Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 38–47

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 38–47

УДК 519.21

ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНОЇ МАЖОРАНТИ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ РОЗПОДІЛІВ ТА ЇХНЄ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПОСЛІДОВНОСТІ ВІДНОВЛЕННЯ, ПОРОДЖЕНОЇ НЕОДНОРІДНИМ ЛАНЦЮГОМ МАРКОВА

В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Розглядається узагальнене стохстичне мажорування, коли мажоруюча послідовність не обов'язково є ймовірнісним розподілом і може мати повну масу більше одиниці. Вивчаються питання мажорування сум випадкових величин, випадкових сум як незалежних, так і залежних випадкових величин. Побудовано мажоранту для послідовності відновлення, що породжена неоднорідним ланцгом Маркова. Розглядаються лише дискретні випадкові величини.

Ключові слова і фрази. Дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

1. Вступ

У роботі вивчаються властивості стохастичної мажоранти для дискретного розподілу у дещо розширеному сенсі. Класичне означення стохастичного мажорування виглядає таким чином.

Кажуть, що випадкова величина ξ стохастично домінує над випадковою величиною η, якщо $\mathsf{P}\{\xi > x\} \geq \mathsf{P}\{\eta > x\}$ для всіх x. Або іншими словами, якщо функція розподілу ξ поточково менша за функцію розподілу η.

Для невід'мних дискретних випадкових величин, які є основним об'єктом розгляду роботи, це означення можна переформулювати таким чином: нехай ξ має розподіл p_i, а η має розподіл g_i. Тоді ξ буде стохастично мажорувати η, якщо

$$\sum_{k\geq n} p_k \geq \sum_{k\geq n} g_k.$$

Історично стохастична мажорованість зустрічається у різних застосуваннях. Зокрема у фінансовій математиці та математичній економіці як спосіб порівняння лотерей.

У роботі [11] вивчаються питання стохастичного мажорування деяких стандартних дискретних розподілів, таких як розподіл Бернуллі. Там же вказано типові методи які використовуються для доведення властивостей стохастичної мажоранти.

Однак, стохастична мажоранта також відіграє велику роль при аналізі неоднорідних ланцюгів Маркова, та послідовностей відновлення, що породжені цими ланцюгами. Якщо, розглядати послідовность θ_k — час до наступного попадання ланцюга Маркова в деяку множину, то для неоднорідних ланцюгів така послідовність звичайно не є однорідною, крім того розподіл кожної наступної θ_k залежить від значення суми $\sum_{j=0}^{k-1}\theta_j$ (більш детально про це див. [4]). Для роботи з такими послідовностями використовується стохастична мажоранта. Зокрема вказаний підхід можна зустріти в таких роботах. У [4] стохастична мажоранта є однією з умов існування скінченного математичного сподівання для часу склеювання. У [5] стохастична мажоранта використана для узагальнення нерівності Дейлі на неоднорідний випадок, у роботі [6] знову використовується стохастична мажоранта для оцінки математичного сподівання часу склеювання.

Окрім цього стохастична мажоранта відіграє ключову роль для побудови оцінок стійкості для збуреного неоднорідного ланцюга Маркова за відсутності умови рівносильної рівномірній ергодичності в роботі [7] (за умов рівносильних рівномірній ергодичності оцінка стійкості може бути побудвана дещо простіше — див. роботи [8–10]).

Виявляється, що при аналізі ланцюгів Маркова зручно послабити означення стохастичної мажоранти і відмовитись від того, щоб вона була ймовірнісним розподілом, дозволивши повній сумі стохастично мажоруючої послідовності бути більшою 1 (див. наприклад [6]). У перелічених вище роботах [4–7] таке послаблення виконується.

У цьому випадку, коли повна маса мажоруючої послідовності може бути більше 1, звичайно не можна говорити про те що, одна випадкова величина мажорує іншу, натомість ітиметься про послідовність, яка мажорує розподіл випадкової величини.

Однак виявилось, що властивості стохастичної мажоранти, які добре відомі для стандартного випадку (коли мажоруюча послідовність є розподілом), потребують окремого доведення у випадку, коли повна сума мажоруючої послідовності може бути більше 1.

Окрім того, при дослідженні стійкості збуреного ланцюга Маркова в [7] виникла необхідність побудови стохастичної мажоранти для сум випадкової кількості випадкових величин, що певним чином залежать одна від одної (послідовності відновлення для деякого неоднорідного ланцюга Маркова).

