Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 24–37

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 24–37

УДК 519.21

М'ЯКИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, КЕРОВАНОГО σ-СКІНЧЕННОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

О. О. ВЕРЦІМАХА, В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Досліджено стохастичне параболічне рівняння на $[0,T]\times\mathbb{R}$, кероване σ-скінченною стохастичною мірою. На стохастичний інтегратор накладається лише умова σ-адитивності за ймовірністю на обмежених борелівських множинах. Доведені існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку. Тим самим узагальнено результати, отримані раніше для звичайних стохастичних мір.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, σ-скінченна стохастична міра, стохастичне параболічне рівняння, м'який розв'язок, неперервність за Гельдером.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60H15, 60G57, 60G17.

1. Вступ

У цій роботі розглядається стохастичне рівняння

$$\begin{cases}\mathcal{L}u(t,x)dt + f\big(t,x,u(t,x)\big)\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu^{\sigma}(x) = 0\,,\\ u(0,x) = u_0(x)\,,\end{cases} \tag{1.1}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, μ^{σ} — σ-скінченна стохастична міра, визначена на обмежених борелівських підмножинах $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}$ — параболічний диференціальний оператор (відповідні означення та умови наведено нижче в розділах 2 та 3).

На стохастичний інтегратор μ^{σ} ми лише накладаємо умову σ-адитивності за ймовірністю на обмежених борелівських підмножинах $\mathbb{R}$. Доводиться існування м'якого розв'язку рівняння (1.1), див. означення в (3.2) нижче, неперервність за Гельдером його траєкторій.

Стохастичні параболічні рівняння розглядалися в багатьох публікаціях, див., наприклад, [1, 2]. Докладно вивчено рівняння та системи, керовані вінерівським процесом [3], нескінченновимірним вінерівським процесом [4], мартингальними мірами [5], α-стійкими процесами [6]. При цьому на стохастичний інтегратор накладалися певні умови існування моментів, мартингальності або незалежності приростів. Ми розглядаємо більш загальний інтегратор, але наш стохастичний доданок не залежить від невідомої функції. У цій роботі стохастичний інтегратор задано на множині значень просторової змінної. Аналогічні рівняння, керовані $d\mu(t)$, розглянуто в [7] і [8].

Рівняння вигляду (1.1), кероване звичайною стохастичною мірою μ, розглянуто в [9]. Наші міркування значною мірою спираються на результати і методи доведень цієї роботи. Раніше аналогічні твердження для рівняння теплопровідності було отримано в [10]. При цьому $\mu(\mathbb{R})$ була скінченною м. н. випадковою величиною, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна на $\mathbb{R}$ за μ, що є суттєвими обмеженнями для стохастичного інтегратора. Тому природним є узагальнення результатів [9] і [10] на рівняння, керовані σ-скінченними випадковими функціями множин.

Нашу роботу побудовано таким чином. У розділі 2 наведено попередні відомості про звичайні і σ-скінченні стохастичні міри. Розділ 3 містить точне означення розв'язку задачі (1.1), умови на елементи рівняння. У розділі 4 сформульовано і доведено основний результат роботи щодо розв'язку (1.1). Деякі допоміжні твердження, що використані в цьому доведенні, розглянуто в розділі 5.

2. Попередні відомості

Нехай $\mathsf{L}_0 = \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина всіх дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю. Нехай також X — довільна множина, а $\mathcal{B}$ — деяка σ-алгебра підмножин з X.

Означення 2.1. Довільне σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathsf{L}_0$ називається *стохастичною мірою.*

Як приклад стохастичної міри (СМ) ми можемо взяти

$$\mu(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A(s)\, dX(s),$$

де $X(s)$ — квадратично-інтегровний мартингал або процес дробового броунівського руху з показником Хюрста $H > 1/2$. Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують СМ, є в розділах 7 і 8 [11].

Теорія інтегрування дійсних функцій за СМ побудована, наприклад, у [11, 12]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегровною за будь-якою μ. Має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. [11, твердження 7.1.1] або [12, наслідок 1.2]).

СМ є стохастичним аналогом скінченних мір, $\mu(A)$ є скінченною м. н. випадковою величиною. Як аналог σ-скінченних дійсних мір у [12, розділ 2] було введено таке поняття.

Означення 2.2. Випадкова функція множин μ^σ називається *σ-скінченною стохастичною мірою*, якщо існує представлення

$$\mathsf{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j, \quad \mathsf{X}_j \in \mathcal{B}, \quad \mathsf{X}_j \subset \mathsf{X}_{j+1}, \tag{2.1}$$

при якому для кожного $j \geq 1$ μ^σ є стохастичною мірою на $\mathcal{B} \cap \mathsf{X}_j$.

Така μ^σ визначена не на всій $\mathcal{B}$, а на класі множин $\cup_{j\geq 1}(\mathcal{B} \cap \mathsf{X}_j)$. Очевидним чином, звичайна СМ є частинним випадком σ-скінченної СМ з $\mathsf{X}_j = \mathsf{X}$.

Означення 2.3. Вимірна функція $g\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ називається *інтегровною* за σ-скінченною СМ μ^σ, якщо g інтегровна за μ^σ на кожному X_j із представлення (2.1) і для кожної $A \in \mathcal{B}$ існує границя за ймовірністю

$$\operatorname{p\,lim}_{j\to\infty} \int_{A\cap \mathsf{X}_j} g\, d\mu^\sigma. \tag{2.2}$$

Тоді покладемо $\int_A g\, d\mu^\sigma$ рівним значенню цієї границі.

Приклад. Нехай $\mathcal{B}$ — борелівська σ-алгебра в $[0, +\infty)$, $\mathsf{X}_j = [0, j]$, $X(s)$, $s \geq 0$ — мартингал, $\mathsf{E}\, X^2(j) < +\infty$ для кожного j. Тоді рівність

$$\mu^\sigma(A \cap \mathsf{X}_j) = \int_{\mathsf{X}_j} \mathbf{1}_A(s)\, dX(s)$$

задає σ-скінченну СМ. Якщо вимірна функція $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ така, що

$$\mathsf{E} \int_{[0,+\infty)} g^2(s)\, d\langle X, X\rangle(s) < +\infty,$$

то g є інтегровною за даною μ^σ на $[0, +\infty)$. Відповідна границя в (2.2) існує в середньоквадратичному сенсі.

