\Gamma(2H)}{a^{2H}}.$$

Розглянемо гауссовий процес

$$Z_t = J_{t/(1-t)}, \quad t \in [0,1],$$

визначивши $Z_1 = J_\infty$. Маємо для похідної його дисперсії v_t^2,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v_t^2 &= \frac{d}{ds}V_s^2\bigg|_{s=t/(1-t)}\left(\frac{t}{1-t}\right)' = \\ &= 2H\,\frac{\big(t/(1-t)\big)^{2H-1}e^{-at/(1-t)} - ae^{-2at/(1-t)}\int_0^{t/(1-t)} z^{2H-1}e^{az}\,dz}{(1-t)^2}. \qquad (12)\end{aligned}$$

Вона існує та прямує до нуля при $t \to 1$. Через експоненційність множників можна зробити висновок, що друга похідна теж прямує до нуля при $t \to 1$. Тепер використаємо вигляд коваріаційної функції з наслідку 5.6 (далі всюди $s < t$). Після спрощення маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(J_t - J_s)^2 &= V_t^2 + V_s^2 - 2\operatorname{Cov}(J_s, J_t) = \\
&= He^{-2at}\int_0^t z^{2H-1}e^{-az}dz + H\int_0^t z^{2H-1}e^{-az}dz + He^{-2as}\int_0^s z^{2H-1}e^{az}dz + \\
&\quad + H\int_0^s z^{2H-1}e^{-az}dz + He^{-2as}\int_0^{t-s} z^{2H-1}e^{-az}dz - \\
&\quad - He^{-2at}\int_{t-s}^t z^{2H-1}e^{az}dz + H\int_s^t z^{2H-1}e^{-az}dz - \\
&\quad - He^{-2as}\int_0^s z^{2H-1}e^{az}dz - 2H\int_0^t z^{2H-1}e^{-az}dz = \\
&= He^{-2at}\int_0^{t-s} z^{2H-1}e^{az}dz + He^{-2as}\int_0^{t-s} z^{2H-1}e^{-az}dz.
\end{aligned}$$

Для Z_t

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Z_t - Z_s)^2 = He^{-2at/(1-t)}&\int_0^{(t-s)/(1-t)(1-s)} z^{2H-1}e^{az}\,dz + \\
&+ He^{-2as/(1-s)}\int_0^{(t-s)/(1-t)(1-s)} z^{2H-1}e^{-az}\,dz.
\end{aligned}$$

Далі, для кожного $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{t-s}{(1-t)(1-s)} &= \frac{t-s}{(1-s)^2} + \frac{(t-s)^2}{(1-t)(1-s)}; \\
e^{-2at/(1-t)} &= e^{-2as/(1-s)}e^{-2a(t-s)/(1-t)(1-s)} = \\
&= e^{-2as/(1-s)}\left(1 + \frac{-2a(t-s)}{(1-s)^2} + \frac{-4a(t-s)^2}{(1-s)^2} + \frac{O\big((t-s)^3\big)}{(1-s)^2}\right)
\end{aligned}$$

при $t \downarrow s$. Більше того,

$$\int_0^{(t-s)/(1-t)(1-s)} z^{2H-1}e^{\pm az}dz = \frac{1}{2H}\frac{(t-s)^{2H} + O\big((t-s)^{2H+1}\big)}{(1-s)^{2H}}$$

при $t \downarrow s$. Звідси

$$\mathsf{E}(Z_t - Z_s)^2 = He^{-2as/(1-s)}\left(\frac{(t-s)^{2H}}{H(1-s)^{2H}} + \frac{O\big((t-s)^{2H+1}\big)}{(1-s)^{2H}}\right) \tag{13}$$

при $t \downarrow s$. Таким способом можна отримати, що для $s \in [0, 1]$

$$\limsup_{t-s\downarrow 0}\frac{\mathsf{E}(Z_t - Z_s)^2}{(t-s)^{2H}} \le H\max_{s\in[0,1]}(1-s)^{-2}e^{-2as/(1-s)}. \tag{14}$$

Із (12) та (14) випливає, що

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\ge 0} J_t < \infty\Big) = \mathsf{P}\Big(\max_{t\in[0,1]} Z_t < \infty\Big) = 1. \tag{15}$$

Нарешті з теореми D.4 [22] разом із (12) та (14) одержуємо наступний результат.

