Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 72–82

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 72–82

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ СИНУСОЇДНОЇ МОДЕЛІ ТЕКСТУРОВАНОЇ ПОВЕРХНІ

О. В. ІВАНОВ, О. В. МАЛЯР

Анотація. Для синусоїдної моделі спостережень текстурованої поверхні, тобто моделі, в якій функція регресії є сумою двопараметричних гармонічних коливань, а шум — однорідним та ізотропним гауссівським випадковим полем на площині, отримано умови сильної консистентності оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд та кутових частот указаної тригонометричної моделі регресії.

Ключові слова і фрази. Синусоїдна модель текстурованої поверхні, однорідне та ізотропне випадкове поле, оцінка найменших квадратів, консистентність.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02; Secondary 62J99.

1. Вступ

У роботі розглянуто двовимірну синусоїдну модель спостережень текстурованої поверхні, різноманітні дискретні модифікації якої отримали велику увагу в літературі з обробки сигналів, завдяки їх застосуванню в аналізі текстур [1–4], зокрема, в обробці, так званих, симетричних образів відтінків сірого (symmetric gray-scale texture images), у тому розумінні, що інтенсивність сірого кольору в будь-якій точці цього образу пропорційна значенню процесу, що спостерігається, у цій точці. Ця проблема має спеціальний інтерес у спектральному аналізі [5, 6], див. також [4] та присутні там посилання на прикладні публікації з указаної проблематики.

Досліджено властивість консистентності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів синусоїдної моделі у випадку, коли випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині [7, 8]. Із погляду математики така постановка задачі оцінювання є природним узагальненням добре відомої проблеми виявлення прихованих періодичностей (див., наприклад, [9, 10]).

У дискретній постановці задачі, коли помилки спостережень є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, зокрема, гауссівськими, асимптотичні властивості ОНК було розглянуто в роботах [11, 12]. Для помилок спостережень, що утворюють дискретне лінійне однорідне поле, ці результати узагальнено в [13]. Зауважимо також, що в роботі [14] розглянуто багатопараметричне гармонічне коливання, що спостерігається на фоні однорідного випадкового поля, у якого існують спектральні щільності всіх порядків. Для такої моделі сформульовано деякі результати про асимптотичну поведінку періодограмних оцінок та ОНК невідомих амплітуд і кутових частот цього гармонічного коливання.

2. Постановка задачі

Розглянемо модель спостережень

$$X(t_1,t_2)=g\big(t_1,t_2;\theta^0\big)+\varepsilon(t_1,t_2),\quad t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{1}$$

де

$$g\big(t_1,t_2;\theta^0\big)=\sum_{k=1}^{N}\Big(A_k^0\cos\big(\lambda_k^0t_1+\mu_k^0t_2\big)+B_k^0\sin\big(\lambda_k^0t_1+\mu_k^0t_2\big)\Big), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \left(\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0, \ldots, \theta_{4N-3}^0, \theta_{4N-2}^0, \theta_{4N-1}^0, \theta_{4N}^0\right) = \\ &= \left(A_1^0, B_1^0, \lambda_1^0, \mu_1^0, \ldots, A_N^0, B_N^0, \lambda_N^0, \mu_N^0\right),\end{aligned} \tag{3}$$

число $N \geq 1$ є відомим; $(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$, — вектор істинних значень невідомих параметрів; $\varepsilon = \{\varepsilon(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ — задане на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ випадкове поле, відносно якого припустимо таке.

N. ε — неперервне в середньому квадратичному та майже напевно (м. н.) однорідне гауссівське поле з нульовим середнім, коваріаційна функція якого

$$B(t_1, t_2) = \mathsf{E}\varepsilon(t_1, t_2)\varepsilon(0, 0), \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

задовольняє одну з умов:

(i) поле ε є ізотропним та $B(t_1, t_2) = B(\|t\|) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L — монотонно неспадна повільно змінна на нескінченності функція, $t = (t_1, t_2)$, $\|t\| = \left(t_1^2 + t_2^2\right)^{1/2}$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |B(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$.