Інтеграли від дійсних функцій за σ-скінченними СМ докладно розглянуто в розділі 2 [12]. Зокрема, справедливі такі твердження.

Теорема 2.1 [12, лема 2.2, теорема 2.2]**.**
1. Нехай функція g інтегровна за μ^σ. Тоді функція множин

$$\eta(A) = \int_A g\, d\mu^\sigma, \quad A \in \mathcal{B},$$

є стохастичною мірою.

2. Вимірна функція $h\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ інтегровна за СМ η тоді і лише тоді, коли gh інтегровна за μ^σ. При цьому

$$\forall\, A \in \mathcal{B}: \quad \int_A h\, d\eta = \int_A gh\, d\mu^\sigma.$$

Теорема 2.2 [12, теорема 2.1]**.** *Нехай функція $g\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ інтегровна за μ^σ, функція $h\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ вимірна, $|h(x)| \le |g(x)|$ для всіх x. Тоді h інтегровна за μ^σ.*

Теорема 2.3 [12, теорема 2.4]**.** *Нехай g інтегровна за μ^σ за означенням 2.3 з даним представленням* (2.1)*. Тоді g інтегровна за μ^σ з будь-яким іншим представленням вигляду* (2.1)*, при якому μ^σ задовольняє означення 2.2. При цьому для кожної $A \in \mathcal{B}$ значення інтегралів $\int_A g\, d\mu^\sigma$ для цих двох представлень рівні м. н.*

3. Постановка задачі

Нехай далі $\mathsf{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ — борелівська σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}$, μ^σ — σ-скінченна СМ, що задовольняє означення 2.2 з $\mathsf{X}_j = [-j, j]$. Таким чином, $\mu^\sigma(A)$ визначена для всіх обмежених борелівських множин $A \subset \mathbb{R}$.

Розглянемо диференціальний оператор

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \tag{3.1}$$

де функції a, b, c визначено в циліндрі

$$S = [0,T] \times \mathbb{R} = \{(t,x) : t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ми будемо досліджувати м'який розв'язок рівняння (1.1), тобто таку вимірну функцію

$$u(t,x) = u(t,x,\omega)\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R},$$

що для кожної пари $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}$ наступна рівність виконується м. н.:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\, dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) f\big(s,y,u(s,y)\big)dy + \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu^\sigma(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\, ds\,. \tag{3.2}$$

Тут $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок оператора $\mathcal{L}$.

Будемо розглядати такі припущення:

$\mathbf{A}_{u_0}$ $u_0(y) = u_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ вимірна й обмежена: $|u_0(y,\omega)| \le C_{u_0}(\omega)$. Також $u_0(y)$ неперервна за Гельдером за $y \in \mathbb{R}$, а саме,

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \le L_{u_0}(\omega)|y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) \ge 1/2\,.$$

$\mathbf{A}_f$ $f(s,y,z)\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна й обмежена: $|f(s,y,z)| \le C_f$. Також $f(s,y,z)$ ліпшицьова за $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, тобто,

$$|f(s,y_1,z_1) - f(s,y_2,z_2)| \le L_f(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)\,.$$

$\mathbf{A}_\sigma$ $\sigma(s,y)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна і для будь-якого $\theta>0$ функція $\sigma_\theta(s,y) = \sigma(s,y)e^{-\theta y^2}$ обмежена: $|\sigma_\theta(s,y)|\le C_{\sigma,\theta}$. При цьому $\sigma_\theta(s,y)$ неперервна за Гельдером за $y\in\mathbb{R}$, тобто,

$$|\sigma_\theta(s,y_1)-\sigma_\theta(s,y_2)|\le L_{\sigma,\theta}|y_1-y_2|^{\beta(\sigma,\theta)},\quad \beta(\sigma,\theta)>1/2.$$

$\mathbf{A}_\mathcal{L}$ Функції $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ у (3.1) неперервні та обмежені в S, і для деяких $\alpha>0$, $L_\mathcal{L}>0$ всюди в S виконуються нерівності:

$$\begin{aligned}\big|a(t,x)-a(t^0,x^0)\big|&\le L_\mathcal{L}\Big(\big|x-x^0\big|^\alpha+\big|t-t^0\big|^\alpha\Big),\\ \big|b(t,x)-b(t,x^0)\big|&\le L_\mathcal{L}\big|x-x^0\big|^\alpha,\\ \big|c(t,x)-c(t,x^0)\big|&\le L_\mathcal{L}\big|x-x^0\big|^\alpha.\end{aligned}$$

При цьому оператор $\mathcal{L}$ — рівномірно параболічний в S, тобто, існують такі додатні сталі λ_0, λ_1, що $\lambda_0\le a(t,x)\le\lambda_1$ для всіх $(t,x)\in S$.

$\mathbf{A}_p$ Фундаментальний розв'язок оператора $\mathcal{L}$ є однорідним за просторовими змінними:

$$p(t,x;s,y)=p(t,x-y;s,0).$$

Відмітимо, що припущення A_p еквівалентне тому, що функції a, b, c в (3.1) не залежать від просторової змінної x.

Якщо виконується припущення $\mathrm{A}_\mathcal{L}$, то за [13, розділ 4, теорема 1] справедливі такі оцінки:

$$|p(t,x;s,y)|\le M(t-s)^{-\frac12}\exp\bigg\{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}\bigg\},\tag{3.3}$$

$$\bigg|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x}\bigg|\le M(t-s)^{-1}\exp\bigg\{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}\bigg\},\tag{3.4}$$

$$\bigg|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial t}\bigg|\le M(t-s)^{-\frac32}\exp\bigg\{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}\bigg\},\tag{3.5}$$

де λ та M — додатні сталі.