Вивченню вказаних питань і присвячена ця стаття. У першому розділі роботи містяться основні означення та вводяться позначення, які будуть використані в подальшому. У другому розділі доведено декілька властивостей стохастичної мажоранти, а саме — мажорування суми двох незалежних випадкових величин, мажорування випадкової суми незалежних випадкових величин.

У третьому розділі розглянуто питання мажорування послідовності відновлення, породженої неоднорідним ланцюгом Маркова.

2. Основні позначення

Будемо казати, що послідовність $\{s_n, n \geq 0\}$ стохастично мажорує розподіл $\{g_n, n \geq 0\}$, якщо $\sum_{k>n} s_k \geq \sum_{k>n} g_k$.

«Хвости» розподілів позначимо великими буквами:

$$S_n = \sum_{k>n} s_k, \qquad G_n = \sum_{k>n} g_k,$$

тут $n \geq -1$, і S_{-1} або G_{-1} — це повна сума елементів із відповідної послідовності.

Для мажоруючої послідовності $\{s_n, n \geq 0\}$ будемо вимагати, щоб

$$1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} s_n < \infty.$$

Для двох сумованих послідовностей $\{g_n, n \geq 0\}$ та $\{p_n, n \geq 0\}$ визначимо згортку:

$$(g \star p)_n = \sum_{k=0}^{n} g_k p_{n-k}.$$

Тоді згортка послідовності із самою собою має такий вигляд:

$$g_n^{\star 2} = \sum_{k=0}^{n} g_k g_{n-k}.$$

Ітеративно можна визначити згортку m-го порядку:

$$g_n^{\star m} = (g^{\star m-1} \star g)_n.$$

Символом $G_n^{\star 2}$ будемо позначати «хвіст» розподілу згортки:

$$G_n^{\star 2} = \sum_{k>n} g_k^{\star 2}.$$

Зауважимо, що n-й елемент згортки послідовності з одиницею рівний сумі послідовності до n:

$$(g \star 1)_n = \sum_{k=0}^{n} g_k.$$

3. Стохастична мажоранта для сум випадкових величин

Доведемо, що згортка мажорант є мажорантою для суми. Ми сформулюємо результат для послідовностей, припустивши, що всі послідовності можуть у сумі бути більшими 1.

Окремо розглянемо випадки невід'ємних та знакозмінних випадкових величин, оскільки доведення трішки відрізняються, а в подальшому нас цікавитимуть властивості невід'ємних випадкових величин. Деякі формули, отримані при доведенні, можуть бути корисними для подальших посилань.

Теорема 3.1. *Розглянемо чотири невід'ємні послідовності:*

$$\{s_n, n \geq 0\}, \quad \{r_n, n \geq 0\}, \quad \{g_n, n \geq 0\}, \quad \{p_n, n \geq 0\}$$

такі, що

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} s_n = S, \qquad 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} r_n = R < \infty,$$

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} g_n = G < \infty, \qquad 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_n = P < \infty.$$

Причому для кожного $n \geq -1$:

$$S_n = \sum_{k>n} s_n \geq G_n = \sum_{k>n} g_n,$$

$$R_n = \sum_{k>n} r_n \geq P_n = \sum_{k>n} p_n.$$

Тоді згортка $\{(s \star r)_n, n \geq 0\}$ є мажорантою для згортки $\{(g \star p)_n, n \geq 0\}$, а саме, для довільного $n \geq -1$:

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k \geq \sum_{k>n} (g \star p)_k.$$

Доведення. Запишемо різницю $\sum_{k>n} \sum_{j=0}^{k} (s \star r)_j - \sum_{k>n} \sum_{j=0}^{k} (g \star p)_j$ і скористаємось лемою 3.1.