Твердження 4.3. *Існує стала C така, що для довільного $x > 0$*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\ge 0} J_t \ge x\right) = \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} Z_t \ge x\right) \le C x^{\frac{1}{H}-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2}\right), \tag{16}$$

де $v^2 = \sup_{t\ge 0} V_t^2 = \max_{t\in[0,1]} v_t^2 < \infty$.

Більше того, оскільки v_t двічі диференційовна, то використовуючи (14), одержуємо, що для деякого $c > 0$ та всіх достатньо малих $t - s$

$$\operatorname{Cov}(Z_s/v_s, Z_t/v_t) \ge 1 - c|t-s|^{2H}.$$

Тепер можна застосувати теорему Слепяна (див., наприклад, [22]) для обмеження ймовірності (16) зверху відповідною ймовірністю для процесу $v_t U_t$, де U_t — стаціонарний гауссівський процес із нульовим середнім, коваріаційна функція якого поводить себе в нулі як $1 - |t|^{2H} + o(|t|^{2H})$. Тоді за теоремою D.4 із [22] маємо таке.

Твердження 4.4. *Існує стала C_1 така, що для довільного $x > 0$*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\ge 0} J_t \ge x\right) \le C_1 x^{\frac{1}{H}-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2}\right).$$

Зауваження 4.5. Неважко переконатися, що $\max_{t\in[0,1]} v_t^2 = v_1^2 = V_\infty^2 = \frac{H\Gamma(2H)}{a^{2H}}$. Дійсно, із (12) випливає, що точка $t = 1$ є точкою локального максимуму. При $t = 0$ маємо, що $v_0^2 = V_0^2 = 0$. Тому досить показати, що функція v_t^2 не має локальних екстремумів у внутрішніх точках проміжку $[0,1]$. Якби такі точки існували, то згідно з (12), вони б мали задовольняти рівняння

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)^{2H-1} e^{-at/(1-t)} - a e^{-2at/(1-t)} \int_0^{t/(1-t)} z^{2H-1} e^{az}\, dz = 0, \quad t \in (0,1).$$

Позначимо $s = \frac{t}{1-t}$, тоді це рівняння набуде вигляду

$$e^{-2as}\left(s^{2H-1} e^{as} - a\int_0^s z^{2H-1} e^{az}\, dz\right) = 0, \quad s > 0. \tag{17}$$

Дослідимо поведінку функції

$$h(s) = s^{2H-1} e^{as} - a\int_0^s z^{2H-1} e^{az}\, dz$$

при $s > 0$. Спершу зауважимо, що при $H = 1/2$ функція $h(s) \equiv 1$, а отже, рівняння (17) не має коренів. У випадку $H \ne 1/2$ знайдемо похідну:

$$\frac{d}{dt} h(t) = (2H-1) s^{2H-2} e^{as}.$$

Якщо $H < 1/2$, то функція h строго спадає, а отже (оскільки $a > 0$) ліва частина (17) теж строго спадає і прямує до 0 при $s \to \infty$, звідки випливає, що рівняння (17) не має коренів на $(0, +\infty)$. Якщо $H > 1/2$, то h строго зростає, причому $h(0) = 0$, отже, $h(s) > 0$ при $s > 0$, і рівняння (17) теж не має коренів на $(0, +\infty)$.

Зауваження 4.6. Для $1 > t > s$ із (13), (14) випливає, що $\mathsf{E}(Z_t - Z_s)^2$ експоненційно прямує до нуля при $s \to 1$. Можна побачити, що й усі похідні по s цього математичного сподівання також прямують до нуля при $s \to 1$. Те саме справджується і для v_s^2. Це означає, що теорему D.3 із [22] не можна безпосередньо застосувати для одержання асимптотичної поведінки $\mathsf{P}(\sup_{t\ge 0} Z_t \ge x)$ при $x \to \infty$. Проте цю асимптотику можна знайти за допомогою тих самих методів, які використовуються для доведення згаданої теореми.