Усюди далі через C, C_1, C_2, C_3 ми будемо позначати додатні сталі, точне значення яких несуттєве.

4. Основний результат

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови A_{u_0}, A_f, A_σ, $\mathrm{A}_\mathcal{L}$, а функція $e^{-\theta y^2}$ інтегровна за μ^σ на $\mathbb{R}$ для кожного $\theta>0$. Тоді одержимо:*

1. Рівняння (3.2) має розв'язок $u(t,x)$. Якщо $v(t,x)$ — інший розв'язок (3.2), то для кожного $(t,x)\in S$ $u(t,x)=v(t,x)$ м.н.

Якщо додатково виконується припущення A_p, то дістанемо:

2. Для будь-яких фіксованих $t\in[0,T]$, $K>0$, $\gamma_1<1/2$, випадковий процес $u(t,x)$, $x\in[-K,K]$, має модифікацію, неперервну за Гельдером із показником γ_1.

3. Для будь-яких фіксованих $\delta>0$, $K>0$, $\gamma_1<1/2$, $\gamma_2<1/4$, випадкова функція $u(t,x)$ має модифікацію $\tilde u(t,x)$ таку, що для деякого $C_{\tilde u}(\omega)>0$ виконується

$$|\tilde u(t_1,x_1)-\tilde u(t_2,x_2)|\le C_{\tilde u}(\omega)(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|x_1-x_2|^{\gamma_1}),\quad t\in[\delta,T],\ x\in[-K,K].$$

Доведення. Ми будемо використовувати леми 5.1 та 5.2, доведення яких дано в наступному розділі. Для всіх інтегралів за стохастичною мірою розглядається модифікація (5.1).

Перепишемо (3.2) у вигляді

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) f\big(s,y,u(s,y)\big)\,dy + \\ + \int_{\mathbb{R}} d\eta_\theta(y) \int_0^t p_\theta(t,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds\,, \tag{4.1}$$

де σ_θ визначено в умові A_σ, а

$$p_\theta(t,x;s,y) = e^{2\theta y^2} p(t,x;s,y), \quad 0 < \theta < \frac{\lambda}{2T},$$

значення λ взято з нерівностей (3.3)–(3.5). СМ η_θ визначено рівністю

$$\eta_\theta(A) = \int_A e^{-\theta y^2} d\mu^\sigma(y), \quad A \in \mathcal{B},$$

рівність інтегралів за η_θ в (4.1) та за μ^σ в (3.2) випливає з теореми 2.1.

Із (3.3)–(3.5) при фіксованому K, для деяких $M_{K,\theta}, \lambda_\theta > 0$, для $|x| \le K$ отримуємо такі оцінки:

$$|p_\theta(t,x;s,y)| \le M_{K,\theta}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\frac{\lambda_\theta |x-y|^2}{t-s}\Big\}, \tag{4.2}$$

$$\left|\frac{\partial p_\theta(t,x;s,y)}{\partial x}\right| \le M_{K,\theta}(t-s)^{-1} \exp\Big\{-\frac{\lambda_\theta |x-y|^2}{t-s}\Big\}, \tag{4.3}$$

$$\left|\frac{\partial p_\theta(t,x;s,y)}{\partial t}\right| \le M_{K,\theta}(t-s)^{-\frac{3}{2}} \exp\Big\{-\frac{\lambda_\theta |x-y|^2}{t-s}\Big\}. \tag{4.4}$$

Пояснимо, наприклад, (4.2). Для $0 < \varepsilon < (\lambda - 2T\theta)/T$ маємо

$$|p_\theta(t,x;s,y)| \overset{(3.3)}{\le} \exp\{2\theta y^2\} M (t-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\frac{\lambda |x-y|^2}{t-s}\Big\} = \\ = M(t-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\frac{(\lambda - 2T\theta - T\varepsilon)|x-y|^2}{t-s}\Big\} \exp\Big\{2\theta y^2 - \frac{(2T\theta + T\varepsilon)|x-y|^2}{t-s}\Big\},$$

$$2\theta y^2 - \frac{(2T\theta + T\varepsilon)|x-y|^2}{t-s} \overset{t-s\le T}{\le} 2\theta\big(y^2 - (x-y)^2\big) - \varepsilon(x-y)^2. \tag{4.5}$$

Покладемо $\lambda_\theta = \lambda - 2T\theta - T\varepsilon$. При цьому

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \big(2\theta\big(y^2 - (x-y)^2\big) - \varepsilon(x-y)^2\big) = x^2\left(\frac{4\theta^2}{\varepsilon} + 2\theta\right) \overset{|x|\le K}{\le} K^2\left(\frac{4\theta^2}{\varepsilon} + 2\theta\right) =: M_1. \tag{4.6}$$

Ми можемо покласти $M_{K,\theta} = M\exp\{M_1\}$. Очевидно, із тими ж самими значеннями λ_θ і $M_{K,\theta}$ будуть виконуватись (4.3) і (4.4).

Доведення твердження 1. Скористаємось методом послідовних наближень, аналогічно міркуванням із [10], поклавши $u^{(0)}(t,x) = 0$ та

$$u^{(n+1)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) f\Big(s,y,u^{(n)}(s,y)\Big)dy + \\ + \int_{\mathbb{R}} d\eta_\theta(y) \int_0^t p_\theta(t,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds\,, \quad n \ge 0. \tag{4.7}$$

Для всіх $\omega \in \Omega$, $n \ge 2$ справедлива оцінка

$$\Big|u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\Big| \overset{\mathrm{A}_f}{\le} L_f \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) \Big|u^{(n)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\Big|\,dy\,. \tag{4.8}$$

Оскільки з накладених умов та рівності $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/b^2} dz = Cb$ випливає, що

$$\int_{\mathbb{R}} |p(t,x;s,y)|\, dy \le M \int_{\mathbb{R}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{t-s}}\, dy = C, \tag{4.9}$$

можемо записати

$$\left| u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x) \right| \le 2C_f \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x;s,y)|\, dy \le 2Ct\,.$$

Розглянувши

$$g_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x) \right|, \quad n \ge 1\,,$$

із (4.8) отримаємо

$$g_n(t) \le L_f \int_0^t g_{n-1}(s) ds\,.$$

За індукцією,

$$g_n(t) \le 2C_f L_f^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,, \tag{4.10}$$

тому послідовність $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ рівномірно збігається на $[0,T]$. Покладемо $u(t,x) := \lim_{n\to\infty} u^{(n)}(t,x)$. Переходячи до границі в (4.7) при $n \to \infty$, маємо (3.2).