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k - \sum_{k>n} (g \star p)_k = \sum_{k=0}^{n} s_k R_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} g_k P_{n-k} + S_n R - G_n P, \tag{1}$$

врахуємо, що згідно з умовою $R_{n-k} \geq P_{n-k}$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n} s_k R_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} g_k P_{n-k} + S_n R - G_n P \geq \sum_{k=0}^{n} (s_k - g_k) P_{n-k} + S_n R - G_n P =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\big(S_{k-1} - S_k - (G_{k-1} - G_k)\big)P_{n-k} + S_nR - G_nP =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(S_{k-1} - G_{k-1})P_{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(S_k - G_k)P_{n-k} + S_nR - G_nP =$$
$$= (S_{-1} - G_{-1})P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)(P_{n-k} - P_{n-k+1}) - (S_n - G_n)P_0 + S_nR - G_nP.$$

Зауважимо, що згідно з умовою: $S_{-1} = S \geq G = G_{-1}$, а також $R > P$. Тоді

$$(S_{-1} - G_{-1})P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)(P_{n-k} - P_{n-k+1}) - (S_n - G_n)P_0 + S_nR - G_nP \geq$$
$$\geq (S - G)P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} - (S_n - G_n)P_0 + S_nP - G_nP =$$
$$= (S - G)P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} + (S_n - G_n)(P - P_0) =$$
$$= (S - G)P_n + (S_n - G_n)p_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} \geq 0,$$

оскільки для кожного $n \geq 0$: $S_n \geq G_n$, отже другий і третій доданки невід'ємні, а невід'ємність першого доданка випливає з того, що $S \geq G$. Підставивши отриману нерівність у формулу (1) отримаємо шуканий результат. □

Доведемо тепер аналогічну теорему для двосторонніх послідовностей.

Теорема 3.2. *Розглянемо чотири невід'ємні, двосторонні послідовності:*

$\{s_n, -\infty < n < \infty\}$, $\{r_n, -\infty < n < \infty\}$, $\{g_n, -\infty < n < \infty\}$, $\{p_n, -\infty < n < \infty\}$

такі, що

$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_n = S < \infty, \qquad 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_n = R < \infty,$$
$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_n = G < \infty, \qquad 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n = P < \infty.$$

Причому для кожного $n \geq -\infty$:

$$S_n = \sum_{k>n} s_n \geq G_n = \sum_{k>n} g_n,$$
$$R_n = \sum_{k>n} r_n \geq P_n = \sum_{k>n} p_n.$$

Тоді згортка $\{(s\star r)_n, n \geq 0\}$ є мажорантою для згортки $\{(g\star p)_n, n \geq 0\}$, а саме, для довільного $n \geq -\infty$:

$$\sum_{k>n}(s\star r)_k \geq \sum_{k>n}(g\star p)_k.$$

Доведення. Запишемо вираз для згортки:

$$\sum_{k>n}(s\star r)_k = \sum_{k>n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j r_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j R_{n-j}. \tag{2}$$

Тоді запишемо різницю:

$$\sum_{k>n}(s\star r)_k - \sum_{k>n}(g\star p)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j R_{n-j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j P_{n-j} =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N}^{N}(s_j R_{n-j} - g_j P_{n-j})\right),$$

оскільки $R_{n-j} \geq P_{n-j}$, то останній вираз не перевищує

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N}^{N}(s_j - g_j)P_{n-j}\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N}^{N}\big(S_{j-1} - S_j - (G_{j-1} - G_j)\big)P_{n-j}\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N}^{N}(S_{j-1} - G_{j-1})P_{n-j} - \sum_{j=-N}^{N}(S_j - G_j)P_{n-j}\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N+1}^{N-1}(S_j - G_j)(P_{n-j} - P_{n-j+1})\right) +$$
$$+ \lim_{N\to\infty}\big((S_{-N-1} - G_{-N-1})P_{-N-j} - (S_N - G_N)P_{N-j}\big) =$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_j - G_j)p_{n-j} + (S_{-\infty} - G_{-\infty})P_{-\infty} - (S_\infty - G_\infty)P_\infty =$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_j - G_j)p_{n-j} + (S - G)P - 0 \geq 0.$$

Останній вираз невід'ємний, оскільки всі доданки невід'ємні. □

Наслідок 3.1. *Якщо дві дискретні, незалежні випадкові величини ξ та η мажоруються відповідно послідовностями $\{s_n\}$ та $\{r_n\}$, то їх сума $\xi + \eta$ мажорована згорткою $(s\star r)_n$.*

Наслідок 3.2. *Нехай маємо послідовність незалежних випадкових величин ξ_n, $n \geq 0$. Нехай ξ_i мажорована послідовністю $\left\{s_n^{(i)}\right\}$, тоді сума $\sum_{j=0}^{n}\xi_j$ мажорована згорткою $\left(s^{(0)}\star s^{(1)}\star\cdots\star s^{(n)}\right)$.*