Функції регресії (2), як і класичні тригонометричні функції регресії ($\mu_k^0 = 0$, $k = \overline{1, N}$) при $N \geq 2$ не найкращим чином розрізняють параметри, у тому розумінні, що не задовольняють умови жодної загальної теореми про консистентність ОНК параметрів нелінійних моделей регресії (див., наприклад, [8, 15]). Таким чином, для доведення консистентності ОНК параметрів (3) треба допомогти тригонометричній функції регресії розрізняти параметри, обираючи, наприклад, для визначення ОНК таку параметричну множину, в якій параметри вже будуть добре розрізнятись.

Для точок (a, b), (c, d) на площині будемо писати $(a, b) < (c, d)$, якщо $a < c$, $b < d$. У цій роботі ми розглядаємо модель (1)–(3), в якій виконано наступне припущення.

R1. $\left(\lambda_k^0, \mu_k^0\right) < \left(\lambda_{k+1}^0, \mu_{k+1}^0\right)$, $k = \overline{1, N-1}$, і всі величини λ_j^0, μ_j^0, $i, j = \overline{1, N}$, — додатні та різні.

Це припущення означає, що параметричні множини, в яких перебувають значення параметрів $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0)$, $\mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_N^0)$ мають вигляд

$$\Lambda\left(\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\lambda} < \lambda_1 < \cdots < \lambda_N < \overline{\lambda} < \infty\right\}, \tag{4}$$

$$M\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right) = \left\{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\mu} < \mu_1 < \cdots < \mu_N < \overline{\mu} < \infty\right\}. \tag{5}$$

Позначимо

$$Q_T(\theta) = T^{-2} \int_0^T \int_0^T [X(t_1, t_2) - g(t_1, t_2; \theta)]^2 dt_1 dt_2. \tag{6}$$

За стандартним означенням ОНК параметра θ^0, отриманої за спостереженнями поля $X(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) = [0, T] \times [0, T]$, називається будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \lambda_{1T}, \mu_{1T}, \ldots, A_{NT}, B_{NT}, \lambda_{NT}, \mu_{NT}), \tag{7}$$

що мінімізує функціонал (6) на параметричній множині $\Theta \subset \mathbb{R}^{4N}$, в якій A_k, B_k, $k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-яких значень, а λ, μ — у замкнених множинах $\Lambda^c(\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, $M^c(\underline{\mu}, \overline{\mu})$.

Нижче для отримання співвідношень (28), (29) та для подальших обчислень треба забезпечити збіжність м. н. до нуля при $T \to \infty$ величин

$$\begin{gathered}\frac{\sin T(\lambda_{kT} - \lambda_{jT})}{T(\lambda_{kT} - \lambda_{jT})}, \quad \frac{\sin T(\mu_{kT} - \mu_{jT})}{T(\mu_{kT} - \mu_{jT})}, \quad \frac{\sin T(\lambda_{kT} - \lambda_j^0)}{T(\lambda_{kT} - \lambda_j^0)}, \\ \frac{\sin T(\mu_{kT} - \mu_j^0)}{T(\mu_{kT} - \mu_j^0)}, \quad k \neq j; \quad \frac{\sin T\lambda_{kT}}{T\lambda_{kT}}, \quad \frac{\sin T\mu_{kT}}{T\mu_{kT}}, \quad k = \overline{1, N}.\end{gathered} \tag{8}$$

Однак, користуючись наведеним означенням оцінок $\lambda_T = (\lambda_{1T}, \ldots, \lambda_{NT})$ та $\mu_T = (\mu_{1T}, \ldots, \mu_{NT})$, неможливо з'ясувати поведінку знаменників дробів (8) при $T \to \infty$.

А. М. Уолкер [16] свого часу запропонував у класичній задачі виявлення прихованих періодичностей таку модифікацію означення ОНК кутових частот, яка забезпечує і в нашій постановці задачі збіжність відношень (8) до нуля. Це надає можливість довести консистентність указаних оцінок. Сенс такої модифікації полягає в тому, що оцінка (7) визначається як точка мінімуму функціонала (6) на параметричній множині, що залежить від T і асимптотично при $T \to \infty$ добре розрізняє сукупності частот λ і μ.