Доведемо єдиність розв'язку. Якщо $u(t,x)$ та $v(t,x)$ — два різні розв'язки рівняння (3.2), то

$$u(t,x) - v(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) \big[f\big(s,y,u(s,y)\big) - f\big(s,y,v(s,y)\big) \big] dy\,.$$

Використовуючи припущення A_f, можемо повторити міркування від (4.8) до (4.10) для

$$g(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - v(t,x)|$$

та отримати, що

$$g(t) \le 2C_f L_f^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \le 2C_f L_f^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Отже, при $n \to \infty$ одержуємо, що $g = 0$, тому розв'язок єдиний.

Доведення твердження 2. Розглянемо умову Гельдера за x на обмежених підмножинах $\mathbb{R}$. Користуючись індукцією, доведемо, що для всіх $n \ge 0$ існує таке $L_{u^{(n)}}(t) > 0$, що

$$\left| u^{(n)}(t,x_1) - u^{(n)}(t,x_2) \right| \le L_{u^{(n)}}(t) |x_1 - x_2|^{\gamma_1}.$$

Маємо $L_{u^{(0)}} = 0$.

За допомогою (4.7), леми 5.1, заміни змінних $y \to y + x_2 - x_1$ в інтегралах за y з x_2 та початкових припущень можемо записати

$$\begin{aligned}
&\left| u^{(n+1)}(t,x_1) - u^{(n+1)}(t,x_2) \right| \le \int_{\mathbb{R}} p(t,x_1;0,y) |u_0(y) - u_0(y + x_2 - x_1)|\, dy + \\
&+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x_1;s,y) \Big| f\Big(s,y,u^{(n)}(s,y)\Big) - f\Big(s, y + x_2 - x_1, u^{(n)}(s, y + x_2 - x_1)\Big) \Big| dy + \\
&+ C|x_1 - x_2|^{\gamma_1} \le L_{u_0} |x_1 - x_2|^{\beta(u_0)} + \\
&+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t-s, x_1 - y) L_f \big(|x_1 - x_2| + L_{u^{(n)}}(s) |x_1 - x_2|^{\gamma_1} \big) dy + C|x_1 - x_2|^{\gamma_1}\,.
\end{aligned}$$

Отже,

$$L_{u^{(n+1)}}(t) \le L + L \int_0^t L_{u^{(n)}}(s)\, ds$$

для деякої сталої L, і твердження доведено. За індукцією ми знаходимо скінченну верхню межу

$$L_{u^{(n)}}(t) \le Le^{Lt} \le Le^{LT},$$

що доводить неперервність за Гельдером по x. При цьому L не залежить від t.

Доведення твердження 3. Повністю повторюємо міркування з доведення твердження 3 у [9], використовуючи лему 5.2. □

Зауваження 4.1. Якщо μ^σ в теоремі 4.1 є звичайною СМ, то умова інтегровності функції $e^{-\theta y^2}$ за μ^σ завжди виконується (адже ця функція обмежена), також є інтегровною і функція $|y|^\tau e^{-\theta y^2}$. Тим самим ми отримуємо, що теорема [9] є частинним випадком нашої теореми, а твердження теореми з [9] залишається справедливим і без накладання умови інтегровності $|y|^\tau$ за СМ.

5. Допоміжні твердження

Розглянемо простір Бєсова $B^\alpha_{22}([c,d])$, $0<\alpha<1$. Функція $g\in B^\alpha_{22}([c,d])$, якщо скінченна її норма у просторі Бєсова:

$$\|g\|_{B^\alpha_{22}([c,d])} = \|g\|_{L_2([c,d])} + \left(\int_0^{d-c} \big(w_2(g,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2},$$

де

$$w_2(g,r) = \sup_{0\le h\le r}\left(\int_c^{d-h} |g(v+h)-g(v)|^2\,dv\right)^{1/2}.$$

Покладемо для довільного $j\in\mathbb{Z}$

$$\Delta^{(j)}_{kn} = \big(j+(k-1)2^{-n}, j+k2^{-n}\big], \quad n\ge 0, \quad 1\le k\le 2^n.$$

Нехай Z — довільна множина, а функція $g(z,v)\colon Z\times[j,j+1]\to\mathbb{R}$ неперервна за другою координатою $\forall z\in Z$. Позначимо

$$g_n(z,v) = g(z,j)\mathbf{1}_{\{j\}}(v) + \sum_{1\le k\le 2^n} g\big(z, j+(k-1)2^{-n}\big)\mathbf{1}_{\Delta^{(j)}_{kn}}(v).$$

Тоді

$$\zeta(z) = \int_{[j,j+1]} g(z,v)d\mu(v), \quad z\in Z,$$

має модифікацію

$$\widetilde{\zeta}(z) = \int_{[j,j+1]} g_0(z,v)d\mu(v) + \sum_{n\ge 1}\left(\int_{[j,j+1]} g_n(z,v)d\mu(v) - \int_{[j,j+1]} g_{n-1}(z,v)d\mu(v)\right) \tag{5.1}$$

таку, що для всіх $\omega\in\Omega$, $z\in Z$ виконується

$$\big|\widetilde{\zeta}(z)\big| \le \big|g(z,j)\mu([j,j+1])\big| + C\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([j,j+1])}\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{-n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\Big(\Delta^{(j)}_{kn}\Big)\right|^2\right\}^{\frac12}. \tag{5.2}$$

Це випливає леми 3 [14] та теореми 1.2 [15].