Лема 3.1. *Нехай $\{a_n, n\geq 0\}$ та $\{b_n, n \geq 0\}$ — дві сумовані невід'ємні послідовності, $A_n = \sum_{k>n} a_k$, $B_n = \sum_{k>n} b_k$. Нехай також*

$$A = A_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n, \quad B = B_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n.$$

Тоді місце зображення:

$$\sum_{k>n}(a\star b)_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} + A_n B = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1}B. \tag{3}$$

Доведення.

$$\sum_{k>n}(a\star b)_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \sum_{j=n+1-k}^{\infty} b_j + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{\infty} b_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + \sum_{k>n+1} a_k B = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1} B.$$

Таким чином доведено другу рівність у (3). Для доведення першої рівності помітимо, що останній доданок у сумі $\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k}$ має вигляд: $a_{n+1} B_{n-(n+1)} = a_{n+1} B_{-1} = = a_{n+1} B$.

Підставиши його у вже доведену формулу отримаємо

$$\sum_{k>n} (a \star b)_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1} B = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} + a_{n+1} B + A_{n+1} B =$$
$$= \sum_{k>n} a_k B_{n-k} + (a_{n+1} + A_{n+1}) B = \sum_{k>n} a_k B_{n-k} A_n B.$$

Отже перша рівність у (3) теж доведена. □

4. Стохастична мажоранта для випадкових сум.

Побудуємо мажоранту для випадкових сум, причому величини, що входять у випадкову суму, не обов'язково будуть незалежними. Нижче буде побудована конструкція такої випадкової суми. Зауважимо, що подібні випадкові суми виникають при аналізі послідовностей відновлення, породжених неоднорідними ланцюгами Маркова, що буде показано у наступному розділі.

Нехай $(\mathcal{U}, \mathbb{U})$ — деякий параметричний вимірний простір, і $\xi(u)$, $u \in \mathcal{U}$ — деяка сім'я незалежних випадкових величин, індексована значеннями із $\mathcal{U}$. Нехай $\{\nu_n, n \geq 0\}$ — послідовність випадкових величин зі значеннями у просторі $(\mathcal{U}, \mathbb{U})$, причому $\xi(u)$ не залежить від ν_n для всіх n та u.

Введемо позначення:

$$\xi_n = \xi(\nu_n).$$

Зауважимо, що ні сім'я величин $\{\xi_i, i \geq 0\}$, ні послідовність $\{\nu_n, n \geq 0\}$ не є незалежними як усередині груп, так і між собою.

Нехай ζ — деяка випадкова величина, що не залежить ні від ξ_i, ні від ν_n, і $p_m = = \mathsf{P}\{\zeta = m\}$. Наша мета побудувати мажоранту для суми

$$\sum_{k=0}^{\zeta} \xi_k. \tag{4}$$

Вважатимемо, що всі випадкові величини задано на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$. Будемо позначати символом E математичне сподівання за мірою P.

Теорема 4.1. *Нехай $\{s_n(u), n \geq 0\}$ — послідовність, що мажорує випадкову величину $\xi(u)$, $u \in \mathcal{U}$, причому виконана умова*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \sum_{j \geq 0} s_j(u) < \infty. \tag{5}$$

Тоді послідовність

$$\hat{s}_n = \mathsf{E}\big[\big(s(\nu_0) \star s(\nu_1) \star \dots \star s(\nu_\zeta)\big)_n\big] \tag{6}$$

є стохастичною мажорантою для випадкової суми (4).

Доведення. Розглянемо суму

$$S = \sum_{k=0}^{\zeta} \xi_k = \sum_{k=0}^{\zeta} \xi(\nu_k).$$

Нехай $\hat{\imath}(m) = (\hat{\imath}_0, \hat{\imath}_1, \ldots, \hat{\imath}_m)$ — деякий цілочисельний вектор розмірності $m+1$. Введемо множину

$$A\big(\hat{\imath}(m)\big) = \{\nu_0 = \hat{\imath}_0, \nu_1 = \hat{\imath}_1, \ldots, \nu_m = \hat{\imath}_m\}.$$

Тоді

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\hat{\imath}(m)} S \mathbb{1}_{A(\hat{\imath}(m))} \right) p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\hat{\imath}(m)} \left(\sum_{k=0}^{m} \xi(\hat{\imath}_k) \right) \mathbb{1}_{A(\hat{\imath}(m))} \right) p_m.$$