Повернемося до питання про скінченність моменту τ першого відвідування нуля дробовим процесом Орнштейна – Уленбека (3). Із наведених на початку цього розділу міркувань, тверджень 4.1 і 4.4, та зауваження 4.2 одержуємо такий результат.

Теорема 4.7. *(1) Якщо $a \le 0$, то $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$.*
(2) Якщо $a > 0$, то $\mathsf{P}(\tau < \infty) \in (0,1)$, причому справедлива оцінка

$$\mathsf{P}(\tau < \infty) \le C_1 \left(\frac{Y_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{H}-2} \exp\left(-\frac{a^{2H} Y_0^2}{\sigma^2 \Gamma(2H+1)}\right),$$

де $C_1 > 0$ — деяка стала.

5. Додаток. Коваріаційна функція дробового процесу Орнштейна – Уленбека

Розглянемо процес Орнштейна – Уленбека Y_t, який є розв'язком рівняння (3) із початковою умовою $Y_t = y_0 \in \mathbb{R}$. Згідно з (10)–(11), цей розв'язок має вигляд

$$Y_t = y_0 e^{at} + a\sigma e^{at} \int_0^t e^{-as} B_s^H ds + \sigma B_t^H, \quad t \ge 0. \tag{18}$$

Твердження 5.1. *. Нехай $t \ge s \ge 0$. Тоді коваріаційна функція дробового процесу Орнштейна – Уленбека (18) визначається формулою*

$$\begin{aligned} R_H(t,s) = \frac{H\sigma^2}{2}\Big(&-e^{at-as}\int_0^{t-s} e^{-az} z^{2H-1} dz + e^{-at+as}\int_{t-s}^t e^{az} z^{2H-1} dz - \\ &- e^{at+as}\int_s^t e^{-az} z^{2H-1} dz + e^{at-as}\int_0^s e^{az} z^{2H-1} dz + \\ &+ 2e^{at+as}\int_0^t e^{-az} z^{2H-1} dz\Big). \end{aligned} \tag{19}$$

Доведення. Використовуючи (18) та формулу для коваріації ДБР, можемо записати

$$\begin{aligned} R_H(t,s) &= \mathsf{E}\big[\big(Y_t - y_0 e^{at}\big)\big(Y_s - y_0 e^{as}\big)\big] = \\ &= \mathsf{E}\left[\left(a\sigma e^{at}\int_0^t e^{-au} B_u^H du + \sigma B_t^H\right)\left(a\sigma e^{as}\int_0^s e^{-av} B_v^H dv + \sigma B_s^H\right)\right] = \\ &= \frac{a\sigma^2}{2} e^{at}\int_0^t e^{-au}\big(u^{2H} + s^{2H} - |u-s|^{2H}\big) du + \\ &+ \frac{a\sigma^2}{2} e^{as}\int_0^s e^{-av}\big(v^{2H} + t^{2H} - |v-t|^{2H}\big) dv + \frac{\sigma^2}{2}\big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\big) + \\ &+ \frac{a^2\sigma^2}{2} e^{at+as}\int_0^t\int_0^s e^{-au-av}\big(u^{2H} + v^{2H} - |u-v|^{2H}\big) du\, dv = \frac{\sigma^2}{2}\sum_{n=1}^{10} I_n, \end{aligned}$$