Доведемо наступну лему, що є аналогом леми 1 [9], але не накладає умови однорідності функції p_θ за просторовими координатами.

Лема 5.1. *Нехай виконуються припущення* A_σ, $\mathrm{A}_{\mathcal{L}}$ *і* A_p. *Тоді для довільних фіксованих* $t\in[0,T]$, $K>0$ *та* $\gamma_1<1/2$ *випадковий процес*

$$\vartheta_\theta(x) = \int_{\mathbb{R}} d\eta_\theta(y)\int_0^t p_\theta(t,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds, \quad |x|\le K,$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером із показником γ_1.

Доведення. Для всіх стохастичних інтегралів розглядатимемо модифікацію (5.1). Скористаємося міркуваннями, використаними в [9] для доведення аналогічної леми.

Розглянемо для фіксованих t, $x_1 \le x_2$

$$q(z,y) = \int_0^t p_\theta(t,x_1;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds - \int_0^t p_\theta(t,x_2;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds,\ z=(t,x_1,x_2),\ y\in\mathbb{R}.$$

Оцінимо норму функції $q(z,\cdot)$ у просторі Бєсова на $[j,j+1]$. Розглянемо

$$\begin{aligned} q(z,y+h)-q(z,y) = &\int_0^t \big(p_\theta(t,x_1;s,y)-p_\theta(t,x_2;s,y)\big)\big(\sigma_\theta(s,y+h)-\sigma_\theta(s,y)\big)ds + \\ &+\int_0^t \big(p_\theta(t,x_1;s,y+h)-p_\theta(t,x_1;s,y)-p_\theta(t,x_2;s,y+h)+ \\ &+p_\theta(t,x_2;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y+h)\,ds =: I_1+I_2. \end{aligned}$$

Спочатку припустимо, що $|y|\le K+1$. Аналогічно відповідним міркуванням із [9], застосувавши оцінку

$$\int_0^t \frac{1}{r}e^{-\frac{b}{r}}dr = \Big|\tfrac{b}{r}=z\Big| = \int_{b/t}^\infty \frac{1}{z}e^{-z}dz \le \mathbf{1}_{\{t>b\}}\int_{b/t}^1 \frac{1}{z}\,dz + \int_1^\infty e^{-z}dz \le \left|\ln\frac{T}{b}\right|+1,$$

можемо записати

$$\begin{aligned} \int_0^t \big|p_\theta(t,x_1;s,y)-p_\theta(t,x_2;s,y)\big|ds &\le \int_0^t\left(\frac{C}{t-s}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{\lambda_\theta|x-y|^2}{t-s}}dx\right)ds = \\ &= \Big|t-s=r\Big| = \int_{x_1}^{x_2}dx\int_0^t \frac{1}{r}e^{-\frac{\lambda_\theta|x-y|^2}{r}}dr \le \\ &\le \int_{x_1}^{x_2}\left(\left|\ln\frac{T}{\lambda_\theta|x-y|^2}\right|+1\right)dx \le C_1|x_1-x_2| + C_2\int_{x_1}^{x_2}\big|\ln|x-y|\big|dx \le \\ &\le C_1|x_1-x_2| + C_3\int_0^{|x_1-x_2|/2}|\ln z|dz = \\ &= C_1|x_1-x_2| + C_3(z-z\ln z)\Big|_0^{|x_1-x_2|/2} \le C|x_1-x_2|^\gamma, \end{aligned} \tag{5.3}$$

де $0<\gamma<1$ довільне, стала C залежить від γ, λ, K, T. Ми використали міркування про те, що при фіксованому $|x_1-x_2|<1$ та x_1 або x_2 з $[y-1,y+1]$, значення $\int_{x_1}^{x_2}\big|\ln|x-y|\big|\,dx$ буде найбільшим, коли x_1 та x_2 симетричні відносно y. При іншому розташуванні $[x_1,x_2]\subset[-K,K]$ і $|y|\le K+1$ це значення не перевищує $|\ln(2K+1)|\cdot|x_1-x_2|$. Також застосували той факт, що для $x_1,x_2\in\{x\in\mathbb{R}\colon |x|\le K\}$ та $\forall\gamma<1\colon |x_1-x_2|^{1-\gamma}\ln|x_1-x_2|\le C$, оскільки $|x_1-x_2|^{1-\gamma}\ln|x_1-x_2|\to 0$, $|x_1-x_2|\to 0$.

Якщо $|y|>K+1$, то в (5.3) $|x-y|\ge 1$, і відповідне значення не перевищує

$$\int_0^t\left(\frac{C}{t-s}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{\lambda_\theta}{t-s}}dx\right)ds = C|x_1-x_2|.$$

Звідки отримуємо оцінки

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \int_0^t \big(|p_\theta(t,x_1;s,y)-p_\theta(t,x_2;s,y)|\big)\big(|\sigma_\theta(s,y+h)-\sigma_\theta(s,y)|\big)\,ds \le \\ &\le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}|x_1-x_2|^\gamma, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$|I_2| \le C|x_1-x_2|^\gamma. \tag{5.5}$$

Оцінимо доданки з I_2, що містять x_1. Доданки з x_2 розглядаються аналогічно.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t \big(p_\theta(t,x_1;s,y+h)-p_\theta(t,x_1;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y+h)\,ds\right| \le \\
&\quad\le C_{\sigma,\theta}\int_0^t \left|e^{2\theta(y+h)^2}p(t,x_1;s,y+h)-e^{2\theta y^2}p(t,x_1;s,y)\right|ds \le \\
&\quad\le C\int_0^t e^{2\theta(y+h)^2}\big|p(t,x_1;s,y+h)-p(t,x_1;s,y)\big|\,ds + \\
&\quad\quad + C\int_0^t \left|e^{2\theta(y+h)^2}-e^{2\theta y^2}\right||p(t,x_1;s,y)|\,ds =: CJ_1+CJ_2, \\
&\quad J_1 \overset{A_p}{=} \int_0^t e^{2\theta(y+h)^2}\big|p(t,x_1-h;s,y)-p(t,x_1;s,y)\big|\,ds = \\
&\quad\quad = \int_0^t ds\left|\int_{x_1-h}^{x_1} e^{2\theta(y+h)^2}\,\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x}\,dx\right| \overset{(3.4)}{\le} \\
&\quad\quad \overset{(3.4)}{\le} C\int_0^t \frac{ds}{t-s}\int_{x_1-h}^{x_1} e^{2\theta(y+h)^2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}\,dx.
\end{aligned}$$