Розглянемо ймовірність:

$$\mathsf{P}\{S > n\} = \sum_m \sum_{\hat{\imath}(m)} \mathsf{P}\big\{S > n \bigm| \zeta = m, A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\}\, \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big), \zeta = m\big\}. \tag{7}$$

Зауважимо, що ζ та величини ν_i — незалежні, тож

$$\mathsf{P}\big\{\zeta = m, A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} = \mathsf{P}\{\zeta = m\}\, \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} = \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} p_m. \tag{8}$$

Окрім того, випадкові величини $\xi(u)$ при кожному u не залежать від ζ та від усіх ν_n, а отже і від $A(\hat{\imath}(m))$. Тому

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big\{S > n \bigm| \zeta = m, A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} &= \mathsf{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi\big(\hat{\imath}_k(m)\big) > n \,\middle|\, \zeta = m, A\big(\hat{\imath}(m)\big) \right\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi\big(\hat{\imath}_k(m)\big) > n \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Підставивши (8) та (9) у (7), отримаємо

$$\mathsf{P}\{S > n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\hat{\imath}(m)} \mathsf{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi\big(\hat{\imath}_k(m)\big) > n \right\} \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} p_m. \tag{10}$$

Але $\xi(\hat{\imath}_k)$ — незалежні випадкові величини, а отже за наслідком до теореми про мажорування суми незалежних величин вони мажоруються згорткою:

$$\mathsf{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi\big(\hat{\imath}_k(m)\big) > n \right\} \le \sum_{j>n} \big(s(\hat{\imath}_0) \star \cdots \star s(\hat{\imath}_m)\big)_j. \tag{11}$$

Підставивши (11) у (10), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{S > n\} &\le \sum_{m \ge 0} \left[\sum_{\hat{\imath}(m)} \left(\sum_{j>n} \big(s(\hat{\imath}_0) \star \cdots \star s(\hat{\imath}_m)\big)_j \right) \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} \right] p_m = \\ &= \sum_{m \ge 0} \left[\sum_{j>n} \left(\sum_{\hat{\imath}(m)} \big(s(\hat{\imath}_0) \star \cdots \star s(\hat{\imath}_m)\big)_j\, \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} \right) \right] p_m = \\ &= \sum_{j>n} \left[\sum_{m \ge 0} \left(\sum_{\hat{\imath}(m)} \big(s(\hat{\imath}_0) \star \cdots \star s(\hat{\imath}_m)\big)_j\, \mathsf{P}\big\{A\big(\hat{\imath}(m)\big)\big\} \right) p_m \right] = \\ &= \sum_{j>n} \left(\sum_{m \ge 0} \mathsf{E}\Big[\big(s(\nu_0) \star \cdots \star s(\nu_m)\big)_j \bigm| \zeta = m \Big] p_m \right) = \\ &= \sum_{j>n} \mathsf{E}\Big[\big(s(\nu_0) \star \cdots \star s(\nu_m)\big)_j \Big]. \end{aligned}$$

Що і доводить шукане твердження.

Зауважимо, що зміна порядку інтегрування можлива в силу умови (5). $\square$

Очевидним наслідком щойно доведеної теореми є така.

Теорема 4.2. *Нехай $\xi_n, n \geq 0$ послідовність дискретних, незалежних випадкових величин. Нехай також ζ інша невід'ємна, дискретна випадкова величина, що не залежить від усіх $(\xi_n, n \geq 0)$. Розподіл ζ позначимо $p_n = \mathsf{P}\{\zeta = n\}$, $n \geq 0$. Нехай ξ_i мажорована послідовністю $\left\{s_n^{(i)}\right\}$. Тоді $\sum_{j=0}^{\zeta} \xi_j$ мажорована послідовністю*

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(s^{(0)} \star \cdots \star s^{(k)}\right)_n.$$

Доведення. Шукане твердження випливає з теореми 4.1, якщо покласти

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

а $\nu_n = n$. □

5. Мажорування послідовності відновлення, породженої неоднорідним ланцюгом Маркова

Конструкція, описана в попередньому розділі є актуальною для побудови склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова. При цьому виникає необхідність аналізу послідовності відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, а також мажорування випадкової кількості таких відновлень.

У цьому розділі побудуємо таку послідовність відновлення та покажемо, яким чином теорема 4.1 дозволяє отримати мажоранту для випадкової кількості відновлень.

Нехай задано деякий імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Усі подальші випадкові величини вважаємо визначеними на цьому ймовірнісному просторі.