де

$$I_1 = ae^{at}\int_0^t e^{-au} s^{2H} du, \quad I_2 = ae^{at}\int_0^t e^{-au} u^{2H} du, \quad I_3 = -ae^{at}\int_0^t e^{-au}|u-s|^{2H} du,$$

$$I_4 = ae^{as}\int_0^s e^{-av} t^{2H} dv, \quad I_5 = ae^{as}\int_0^s e^{-av} v^{2H} dv, \quad I_6 = -ae^{as}\int_0^s e^{-av}(t-v)^{2H} dv,$$

$$I_7 = t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}, \quad I_8 = a^2 e^{at+as}\int_0^t e^{-av} dv \int_0^s e^{-au} u^{2H} du,$$

$$I_9 = a^2 e^{at+as}\int_0^s e^{-au} du \int_0^t e^{-av} v^{2H} dv, \quad I_{10} = -a^2 e^{at+as}\int_0^t\int_0^s e^{-au-av}|u-v|^{2H} du dv.$$

Перші два інтеграли дорівнюють

$$I_1 = s^{2H}\big(e^{at}-1\big) \quad \text{та} \quad I_2 = -e^{at}\int_0^t u^{2H} de^{-au} = -t^{2H} + 2He^{at}\int_0^t e^{-au}u^{2H-1}du.$$

За допомогою замін змінних та інтегрування частинами одержуємо

$$\begin{aligned}I_3 &= -ae^{at}\int_0^s e^{-au}(s-u)^{2H}du - ae^{at}\int_s^t e^{-au}(u-s)^{2H}du = \\ &= -ae^{at-as}\int_0^s e^{az}z^{2H}dz - ae^{at-as}\int_0^{t-s} e^{-az}z^{2H}dz = \\ &= -e^{at-as}\bigg(e^{as}s^{2H} - 2H\int_0^s e^{az}z^{2H-1}dz - e^{-a(t-s)}(t-s)^{2H} + \\ &\quad + 2H\int_0^{t-s} e^{-az}z^{2H-1}dz\bigg) = \\ &= -e^{at}s^{2H} + (t-s)^{2H} + 2He^{at-as}\int_0^s e^{az}z^{2H-1}dz - 2He^{at-as}\int_0^{t-s} e^{-az}z^{2H-1}dz.\end{aligned}$$

Аналогічно до перших трьох інтегралів перетворюємо I_4–I_6:

$$I_4 = t^{2H}(e^{as}-1), \qquad I_5 = -s^{2H} + 2He^{as}\int_0^s e^{-av}v^{2H-1}dv,$$

$$\begin{aligned}I_6 &= -ae^{as-at}\int_{t-s}^t e^{az}z^{2H}dz = -e^{as-at}\int_{t-s}^t z^{2H}de^{az} = \\ &= -e^{as}t^{2H} + (t-s)^{2H} + 2He^{as-at}\int_{t-s}^t e^{az}z^{2H-1}dz.\end{aligned}$$

Далі

$$I_8 = e^{at+as}\big(e^{-at}-1\big)\int_0^s u^{2H}de^{-au} = (1-e^{at})s^{2H} - 2He^{as}(1-e^{at})\int_0^s e^{-au}u^{2H-1}du,$$

і аналогічно

$$I_9 = (1-e^{as})t^{2H} - 2He^{at}(1-e^{as})\int_0^t e^{-av}v^{2H-1}dv.$$

Нарешті, розглянемо I_{10}. Зобразимо його як суму інтегралів:

$$\begin{aligned}I_{10} &= -a^2e^{at+as}\int_0^s\int_0^v e^{-au-av}(v-u)^{2H}dudv - a^2e^{at+as}\int_0^s\int_v^s e^{-au-av}(u-v)^{2H}dudv - \\ &\quad - a^2e^{at+as}\int_s^t\int_0^s e^{-au-av}(v-u)^{2H}dudv = \\ &= -2a^2e^{at+as}\int_0^s\int_0^v e^{-au-av}(v-u)^{2H}dudv - \\ &\quad - a^2e^{at+as}\int_s^t\int_0^s e^{-au-av}(v-u)^{2H}dudv =: I'_{10} + I''_{10}.\end{aligned}$$