Для $0\le h\le 1$, аналогічно (4.5)–(4.6), маємо

$$e^{2\theta(y+h)^2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}} \le \widetilde{M}_{K,\theta}\exp\left\{-\frac{\lambda_\theta|x-y|^2}{t-s}\right\}.$$

Також для $0<\beta<\lambda_\theta/T$ отримуємо

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^t \left|e^{2\theta\left((y+h)^2-y^2\right)}-1\right||p_\theta(t,x_1;s,y)|\,ds \le \\
&\overset{|e^z-1|\le|z|e^{|z|},h\le 1}{\le} 2\theta h\int_0^t e^{2\theta(2|y|+1)}(2|y|+1)|p_\theta(t,x_1;s,y)|\,ds = \\
&= 2\theta h\int_0^t e^{2\theta(2|y|+1)-\beta y^2}(2|y|+1)\left|e^{\beta y^2}p_\theta(t,x_1;s,y)\right|ds.
\end{aligned}$$

Тут $e^{2\theta(2|y|+1)-\beta y^2}(2|y|+1)$ — обмежена функція, для $p_{\beta,\theta}=e^{\beta y^2}p_\theta$ можна отримати нерівність, аналогічну (4.2), звідки $\int_0^t p_{\beta,\theta}ds \le C\int_0^t (t-s)^{-1/2}ds = C$. Тому $|J_2|\le Ch$, а для $\gamma<1$

$$|I_2|\le Ch^\gamma. \tag{5.6}$$

Дослідимо тепер модуль неперервності:

$$\big(w_2(q,r)\big)^2 \le 2\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_1^2dy + 2\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2dy.$$

Маємо за співвідношеннями (5.4):

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_1^2dy \le C|x_1-x_2|^{2\gamma}\sup_{0\le h\le r} h^{2\beta(\sigma,\theta)}(1-h) \le Cr^{2\beta(\sigma,\theta)}|x_1-x_2|^{2\gamma}.$$

Міркуючи аналогічно для випадку I_2, з (5.5) та (5.6) отримуємо

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2dy \le C|x_1-x_2|^{2\gamma}$$

та

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2dy \le Cr^{2\gamma}.$$

Із двох останніх нерівностей для $0 < \delta < 1$ отримуємо

$$\sup_{0 \le h \le r} \int_j^{j+1-h} I_2^2 dy \le C r^{2\gamma(1-\delta)} |x_1 - x_2|^{2\gamma\delta}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\big(w_2(q,r)\big)^2 &\le C r^{2\beta(\sigma,\theta)} |x_1 - x_2|^{2\gamma} + C r^{2\gamma(1-\delta)} |x_1 - x_2|^{2\gamma\delta} \le \\ &\le C |x_1 - x_2|^{2\gamma\delta} \Big(r^{2\beta(\sigma,\theta)} + r^{2\gamma(1-\delta)} \Big).\end{aligned}$$

Щоб інтеграл із формули для норми у просторі Бєсова був скінченним, необхідно аби справджувалась нерівність

$$2\gamma(1-\delta) > 2\alpha \Leftrightarrow \gamma\delta < \gamma - \alpha.$$

При $\gamma \to 1-$ та $\alpha \to 1/2+$, показник гельдеровості $\gamma\delta \to 1/2-$.

Отже, для довільного $0 < \gamma_1 < 1/2$ існує $\alpha > 1/2$ таке, що

$$\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([j,j+1])} \le C |x_1 - x_2|^{\gamma_1}.$$

Крім того, аналогічні міркування, як і при оцінюванні (5.5), приводять до нерівностей

$$|q(z,j)| \le C|x_1 - x_2|^{\gamma}, \qquad \|q(z,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \le C|x_1 - x_2|^{\gamma}.$$

Далі вже отримуємо гельдеровість ϑ_θ:

$$\begin{aligned} |\vartheta_\theta(x_1) - \vartheta_\theta(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(y)\, d\eta_\theta(y) \right| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \int_j^{j+1} g(y)\, d\eta_\theta(y) \right| \le \\ &\overset{(5.2)}{\le} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big| q(z,j)\, \eta_\theta([j,j+1]) \big| + \\ &+ C \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([j,j+1])} \left\{ \sum_{n\ge1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left| \eta_\theta\Big(\Delta_{kn}^{(j)}\Big) \right|^2 \right\}^{1/2} \le \\ &\le C|x_2 - x_1|^{\gamma_1} \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\eta_\theta([j,j+1])| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\{ \sum_{n\ge1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left| \eta_\theta\Big(\Delta_{kn}^{(j)}\Big) \right|^2 \right\}^{1/2} \right] \le \\ &\le C|x_2 - x_1|^{\gamma_1} \left[\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^2 (\eta_\theta([j,j+1]))^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^{-2} \right)^{1/2} + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{n\ge1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^2 \sum_{1\le k\le 2^n} \left| \eta_\theta\Big(\Delta_{kn}^{(j)}\Big) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^{-2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

де суми зі стохастичними мірами мають вигляд $\sum_{l=1}^{\infty} \big(\int_{\mathsf{X}} f_l\, d\eta_\theta \big)^2$,

$$\{f_l(y),\, l\ge 1\} = \big\{ (|j|+1)\, \mathbf{1}_{[j,j+1]}(y),\, j\in\mathbb{Z} \big\},$$

$$\{f_l(y),\, l\ge 1\} = \Big\{ (|j|+1) 2^{n(1-2\alpha)/2} \mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\, j\in\mathbb{Z},\, n\ge 1,\, 1\le k\le 2^n \Big\}.$$

Із теореми 2.1 отримуємо, що

$$\int_A (|y|+1)\, d\eta_\theta = \int_A (|y|+1) e^{-\theta y^2} d\mu^\sigma(y).$$

Оскільки $(|y|+1)e^{-\theta y^2} \le Ce^{(-\theta/2)y^2}$, а $e^{(-\theta/2)y^2}$ інтегровна за μ^σ, із теорем 2.1 і 2.2 отримуємо інтегровність функції $\sum_{l=1}^{\infty} f_l$. Із леми 3.1 [10] випливає, що

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_{\mathsf{X}} f_l\, d\eta_\theta\right)^2 < +\infty \quad \text{м. н.},$$

що і завершує доведення нашої теореми. □

Наступне твердження є аналогом леми 2 [9].