Розглянемо деякий неоднонорідний за часом ланцюг Маркова X_n зі значеннями у вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Нехай $P_t(x, A)$ — це його перехідна ймовірність на t-му кроці. Вважатимемо, що ланцюг стартує з початковим розподілом μ_0.

Нехай також задано набір імовірнісних мір $\mu_{t,x}(\cdot)$, $x \in E$, $t > 0$.

Нехай $C \in \mathcal{E}$ — деяка множина. Тоді побудуємо послідовність відновлення, породжену неоднорідним ланцюгом X_n, таким чином:

$$\theta_0 = \inf_t \{t > 0 : X_t \in C\}.$$

Спочатку визначимо величину θ_1. Розглянемо ланцюг Маркова $X_t^{(1)} = X_{\theta_0 + t}$, $t \geq 0$, із початковим розподілом $\mu_{\theta_0, X_{\theta_0}}(\cdot)$.

Тоді

$$\theta_1 = \inf_t \left\{t > 0 : X_t^{(1)} \in C\right\}.$$

Покладемо

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{k} \theta_k, k \geq 0.$$

Аналогічним чином визначимо ланцюги $X_n^{(k)} = X_{\tau_{k-1}+t}^{(k-1)}$, $k \geq 1$, із початковим розподілом $\mu_{\tau_{k-1}, X_{\theta_{k-1}}^{(k-1)}}$.

Нехай $s_n^{(t)}(x)$ — стохастична мажоранта для ланцюга, що стартує в момент t зі стану x. Позначимо

$$s_n^{(t)}(\mu, x) = \int_E s^{(t)}(y) \mu_{t,x}(dy).$$

Нехай також

$$S_n^{(t)}(x) = \sum_{k>n} s_k^{(t)}(x), \qquad S_n^{(t)}(\mu, x) = \sum_{k>n} s_k^{(t)}(\mu, x).$$

Для кожного $k \geq 0$ визначимо ітеративно послідовність: $\hat{s}_n^{(k)}(x)$, $n \geq 0$.

Нехай $\hat{s}_n^{(1)}(x) = s_n^{(0)}(x)$ і дано послідовність $\hat{s}_n^{(k)}(x)$, тоді визначимо послідовність $\hat{s}_n^{(k+1)}(x)$ таким чином:

$$\hat{s}_n^{(k+1)}(x) = \mathsf{E}\left[\hat{s}^{(k)}(x) \star s^{(\tau_k)}_{\mu, X_0^{(k+1)}}\right]. \tag{12}$$

Тоді для введених вище позначень справедлива така теорема.

Теорема 5.1. *Послідовність* $\left\{\hat{s}_n^{(k)}(x), n \geq 0\right\}$ *є стохастичною мажорантою для суми* $\sum_{j=0}^{k} \theta_j$ *за умови, що ланцюг стартує з точки* $x \in E$.

Доведення. Для доведення скористаємось теоремою 4.1.

Як множину $\mathcal{U}$ виберемо множину всіх можливих пар (t, x), $t \geq 0$, $x \in E$. Випадкова величина $\nu_n = (t, x)$, якщо n-те попадання у множину C трапилось у момент t і ланцюг потрапив у точку $x \in C$.

Тоді твердження теореми випливає безпосередньо із теореми 4.1. □

6. Приклад застосування

Розглянемо на прикладі, коли можуть бути застосовані доведені вище теореми. У роботі [7] була введена наступна конструкція склеювання.

Нехай X_n, X'_n, $n \geq 0$, два неоднорідні за часом ланцюги Маркова, задані на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{E}, \mathsf{P})$, зі значеннями у вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Нехай $P_t(x, A), P'_t(x, A)$ — перехідні ймовірності на t-му кроці для ланцюгів X та X' відповідно. У роботі введено умови на близькість перехідних імовірностей, але вони не суттєві для цього прикладу.

Нехай $C \in \mathcal{E}$ — деяка множина, для якої виконана умова мінорizації:

$$\forall x \in C \quad \min\{P_t(x, A), P'_t(x, A)\} \geq \alpha\nu(A),$$

де $\alpha \in (0, 1]$ — деяка константа, а $\nu(\cdot)$ — деякий імовірнісний розподіл.