Введемо дві монотонно неспадні сім'ї відкритих множин

$$\Lambda_T \subset \Lambda(\underline{\lambda}, \overline{\lambda}), \quad M_T \subset M(\underline{\mu}, \overline{\mu}), \quad T \geq T_0 > 0, \tag{9}$$

які містять істинні значення параметрів λ^0, μ^0, відповідно, та задовольняють наведені нижче умови.

R2.
$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}} T(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \lim_{T\to\infty} \inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \mu\in M_T}} T(\mu_{j+1} - \mu_j) = \infty, \tag{10}$$

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\lambda\in\Lambda_T} T\lambda_1 = \lim_{T\to\infty} \inf_{\mu\in M_T} T\mu_1 = \infty. \tag{11}$$

Умова (11) завжди виконується, коли $\underline{\lambda} > 0$, $\underline{\mu} > 0$. Якщо $\Lambda_T \subset \Lambda(0, \overline{\lambda})$, $M_T \subset M(0, \overline{\mu})$, то для виконання (10), (11) можна розглядати, наприклад, множини Λ_T, M_T такі, що

$$\inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \mu\in M_T}} (\mu_{j+1} - \mu_j) = \inf_{\lambda\in\Lambda_T} \lambda_1 = \inf_{\mu\in M_T} \mu_1 = T^{-1/2}. \tag{12}$$

Сенс припущень (10), (11) полягає в тому, щоб охопити випадок оцінювання близьких частот у сукупностях λ^0, μ^0 і близьких до нуля частот λ_1^0, μ_1^0.

Означення 2.1. ОНК (в сенсі Уолкера) векторного параметра θ^0 вигляду (3) моделі (1), (2) назвемо будь-який випадковий вектор θ_T вигляду (7), що мінімізує функціонал (6) на множині параметрів $\Theta \subset \mathbb{R}^{4N}$, в якій амплітуди A_k, B_k, $k = \overline{1, N}$, можуть набувати довільних значень, а кутові частоти λ, μ — у замкнених множинах Λ_T^c, M_T^c.

У подальшому тексті статті розглядається саме така ОНК θ_T параметра θ^0.

3. Леми

Наведена нижче лема узагальнює відповідний результат роботи [9]. Позначимо $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Лема 3.1. *Якщо виконано умову* $\mathbf{N}(i)$*, то для* $\rho < \alpha/6$

$$\xi(T) = \sup_{\varphi\in\mathbb{R}^2} T^{-2+\rho} \left| \int_0^T \int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)} \varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right| \to 0 \quad \text{м. н.}, \quad T \to \infty. \tag{13}$$

Доведення. Прості заміни змінних дозволяють записати

$$\left| \int_0^T \int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)} \varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^2 =$$
$$= \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1 - s_1)} \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2 - s_2)} \varepsilon(t_1, t_2) \varepsilon(s_1, s_2) dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 =$$
$$= 2 \int_0^T \int_0^T \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2) \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 du_1 du_2 +$$
$$+ 2 \int_0^T \int_0^T \cos(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2) \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 du_1 du_2.$$

Маємо далі

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\xi^2(T) &\le 2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T \mathsf{E}\left|\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\varepsilon(v_1,v_2)\varepsilon(v_1+u_1,v_2+u_2)dv_1dv_2\right|du_1du_2+\\ &\quad+2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T \mathsf{E}\left|\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\varepsilon(v_1+u_1,v_2)\varepsilon(v_1,v_2+u_2)dv_1dv_2\right|du_1du_2\le\\ &\le 2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T\Psi_1^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2+2T^{-4}\int_0^T\int_0^T\Psi_2^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2,\end{aligned}$$