За допомогою заміни $v-u=z$, зміни порядку інтегрування та інтегрування частинами одержуємо

$$\begin{aligned}I'_{10} &= -2a^2e^{at+as}\int_0^s e^{-2av}\int_0^v e^{az}z^{2H}dzdv = -2a^2e^{at+as}\int_0^s e^{az}z^{2H}\int_z^s e^{-2av}dvdz = \\ &= -2a^2e^{at+as}\int_0^s e^{az}z^{2H}\,\frac{e^{-2as}-e^{-2az}}{-2a}\,dz = \\ &= ae^{at-as}\bigg(\int_0^s e^{az}z^{2H}dz - \int_0^s e^{-au}u^{2H}du\bigg) =\end{aligned}$$

$$= e^{at}s^{2H} - 2He^{at-as}\int_0^s e^{az}z^{2H-1}dz + e^{at}s^{2H} - 2He^{at+as}\int_0^s e^{-au}u^{2H-1}du.$$

Для спрощення I''_{10} необхідно розглянути два випадки.

Якщо $t > 2s$, то роблячи заміну $v - u = z$ у внутрішньому інтегралі, змінюючи порядок інтегрування та інтегруючи по v, одержуємо

$$I''_{10} = -a^2e^{at+as}\int_s^t\int_{v-s}^v e^{az-2av}z^{2H}dzdv = -a^2e^{at+as}\Bigg(\int_0^s\int_s^{z+s} e^{az-2av}z^{2H}dvdz +$$
$$+\int_s^{t-s}\int_z^{z+s} e^{az-2av}z^{2H}dvdz + \int_{t-s}^t\int_z^t e^{az-2av}z^{2H}dvdz\Bigg) =$$
$$= -a^2e^{at+as}\Bigg(\int_0^s e^{az}z^{2H}\,\frac{e^{-2a(z+s)} - e^{-2as}}{-2a}\,dz +$$
$$+\int_s^{t-s} e^{az}z^{2H}\,\frac{e^{-2a(z+s)} - e^{-2az}}{-2a}\,dz + \int_{t-s}^t e^{az}z^{2H}\,\frac{e^{-2at} - e^{-2az}}{-2a}\,dz\Bigg) =$$
$$= \frac{a}{2}e^{at-as}\int_0^{t-s} e^{-az}z^{2H}dz - \frac{a}{2}e^{at+as}\int_s^t e^{-az}z^{2H}dz - \frac{a}{2}e^{at-as}\int_0^s e^{az}z^{2H}dz +$$
$$+\frac{a}{2}e^{as-at}\int_{t-s}^t e^{az}z^{2H}dz.$$

Після інтегрування частинами в кожному з чотирьох інтегралів та зведення подібних доданків приходимо до рівності

$$I''_{10} = -He^{as-at}\int_{t-s}^t e^{az}z^{2H-1}dz + He^{at-as}\int_0^s e^{az}z^{2H-1}dz - He^{at+as}\int_s^t e^{-az}z^{2H-1}dz +$$
$$+ He^{at-as}\int_0^{t-s} e^{-az}z^{2H-1}dz - e^{at}s^{2H} + e^{as}t^{2H} - (t-s)^{2H}.$$

Справедливість останньої формули для випадку $s < t < 2s$ перевіряється аналогічно.

Таким чином, підсумувавши відповідні доданки, дістанемо (19). $\square$

Зауваження 5.2. При $s = t$ із твердження 5.1 одержуємо формулу

$$\operatorname{Var} Y_t = H\sigma^2\int_0^t z^{2H-1}\big(e^{az} + e^{2at-az}\big)dz,$$

доведену в [13, Lemma A.1].