Розглядався випадковий процес, що складався з пар випадкових величин (Y_n, Y'_n), динаміка яких визначалась так:

$$Y_0 = X_0, \quad Y'_0 = X'_0.$$

Якщо пара $(Y_n, Y'_n) \notin C \times C$, то розподіл $(Y_{n+1}, Y'_{n+1}) \sim (P_n(Y_n, \cdot), P'_n(Y'_n, \cdot))$, або іншими словами пара процесів (Y_n, Y'_n) збігалася за розподілом із парою (X_n, X'_N) до моменту потрапляння у множину $C \times C$.

Коли $(Y_n, Y'_n) \in C \times C$, тоді з імовірністю α ланцюги вважалися склеєними, і в подальшому $Y_{n+1} = Y'_{n+1}$ з певним розподілом, а з імовірністю $1 - \alpha$ процеси не склеювались і наступне значення пари (Y_{n+1}, Y'_{n+1}) вибиралось із розподілу $(P_\alpha(Y_n, \cdot), P'_\alpha(Y'_n, \cdot))$ — для певним чином визначених перехідних імовірностей P_α, P'_α.

Для побудови оцінки відхилень перехідних імовірностей за n кроків для ланцюгів X та X' необхідно було побудувати мажоранту для часу склеювання.

Очевидно, що знаючи мажоранту для потрапляння пари (X_n, X'_n) у множину $(C \times C)$, можна легко побудувати шукану мажоранту для часу склеювання, використавши теорему 5.1. Ця теорема дозволяє не лише показати існування мажоранти для часу склеювання, але також і дослідити її властивості за певних умов — наприклад оцінити математичне сподівання часу склеювання через математичне сподівання мажоранти для потрапляння у множину $C \times C$.

Список літератури

1. S. P. Mayn, R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
2. H. Thorisson, *Coupling, stationarity, and regeneration*, Springer, New York, 2000.
3. T. Lindvall, *Lectures on the coupling method*, John Wiley and Sons, 1991.
4. V. Golomoziy, M. Kartashov, *On the integrability of the coupling moment for time-inhomogeneous Markov chains*, Theory Probab. Math. Statist., **89** (2014), 1–12.
5. V. Golomoziy, *An estimate of the expectation of the excess of a renewal sequence generated by a time-inhomogeneous Markov chain if a square-integrable majorizing sequence exists*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 53–62.
6. V. Golomoziy, *An estimate for an expectation of the simultaneous renewal for time-inhomogeneous Markov chains*, Mod. Stoch. Theory Appl., **3** (2016), no. 4.
7. V. Golomoziy, *Stability estimate for time-inhomogeneous Markov chains under the classical minorization condition*, Theory Probab. Math. Statist., **88** (2014).
8. V. Golomoziy, *Stability of time-inhomogeneous Markov chains*, Bulletin of Kyiv University (Physics and Mathematical Sciences), **4** (2009), 10–15. (Ukrainian)
9. M. Kartashov, V. Golomoziy, *Maximal coupling and stability of disrete Markov chains, I*, Theory Probab. Math. Statist., **86** (2013), 81–92.
10. M. Kartashov, V. Golomoziiy, *Maximal coupling and stability of disrete Markov chains, II*, Theory Probab. Math. Statist., **87** (2013), 58–70.
11. A. Klenke, L. Mattner, *Stochastic ordering of classical discrete distributions*, Advances in Applied Probability, **42** (2010), no. 2, 392–410.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: mailtower@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2017

PROPERTIES OF A STOCHASTIC DOMINANT FOR DISCRETE DISTRIBUTIONS AND ITS APPLICATION FOR A RENEWAL SEQUENCE GENERATED BY TIME-INHOMOGENEOUS MARKOV CHAIN

V. V. GOLOMOZIY

Abstract. Generalized stochastic dominance when dominating sequence is not neccessary a probability distribution and may have total mass bigger than one is considered in this paper. Dominance of sums of random variables, random sums for both independent and depenedent random variables are investigated. Dominating sequnce for a renewal sequence generated by time-inhomogeneous Markov chain was obtained. Only discrette random variables are considered.

СВОЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

В. В. ГОЛОМОЗЫЙ

Аннотация. Рассматривается обобщенное стохастическое мажорирование в случае, когда мажорирующая последовательность не обязательно является вероятностным распределением и может иметь полную массу меньше единицы. Изучаются вопросы мажорирования сумм случайных величин, случайных сумм как независимых, так и зависимых случайных величин. Построена мажоранта для последовательности восстановления, которая порождена неоднородной цепью Маркова. Рассматриваются только дискретные случайные величины.