де за формулою Іcерліса

$$\begin{aligned}\Psi_1(u_1,u_2)&=\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\mathsf{E}\,\varepsilon(v_1+u_1,v_2+u_2)\varepsilon(v_1,v_2)\times\\ &\quad\times\varepsilon(w_1+u_1,w_2+u_2)\varepsilon(w_1,w_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=\\ &=(T-u_1)^2(T-u_2)^2B^2(u_1,u_2)+\\ &\quad+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}B^2(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dv_2dw_1dw_2+\\ &\quad+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2+u_2)\times\\ &\quad\times B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2-u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=\\ &=\sum_{j=1}^3\Psi_{1j}(u_1,u_2);\\ \Psi_2(u_1,u_2)&=\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\mathsf{E}\,\varepsilon(v_1+u_1,v_2)\varepsilon(v_1,v_2+u_2)\times\\ &\quad\times\varepsilon(w_1+u_1,w_2)\varepsilon(w_1,w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=\\ &=(T-u_1)^2(T-u_2)^2B^2(u_1,-u_2)+\\ &\quad+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}B^2(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dv_2dw_1dw_2+\\ &\quad+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2-u_2)\times\\ &\quad\times B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=\\ &=\sum_{j=1}^3\Psi_{2j}(u_1,u_2).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\Psi_i^{1/2}(u_1,u_2)\le\sum_{j=1}^3\Psi_{ij}^{1/2}(u_1,u_2),\quad i=1,2,$$

то

$$\mathsf{E}\,\xi^2(T)\le\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^3 I_{ij}(T),\quad I_{ij}(T)=2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T\Psi_{ij}^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2. \tag{14}$$

Оцінимо кожну величину $I_{ij}(T)$ окремо. Позначимо

$$b_u(v_1-w_1,v_2-w_2)=B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2+u_2)B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2-u_2)$$

і запишемо

$$\Psi_{13}(u_1,u_2)=\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_2}b(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dw_1dv_2dw_2=$$

$$= (T-u_1)(T-u_2)\int_{-(T-u_1)}^{T-u_1}\int_{-(T-u_2)}^{T-u_2}\left(1-\frac{|t_1|}{T-u_1}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T-u_2}\right)b_u(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_{-(1-u_1T^{-1})}^{1-u_1T^{-1}}\int_{-(1-u_2T^{-1})}^{1-u_2T^{-1}}\left(1-\frac{|t_1|}{1-u_1T^{-1}}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{1-u_2T^{-1}}\right)\times$$
$$\times b_u(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2 \le$$

$$\le T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} b_u(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2 \le$$

$$\le T^2(T-u_1)(T-u_2)\Bigg[B(0)\int_0^1\int_0^1 B(Tt_1+u_1,Tt_2+u_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ B(0)\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} B(Tt_1-u_1,Tt_2-u_2)dt_1dt_2 + \left(\int_0^1\int_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\int_0^1\right)b_u(Tt_1,Tt_2)\Bigg] =$$

$$= T^2(t-u_1)(T-u_2)\sum_{k=1}^{4}\Psi_{13}^{(k)}(u_1,u_2).$$

За умови леми $\Psi_{13}^{(1)} = \Psi_{13}^{(2)}$, $\Psi_{13}^{(3)} = \Psi_{13}^{(4)}$, і тому ми оцінимо $\Psi_{13}^{(1)}$ та $\Psi_{13}^{(3)}$. Оскільки $\|Tt \pm u\| \le 2\sqrt{2}\,T$, то для довільного $\varepsilon > 0$ при достатньо великих T (нехай при $T > T_0$), завдяки монотонності L, отримуємо $L(\|Tt \pm u\|) \le (1+\varepsilon)L(T)$. З іншого боку,

$$\|Tt+u\|^{\alpha} \ge T^{\alpha}t_1^{\alpha}, \tag{15}$$

$$\Psi_{13}^{(1)} \le (1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(0)B(T), \quad T > T_0. \tag{16}$$