Лема 5.2. *Нехай виконуються припущення* A_f, A_σ, $\mathrm{A}_{\mathcal{L}}$, A_p. *Тоді для будь-яких фіксованих* $x \in \mathbb{R}$ *та* $\gamma_2 < 1/4$ *випадковий процес*

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{\mathbb{R}} d\eta_\theta(y) \int_0^t p_\theta(t,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером із показником γ_2.

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$ — довільні фіксовані. Покладемо

$$\hat{q}(z,y) = \int_0^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds - \int_0^{t_1} p_\theta(t_1,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds, \quad z=(t_1,t_2,x).$$

Тоді для модифікації (5.1) стохастичного інтеграла

$$\hat{\eta}(z) = \int_{[j,j+1]} \hat{q}(z,y)\,d\eta_\theta(y)$$

виконується співвідношення (5.2). Оцінимо норму простору Бєсова функції $\hat{q}(z,\cdot)$. Маємо

$$\begin{aligned}
\hat{q}(z,y+h) - \hat{q}(z,y) &= \int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y+h) - p_\theta(t_1,x;s,y+h)\big)\sigma_\theta(s,y+h)\,ds - \\
&\quad - \int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y) - p_\theta(t_1,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y+h)\sigma_\theta(s,y+h)\,ds - \int_{t_1}^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds = \\
&= \int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y+h) - p_\theta(t_1,x;s,y+h)\big)\big(\sigma_\theta(s,y+h) - \sigma_\theta(s,y)\big)\,ds + \\
&\quad + \int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y+h) - p_\theta(t_2,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds - \\
&\quad - \int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_1,x;s,y+h) - p_\theta(t_1,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y+h)\big(\sigma_\theta(s,y+h) - \sigma_\theta(s,y)\big)\,ds + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}\big(p_\theta(t_2,x;s,y+h) - p_\theta(t_2,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds =: \\
&=: J_{11} + J_{12} - J_{13} + J_{21} + J_{22} =: J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

За припущенням A_σ, використовуючи (4.2), отримуємо

$$\begin{aligned}
|J_{21}| &\le Ch^{\beta(\sigma,\theta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda_\theta |x-y-h|^2}{t_2-s}}\,ds \le Ch^{\beta(\sigma,\theta)} \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}\,ds = \\
&= Ch^{\beta(\sigma,\theta)}(t_2-t_1)^{1/2}. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Далі, з одного боку,

$$|J_{22}| \le \left|\int_{t_1}^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y+h)\sigma_\theta(s,y)ds\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2} p_\theta(t_2,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)ds\right| \le$$
$$\le C\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}e^{-\frac{\lambda_\theta|x-y-h|^2}{t_2-s}}ds + C\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}e^{-\frac{\lambda_\theta|x-y|^2}{t_2-s}}ds \le$$
$$\le C(t_2-t_1)^{1/2}. \tag{5.8}$$

З іншого боку, застосовуючи аналогічні міркування, що й при отриманні (5.5), маємо

$$|J_{22}| \le C\int_{t_1}^{t_2}\int_{x-h}^{x}\left|\frac{\partial p_\theta(t_2,v;s,y)}{\partial v}\right|dv\,ds \le$$
$$\le C\int_{t_1}^{t_2}\int_{x-h}^{x}(t_2-s)^{-1}e^{-\frac{\lambda_\theta|v-y|^2}{t_2-s}}dv\,ds \le Ch^{\gamma_0}, \tag{5.9}$$

де $0<\gamma_0<1$ — довільне та константа C залежить від γ_0.

Отже, перемноживши результати (5.8) та (5.9) у степенях δ_0 та $1-\delta_0$ відповідно, $\delta_0 \in (0,1)$, ми одержимо з урахуванням (5.7), що

$$|J_2| \le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}(t_2-t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\delta_0)\gamma_0}(t_2-t_1)^{\delta_0/2} \le C(t_2-t_1)^{\delta_0/2}\Big(h^{\beta(\sigma,\theta)}+h^{(1-\delta_0)\gamma_0}\Big).$$

При $\gamma_0 \to 1-$, а $1-\delta_0 \to 1/2+$ отримуємо $(1-\delta_0)\gamma_0 > 1/2$ та $\delta_0 \to 1/2-$.

Використовуючи A_σ та (4.4), можемо записати

$$|J_{11}| \le L_{\sigma,\theta}h^{\beta(\sigma,\theta)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p_\theta(\tau,x;s,y+h)}{\partial\tau}\right|d\tau\,ds \le$$
$$\le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda_\theta|x-y-h|^2}{\tau-s}}\,d\tau\,ds \le$$
$$\le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}\,d\tau\,ds \le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}(t_2-t_1)^{1/2}. \tag{5.10}$$

Аналогічно, за A_σ маємо

$$|J_{12}-J_{13}| = \left|\int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y+h)-p_\theta(t_1,x;s,y+h)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds\,-\right.$$
$$\left.-\int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y)-p_\theta(t_1,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds\right| \le$$
$$\le C\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p_\theta(\tau,x;s,y+h)}{\partial\tau}\right|d\tau\,ds + C\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p_\theta(\tau,x;s,y)}{\partial\tau}\right|d\tau\,ds \le$$
$$\le C(t_2-t_1)^{1/2}. \tag{5.11}$$