Зауваження 5.3. Для довільних $t, s \in \mathbb{R}^+$ маємо

$$R_H(t,s) = \frac{H\sigma^2}{2}\Bigg(-e^{a|t-s|}\int_0^{|t-s|} e^{-az}z^{2H-1}dz + e^{-a|t-s|}\int_{|t-s|}^{\max\{t,s\}} e^{az}z^{2H-1}dz -$$
$$- e^{a(t+s)}\int_{\min\{t,s\}}^{\max\{t,s\}} e^{-az}z^{2H-1}dz + e^{a|t-s|}\int_0^{\min\{t,s\}} e^{az}z^{2H-1}dz +$$
$$+ 2e^{a(t+s)}\int_0^{\max\{t,s\}} e^{-az}z^{2H-1}dz\Bigg).$$

Наслідок 5.4. *Нехай* $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, $a < 0$ *та* $t > 0$ *фіксоване. Тоді коваріаційну функцію дробового процесу Орнштейна–Уленбека можна представити у вигляді*

$$R_H(t+s,t) = \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{2(-a)^{2H}}\Bigg(e^{as}\int_1^{-as} e^y y^{2H-2}dy + e^{-as}\int_{-as}^{+\infty} e^{-y}y^{2H-2}dy - \\ - e^{at}\bigg[e^{-a(t+s)}\int_{-a(t+s)}^{+\infty} e^{-y}y^{2H-2}dy + e^{a(t+s)}\int_1^{-a(t+s)} e^y y^{2H-2}dy\bigg]\Bigg) + \\ + O(e^{as}), \quad s \to \infty. \tag{20}$$

Доведення. Можемо вважати s таким, що $-as > 1$. Із формули (19) шляхом заміни $y = -az$ отримуємо

$$R_H(t+s,t) = \frac{H\sigma^2}{2(-a)^{2H}}\Bigg(-e^{as}\int_0^1 e^y y^{2H-1}dy - e^{as}\int_1^{-as} e^y y^{2H-1}dy + \\ + e^{-as}\int_{-as}^{-a(t+s)} e^{-y}y^{2H-1}dy - e^{2at+as}\int_{-at}^{-a(t+s)} e^y y^{2H-1}dy + \\ + e^{as}\int_0^{-at} e^{-y}y^{2H-1}dy + 2e^{2at+as}\int_0^1 e^y y^{2H-1}dy + \\ + 2e^{2at+as}\int_1^{-a(t+s)} e^y y^{2H-1}dy\Bigg) = \\ = \frac{H\sigma^2}{2(-a)^{2H}}\Bigg(-e^{as}\int_1^{-as} e^y y^{2H-1}dy + e^{-as}\int_{-as}^{-a(t+s)} e^{-y}y^{2H-1}dy - \\ - e^{2at+as}\int_{-at}^{-a(t+s)} e^y y^{2H-1}dy + 2e^{2at+as}\int_1^{-a(t+s)} e^y y^{2H-1}dy\Bigg) + O(e^{as}).$$

Зінтегрувавши частинами та спростивши останній вираз, одержимо (20). □

Зауваження 5.5. Наведені вище результати узгоджуються із результатами, отриманими в [4]. Дійсно, нехай $a < 0, H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. При доведенні [4, наслідок 2.5] показано, що

$$R_H(t+s,t) = \operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_t^H, \widetilde{Y}_{t+s}^H) - e^{at}\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_0^H, \widetilde{Y}_{t+s}^H) + O(e^{as}), \quad s \to \infty, \tag{21}$$

де

$$\widetilde{Y}_t^H := \sigma\int_{-\infty}^t e^{a(t-u)}dB_u^H,$$

а при доведенні [4, теорема 2.3] отримано таке представлення $\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_t^H, \widetilde{Y}_{t+s}^H)$ при $s \to \infty$:

$$\operatorname{Cov}(\widetilde{Y}_t^H, \widetilde{Y}_{t+s}^H) = \frac{\sigma^2}{2(-a)^{2H}}H(2H-1)\times \\ \times\left(e^{as}\int_1^{-as} e^y y^{2H-2}dy + e^{-as}\int_{-as}^{\infty} e^{-y}y^{2H-2}dy\right) + O(e^{as}). \tag{22}$$

Підставивши представлення (22) у рівність (21), отримаємо вираз, що збігається з рівністю (20).

Зауважимо, що інтеграл J_t, визначений (11), дорівнює $e^{-at}Y_t$, де Y_t — процес (18) із параметрами $y_0 = 0$, $\sigma = 1$. Отже, маємо такий результат.