Переходячи до оцінки $\Psi_{13}^{(3)}$, зауважимо, що для 1-го множника $b_u(Tt_1,Tt_2)$ є правильною оцінка (15), а для 2-го — оцінка

$$\|Tt-u\|^{\alpha} \ge T^{\alpha}t_2^{\alpha}, \tag{17}$$

тобто

$$\Psi_{13}^{3} \le (1+\varepsilon)^2(1-\alpha)^{-2}B^2(T), \quad T > T_0, \tag{18}$$

та для тих самих T

$$I_{13}(T) \le \frac{8}{9}\sqrt{2}\Big((1+\varepsilon)^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}B^{1/2}(0)B^{1/2}(T) + (1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(T)\Big)T^{2\rho}. \tag{19}$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо оцінки

$$\Psi_{12}(u_1,u_2) \le 4B(0)T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_0^1\int_0^1 B(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2,$$

$$I_{12}(T) \le \frac{16}{9}(1+\varepsilon)^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}B^{1/2}(0)B^{1/2}(T)T^{2\rho}. \tag{20}$$

Крім цього, для $T > T_0$

$$I_{11}(T) \le 2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T (T-u_1)(T-u_2)B(u_1,u_2)du_1du_2 \le$$
$$\le T^{2\rho}\int_0^1\int_0^1 B(Tu_1,Tu_2)du_1du_2 \le 2(1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(T)T^{2\rho}. \tag{21}$$

Таким чином, із (19)–(21) випливає, що при $T \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{3} I_{1j} = O\Big(B^{1/2}(T)T^{2\rho}\Big). \tag{22}$$

Позначимо

$$c_u(v_1-w_1,v_2-w_2)=B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2-u_2)B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2+u_2).$$

Аналогічно оцінці для $\Psi_{13}(u_1,u_2)$ отримуємо

$$\begin{aligned}\Psi_{23}(u_1,u_2)\le{}& T^2(T-u_1)(T-u_2)\times\\ &\times\left(\int_0^1\int_0^1+\int_{-1}^0\int_{-1}^0+\int_0^1\int_{-1}^0+\int_{-1}^0\int_0^1\right)c_u(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2=\\ &=T^2(T-u_1)(T-u_2)\sum_{k=1}^4\Psi_{23}^{(k)}(u_1,u_2).\end{aligned}$$

Зауважимо, що за умови леми

$$\Psi_{23}^{(1)}=\Psi_{23}^{(2)}=\Psi_{13}^{(3)}=\Psi_{13}^{(4)},\quad \Psi_{23}^{(3)}=\Psi_{23}^{(4)}=\Psi_{13}^{(1)}=\Psi_{13}^{(2)}.$$

Крім цього, $\Psi_{21}=\Psi_{11}$, $\Psi_{22}=\Psi_{12}$. Це означає, що при $T\to\infty$

$$\sum_{j=1}^3 I_{2j}=O\Big(B^{1/2}(T)T^{2\rho}\Big).\tag{23}$$

Співвідношення (22), (23) разом із (15) показують, що при $T\to\infty$

$$\mathsf{E}\,\xi^2(T)=O\Big(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2+2\rho}\Big).\tag{24}$$

Нехай $T_n=n^{\beta}$, де число $\beta>0$ задовольняє співвідношення $\left(\frac{\alpha}{2}-2\rho\right)\beta=1+\delta$ для деякого $\delta>0$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\,\xi^2(T_n)<\infty$, тобто $\xi(T_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ м. н. Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\begin{aligned}\zeta_n={}&\sup_{T_n\le T\le T_{n+1}}|\xi(T)-\xi(T_n)|\le\\ &\le\sup_{T_n\le T\le T_{n+1}}\sup_{\varphi\in\mathbb{R}^2}\Bigg|T^{-2+\rho}\int_0^T\int_0^T e^{-i(\varphi_1t_1+\varphi_2t_2)}\varepsilon(t_1,t_2)dt-\\ &-T_n^{-2+\rho}\int_0^{T_n}\int_0^{T_n}e^{-i(\varphi_1t_1+\varphi_2t_2)}\varepsilon(t_1,t_2)dt\Bigg|\le\\ &\le\left(\frac{T_{n+1}^{2-\rho}}{T_n^{2-\rho}}-1\right)\xi(T_n)+\\ &+T_n^{-2+\rho}\left(\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_0^{T_n}+\int_0^{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}}+\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\right)|\varepsilon(t_1,t_2)|dt_1dt_2=\\ &=\sum_{i=1}^4\zeta_n^{(i)}.\end{aligned}$$