З іншого боку, такі ж міркування, як і при отриманні (5.9), приводять до оцінки

$$|J_{12}-J_{13}| \le |J_{12}|+|J_{13}| \le Ch^{\gamma_0}. \tag{5.12}$$

Отже, перемноживши результати (5.11) та (5.12) у степенях δ_0 та $1-\delta_0$ відповідно, ми одержимо з урахуванням (5.10)

$$|J_1| \le Ch^{\beta(\sigma,\theta)}(t_2-t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\delta_0)\gamma_0}(t_2-t_1)^{\delta_0/2} \le C(t_2-t_1)^{\delta_0/2}\Big(h^{\beta(\sigma,\theta)}+h^{(1-\delta_0)\gamma_0}\Big).$$

Таким чином, маємо

$$|\hat{q}(z,y+h)-\hat{q}(z,y)| \le C(t_2-t_1)^{\delta_0/2}\Big(h^{\beta(\sigma,\theta)}+h^{(1-\delta_0)\gamma_0}\Big)$$

і тоді

$$\left(\int_0^1 \big(w_2(g,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2} \le$$
$$\le C(t_2-t_1)^{\delta_0/2}\left(\int_0^1 r^{2\beta(\sigma,\theta)-2\alpha-1}dr+\int_0^1 r^{2(1-\delta_0)\gamma_0-2\alpha-1}dr\right)^{1/2} \le C(t_2-t_1)^{\delta_0/2}$$

для відповідного $1/2<\alpha<\min\{(1-\delta_0)\gamma_0,\beta(\sigma,\theta)\}$.

Крім того, для $y\in\mathbb{R}$ за (5.8) та (5.11)

$$|\hat{q}(z,y)| = \left|\int_0^{t_1}\big(p_\theta(t_2,x;s,y)-p_\theta(t_1,x;s,y)\big)\sigma_\theta(s,y)\,ds+\int_{t_1}^{t_2}p_\theta(t_2,x;s,y)\sigma_\theta(s,y)\,ds\right| \le$$
$$\le C(t_2-t_1)^{1/2},$$

а тому

$$\|\hat{q}(z,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \le C(t_2-t_1)^{1/2}, \qquad |\hat{q}(z,j)| \le C(t_2-t_1)^{1/2}.$$

Завершення цього доведення повторює завершення доведення леми 5.1. □

6. Висновки

Для стохастичного параболічного рівняння, керованого σ-скінченною стохастичною мірою, доведено існування та єдиність розв'язку, неперервність за Гельдером його траєкторій. Уперше розглянуто рівняння з таким інтегратором, узагальнено твердження, отримане в [9], при цьому послаблені деякі умови роботи [9].

Список літератури

1. D. Khoshnevisan, *Analysis of stochastic partial differential equations*, American Mathematical Soc., Providence, 2014.
2. P. L. Chow, *Stochastic partial differential equations*, CRC Press, Boca Raton, 2014.
3. P. A. Cioica, K. H. Kim, K. Lee, F. Lindner, *On the $L_q(L_p)$-regularity and Besov smoothness of stochastic parabolic equations on bounded Lipschitz domains*, Electron. J. Probab., **18** (2013), no. 82, 1–41.
4. J. Dettweiler, L. Weis, J. van Neerven, *Space-time regularity of solutions of the parabolic stochastic Cauchy problem*, Stoch. Anal. Appl., **24** (2006), no. 4, 843–869.
5. J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer, Berlin, 1986, 265–439.
6. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Approximations for a solution to stochastic heat equation with stable noise*, Mod. Stoch. Theory Appl., **3** (2016), no. 2, 133–144.
7. I. M. Bodnarchuk, G. M. Shevchenko, *Heat equation in a multidimensional domain with a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **93** (2016), 1–17.
8. V. Radchenko, *Riemann integral of a random function and the parabolic equation with a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **87** (2013), 185–198.
9. I. M. Bodnarchuk, *Regularity of the mild solution of a parabolic equation with stochastic measure*, Ukrain. Mat. Zh., **69** (2017), no. 1, 3–16. (Ukrainian)
10. V. M. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math., **194** (2009), no. 3, 231–251.
11. S. Kwapień, W. A. Woycziński, *Random series and stochastic integrals: single and multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
12. V. N. Radchenko, *Integrals with respect to general stochastic measures*, Proceedings of Institute of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 1999. (Russian)
13. A. M. Ilyin, A. S. Kalashnikov, O. A. Oleynik, *Linear second-order partial differential equations of the parabolic type*, J. Math. Sci., **108** (2002), no. 4, 435–542.
14. V. N. Radchenko, *Evolution equations with general stochastic measures in Hilbert space*, Theory Probab. Appl., **59** (2015), no. 2, 328–339.
15. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl., **13** (1997), no. 2, 63–77.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: oksana.vertsim@gmail.com

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 15.05.2017

MILD SOLUTION OF A PARABOLIC EQUATION DRIVEN BY A σ-FINITE STOCHASTIC MEASURE

O. O. VERTSIMAKHA, V. M. RADCHENKO

Abstract. The stochastic parabolic equation on $[0,T]\times\mathbb{R}$ driven by σ-finite stochastic measure is investigated. For the integrator we assume σ-additivity in probability on bounded Borel sets only. Existence and uniqueness of the mild solution is established. Hölder continuity of the solution is proved. Thus, we get a generalisation of results obtained for usual stochastic measures in previous papers.

МЯГКОЕ РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, УПРАВЛЯЕМОГО σ-КОНЕЧНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

О. О. ВЕРЦИМАХА, В. Н. РАДЧЕНКО

Аннотация. Исследовано стохастическое параболическое уравнение на $[0,T]\times\mathbb{R}$, управляемое σ-конечной стохастической мерой. На стохастический интегратор накладывается только условие σ-аддитивности по вероятности на ограниченных борелевских множествах. Доказаны существование, единственность и непрерывность по Гельдеру мягкого решения. Тем самым обобщены результаты, полученные ранее для обычных стохастических мер.