Наслідок 5.6. *При* $s \le t$

$$\operatorname{Cov}(J_s, J_t) = -\frac{H}{2}e^{-2as}\int_0^{t-s} z^{2H-1}e^{-az}dz + \frac{H}{2}e^{-2at}\int_{t-s}^{t} z^{2H-1}e^{az}dz -$$

$$-\frac{H}{2}\int_s^t z^{2H-1}e^{-az}dz+\frac{H}{2}e^{-2as}\int_0^s z^{2H-1}e^{az}dz+$$
$$+H\int_0^t z^{2H-1}e^{-az}dz.$$

Зокрема,

$$\operatorname{Var} J_t = H\int_0^t z^{2H-1}\big(e^{az-2at}+e^{-az}\big)dz.$$

Список літератури

1. V. Anh, A. Inoue, *Financial Markets with Memory I: Dynamic Models*, Stoch. Anal. Appl., **23** (2005), no. 2, 275–300.
2. C. Bayer, P. Friz, J. Gatheral, *Pricing under rough volatility*, Quant. Finance, **16** (2016), no. 6 887–904.
3. T. Bollerslev, H. O. Mikkelsen, *Modelling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility*, J. Econometrics, **73** (1996), no. 1, 151–184.
4. P. Cheridito, H. Kawaguchi, M. Maejima, *Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes*, Electron. J. Probab, **8** (2003), no. 3, 1–14.
5. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross, *A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates*, J. Finance, **36** (1981), 769–799.
6. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross, *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*, Econometrica, **53** (1985), no. 1, 363–384.
7. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, **53** (1985), no. 2, 385–408.
8. L. Decreusefond, D. Nualart, *Hitting times for Gaussian processes*, Anal. Probab., **36** (2008), 319–330.
9. Z. Ding, C. W. Granger, R. F. Engle, *A long memory property of stock market returns and a new model*, J. Empirical Finance, **1** (1993), no. 1, 83–106.
10. D. Feyel, A. de la Pradelle, *The FBM Itô's formula through analytic continuation*, Electron. J. Probab., **6** (2001), paper 26.
11. S. Kuchuk-Iatsenko, Y. Mishura, Y. Munchak, *Application of Malliavin calculus to exact and approximate option pricing under stochastic volatility*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2016), 93–115.
12. S. Kuchuk-Iatsenko, Y. Mishura, *Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Exact formulas*, Mod. Stoch. Theory Appl., **2** (2015), no. 3, 233–249.
13. A. Kukush, Y. Mishura, K. Ralchenko, *Hypothesis testing of the drift parameter sign for fractional Ornstein–Uhlenbeck process*, Electron. J. Statist., **11** (2017), no. 1, 385–400.
14. P. Lei, D. Nualart, *Stochastic calculus for Gaussian processes and application to hitting times*, Commun. Stoch. Anal., **6** (2012), no. 3, 379–402.
15. N. Leonenko, M. Meerschaert, A. Sikorskii, *Correlation Structure of Fractional Pearson diffusion*, Comput. Math. Appl., **66** (2013), no. 5, 737–745.
16. N. Leonenko, M. Meerschaert, A. Sikorskii, *Fractional Pearson diffusion*, J. Math. Anal. Appl., **403** (2013), no. 2, 532–546.
17. N. Marie, *A generalized mean-reverting equation and applications*, ESAIM Probab. Stat., **18** (2014), 799–828.
18. A. Melnikov, Y. Mishura, G. Shevchenko, *Stochastic Viability and Comparison Theorems for Mixed Stochastic Differential Equations*, Methodol. Comput. Appl. Probab., **17** (2015), no. 1, 169–188.
19. Y. Mishura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Lectures Notes in Math., vol. 1929, Springer Science & Business Media, Berlin, 2008.
20. G. M. Molchan, *On the maximum of fractional Brownian motion*, Theory Probab. Appl., **44** (2000), 97–102.
21. I. Nourdin, *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*, Springer, New York, 2012.
22. V. I. Piterbarg, *Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields*, Transl. Math. Monogr., vol. 148, Amer. Math. Soc., Providence, 2012.
23. K. Yamasaki, L. Muchnik, S. Havlin, A. Bunde, H. E. Stanley, *Scaling and memory in volatility return intervals in financial markets*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **102** (2005), no. 26, 9424–9428.
24. M. Zähle, *On the link between fractional and stochastic calculus*, Stochastic Dynamics (H. Grauel and M. Gundlach, eds.), Springer, New-York, 1999, 305–325.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Лабораторія теорії ймовірностей, механіко-математичний факультет, Московський державний університет, Ленінські Гори, 1, м. Москва, Росія, 119991
Адреса електронної пошти: piter@mech.math.msu.su