Очевидно, $\zeta_n^{(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ м. н. Для $k\in\mathbb{N}$ розглянемо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big(\zeta_n^{(2)}\Big)^{2k}&=T_n^{-2k(2-\rho)}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_0^{T_n}\overset{2k}{\cdots}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_0^{T_n}\mathsf{E}\prod_{j=1}^{2k}\Big|\varepsilon\Big(t_1^{(j)},t_2^{(j)}\Big)\Big|\prod_{j=1}^{2k}dt_1^{(j)}dt_2^{(j)}\le\\ &\le(2k-1)!!B^k(0)T_n^{-2k(2-\rho)}(T_{n+1}-T_n)^{2k}T_n^{2k}=\\ &=(2k-1)!!B^k(0)\left(\frac{T_{n+1}}{T_n}-1\right)^{2k}T_n^{2k\rho}=O\Big(n^{-2k(1-\beta\rho)}\Big),\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Якщо $\beta\rho < 1$, то вибором k можна забезпечити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\Big(\zeta_n^{(2)}\Big)^{2k} < \infty$, і $\zeta_n^{(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н. Маємо $\beta\rho = \frac{\rho(1+\delta)}{\alpha/2-2\rho} < 1$, або $\rho < \frac{\alpha}{2(3+\delta)}$. Оскільки $\delta > 0$ може бути як завгодно малим, то умова леми $\rho < \alpha/6$ забезпечує потрібну збіжність $\zeta_n^{(2)}$ як і збіжність $\zeta_n^{(3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н. Оскільки

$$\mathsf{E}\Big(\zeta_n^{(4)}\Big)^2 \le (2k-1)!!B^k(0)\bigg(\frac{T_{n+1}}{T_n}-1\bigg)^{4k} T_n^{2k\rho} = O\Big(n^{-2k(2-\beta\rho)}\Big), \quad n\to\infty,$$

то і $\zeta_n^{(4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н. Лему 3.1 доведено. □

Лема 3.2. *Якщо виконано умову* $\mathbf{N}(ii)$, *то* $\xi(T) \to 0$ *м. н. при* $T\to\infty$ *для* $\rho < 1/3$.

Доведення. Використовуючи позначення леми 3.1 та умову леми 3.2, отримуємо для $i = 1, 2$

$$I_{i1}(T) = O\big(T^{-2+2\rho}\big), \quad I_{i2}(T) = O\big(T^{-1+2\rho}\big), \quad I_{i3}(T) = O\big(T^{-1+2\rho}\big), \quad T\to\infty. \tag{25}$$

Нехай $T_n = n^{\beta}$, де $(1-2\rho)\beta = 1+\delta$, $\delta > 0$. Тоді, як і в лемі 3.1, $\xi(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н., $\zeta_n = \sum_{i=1}^4 \zeta_n^{(i)}$. Тоді $\zeta_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н., а умова леми $\rho < 1/3$, як і в доведенні леми 3.1, забезпечує збіжність $\zeta_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м. н., $i = 2, 3, 4$. □

4. Основний результат

Теорема 4.1. *Якщо виконано умови* **N**, **R1**, **R2**, *то ОНК в сенсі Уолкера* θ_T *є сильно консистентною оцінкою параметра* θ^0, *а саме:*

$$A_{kT} \to A_k^0, \quad B_{kT} \to B_k^0, \quad T(\lambda_{kT} - \lambda_k^0) \to 0, \quad T(\mu_{kT} - \mu_k^0) \to 0 \quad \textit{м. н.}$$

при $T\to\infty$, $k = \overline{1, N}$.

Доведення. Розглянемо систему лінійних рівнянь відносно ОНК A_{kT}, B_{kT}, $k = \overline{1, N}$:

$$\frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial A_p}\bigg|_{\theta=\theta_T} = \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial B_p}\bigg|_{\theta=\theta_T} = 0, \quad p = \overline{1, N},$$

яку можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{kp}^{(1)} A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kp}^{(1)} B_{kT} = c_p^{(1)}, \quad p = \overline{1, N}; \\ \sum_{k=1}^N a_{kp}^{(2)} A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kp}^{(2)} B_{kT} = c_p^{(2)}, \quad p = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{26}$$

Позначимо

$$\begin{gathered} \cos(\lambda_{kT}t_1 + \mu_{kT}t_2) = \cos_k, \quad \sin(\lambda_{kT}t_1 + \mu_{kT}t_2) = \sin_k, \\ \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0) = \cos_k^0, \quad \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0) = \sin_k^0, \quad k = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{27}$$

Тоді коефіцієнти системи (26) можна записати у вигляді

$$a_{kp}^{(1)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \cos_k \cos_p dt_1dt_2, \qquad a_{kp}^{(2)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \cos_k \sin_p dt_1dt_2,$$

$$b_{kp}^{(1)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin_k \cos_p dt_1dt_2, \qquad b_{kp}^{(2)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin_k \sin_p dt_1dt_2,$$

$$c_p^{(1)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2) \cos_p dt_1dt_2, \qquad c_{kp}^{(2)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2) \sin_p dt_1dt_2.$$

Позначимо також $o(1)$, узагалі кажучи, різні випадкові процеси, що залежать від параметра T та прямують до нуля м. н. при $T\to\infty$.

Беручи до уваги властивості (10), (11) параметричних множин Λ_T, M_T, у замиканнях яких набувають значення оцінки λ_T, μ_T, елементарними обчисленнями знаходимо

$$a_{kp}^{(1)} = o(1), \quad k \neq p, \quad a_{pp}^{(1)} = \frac{1}{2} + o(1), \quad a_{kp}^{(2)} = o(1), \quad k, p = \overline{1, N}; \tag{28}$$

$$b_{kp}^{(1)} = a_{pk}^{(2)} = o(1), \quad b_{kp}^{(2)} = o(1), \quad k \neq p, \quad b_{kp}^{(2)} = \frac{1}{2} + o(1), \quad k, p = \overline{1, N}. \tag{29}$$

Для подальших обчислень позначимо

$$\begin{aligned} x_{\lambda p} &= \frac{\sin T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}{T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}, \qquad x_{\mu p} = \frac{\sin T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}{T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}, \qquad p = \overline{1, N}; \\ y_{\lambda p} &= \frac{1 - \cos T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}{T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}, \quad y_{\mu p} = \frac{1 - \cos T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}{T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}, \quad p = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{30}$$

Запишемо

$$\begin{aligned} c_p^{(1)} &= T^{-2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \cos_p dt_1 dt_2 + T^{-2} \int_0^T \int_0^T g\big(t_1, t_2; \theta^0\big) \cos_p dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2} \big[A_p^0 (x_{\lambda p} x_{\mu p} - y_{\lambda p} y_{\mu p}) - B_p^0 (x_{\mu p} y_{\lambda p} + x_{\lambda p} y_{\mu p})\big] + o(1) \end{aligned} \tag{31}$$

за лемами 3.1 і 3.2 та стандартними обчисленнями. Аналогічно

$$c_p^{(2)} = \frac{1}{2} \big[A_p^0 (x_{\mu p} y_{\lambda p} + x_{\lambda p} y_{\mu p}) + B_p^0 (x_{\lambda p} x_{\mu p} - y_{\lambda p} y_{\mu p})\big] + o(1). \tag{32}$$