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: k.ralchenko@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: ayurty@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 23.04.2017

STOCHASTIC REPRESENTATION AND PATHWISE PROPERTIES OF FRACTIONAL COX–INGERSOLL–ROSS PROCESS

YU. S. MISHURA, V. I. PITERBARG, K. V. RALCHENKO, A. YU. YURCHENKO-TYTARENKO

Abstract. We consider the fractional Cox–Ingersoll–Ross process satisfying the stochastic differential equation (SDE) $dX_t = aX_t\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t^H$ driven by a fractional Brownian motion (fBm) with Hurst parameter exceeding $\frac{2}{3}$. The integral $\int_0^t \sqrt{X_s}dB_s^H$ is pathwise and equals a limit of Riemann–Stieltjes integral sums. It is shown that the fractional Cox–Ingersoll–Ross process is a square of the fractional Ornstein–Uhlenbeck process until the first hitting zero. Based on that, we consider the square of the Ornstein–Uhlenbeck process with an arbitrary Hurst index and prove that before hitting zero it satisfies the specified SDE if the integral $\int_0^t \sqrt{X_s}\,dB_s^H$ is defined as a pathwise Stratonovich integral. Therefore the question about the first time of hitting zero of the Cox – Ingersoll – Ross process, which matches the first time of hitting zero of the fractional Ornstein – Uhlenbeck process, is natural. Since the latter is a Gaussian process, it is proved using the estimates for distributions of Gaussian processes that in case of $a < 0$ the probability of hitting zero in finite time equals 1, and in case of $a > 0$ it is positive but less than 1. The upper estimate of this probability is given.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПОТРАЕКТОРНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНОГО ПРОЦЕССА КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

Ю. С. МИШУРА, В. И. ПИТЕРБАРГ, К. В. РАЛЬЧЕНКО, А. Ю. ЮРЧЕНКО-ТИТАРЕНКО

Аннотация. Рассматривается дробный процесс Кокса – Ингерсолла – Росса, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) $dX_t = aX_t\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t^H$, управляемому дробным броуновским движением с индексом Хюрста, превышающим $\frac{2}{3}$, а интеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}\,dB_s^H$ определен как потраекторный, равный пределу интегральных сумм Римана – Стилтьеса. Установлено, что до момента первого попадания в ноль процесс Кокса – Ингерсолла – Росса является квадратом дробного процесса Орнштейна – Уленбека. Основываясь на этом, мы рассматриваем квадрат дробного процесса Орнштейна – Уленбека с произвольным индексом Хюрста и доказываем, что до первого момента попадания в ноль он удовлетворяет СДУ указанного вида, если интеграл $\int_0^t \sqrt{X_s}dB_s^H$ понимать как потраекторный интеграл Стратоновича. Естественно, возникает вопрос о моменте первого попадания в ноль дробного процесса Кокса – Ингерсолла – Росса, который совпадает с первым моментом попадания в ноль дробного процесса Орнштейна – Уленбека. Поскольку последний является гауссовским процессом, то с использованием оценок для распределений гауссовского процесса доказано, что при $a < 0$ вероятность попадания в ноль за конечное время равна 1, а при $a > 0$ она положительна, но меньше 1. Приведена верхняя оценка для этой вероятности.