Оскільки $|x_{\lambda p}|, |x_{\mu p}|, |y_{\lambda p}|, |y_{\mu p}| \leq 1$, $p = \overline{1, N}$, то завдяки співвідношенням (28), (29), (31), (32), розв'язок системи (26) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_{pT} &= A_p^0 (x_{\lambda p} x_{\mu p} - y_{\lambda p} y_{\mu p}) - B_p^0 (x_{\mu p} y_{\lambda p} + x_{\lambda p} y_{\mu p}) + o(1), \\ B_{pT} &= A_p^0 (x_{\mu p} y_{\lambda p} + x_{\lambda p} y_{\mu p}) + B_p^0 (x_{\lambda p} x_{\mu p} - y_{\lambda p} y_{\mu p}) + o(1), \quad p = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{33}$$

У свою чергу, із (33) випливають нерівності

$$|A_{pT}|, |B_{pT}| \leq 2\big(|A_p^0| + |B_p^0|\big) + o(1), \quad p = \overline{1, N}. \tag{34}$$

Позначимо

$$G_T(\theta_1; \theta_2) = T^{-2} \int_0^T \int_0^T [g(t_1, t_2; \theta_1) - g(t_1, t_2; \theta_2)]^2 dt_1 dt_2.$$

За означенням ОНК

$$\begin{aligned} 0 &\geq Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = \\ &= G_T(\theta_T; \theta^0) + 2T^{-2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \big(g(t_1, t_2; \theta^0) - g(t_1, t_2; \theta_T)\big) dt_1 dt_2. \end{aligned} \tag{35}$$

За доведеними лемами та (34) другий доданок правої частини рівності (35) є величиною $o(1)$. Це означає, що

$$G_T(\theta_T; \theta^0) \to 0 \quad \text{м. н.}, \quad T \to \infty. \tag{36}$$

Запишемо вираз для $G_T(\theta_T; \theta^0)$ таким чином, щоб із (36) випливала консистентність ОНК параметрів λ_k^0, μ_k^0, $k = \overline{1, N}$. Маємо

$$G_T(\theta_T;\theta^0) = T^{-2}\int_0^T\int_0^T g^2(t_1,t_2;\theta_T)dt_1dt_2 + T^{-2}\int_0^T\int_0^T g^2(t_1,t_2;\theta^0)dt_1dt_2 - \\ - 2T^{-2}\int_0^T\int_0^T g(t_1,t_2;\theta_T)g(t_1,t_2;\theta^0)dt_1dt_2 = J_1 + J_2 + J_3.$$

Із використанням (34) та співвідношень (28), (29) отримуємо

$$J_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\big(A_{kT}^2 + B_{kT}^2\big) + o(1), \tag{37}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\big((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2\big) + o(1), \tag{38}$$

$$J_3 = -2\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}T^{-2}\int_0^T\int_0^T\big(A_{pT}A_k^0\cos_p\cos_k^0 + A_{pT}B_k^0\cos_p\sin_k^0\big)dt_1dt_2 - \\ - 2\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}T^{-2}\int_0^T\int_0^T\big(B_{pT}A_k^0\sin_p\cos_k^0 + B_{pT}B_k^0\sin_p\sin_k^0\big)dt_1dt_2 = \\ = \sum_{p=1}^{N}\big(A_{pT}A_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}) - A_{pT}B_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p})\big) - \\ - \sum_{p=1}^{N}\big(B_{pT}A_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}) + B_{pT}B_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p})\big) + o(1). \tag{39}$$

Позначимо $z_{1p} = x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}$, $z_{2p} = x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}$, $p = \overline{1,N}$, і підставимо у (37) та (39) вирази (33). Тоді

$$G_T(\theta_T;\theta^0) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\Big[\big(A_p^0z_{1p} - B_p^0z_{2p}\big)^2 + \big(A_p^0z_{2p} + B_p^0z_{1p}\big)^2 + \big(A_p^0\big)^2 + \big(B_p^0\big)^2\Big] - \\ - \sum_{p=1}^{N}\Big[\big(A_p^0\big)^2z_{1p}^2 - 2A_p^0B_p^0z_{1p}z_{2p} + \big(B_p^0\big)^2z_{2p}^2\Big] - \\ - \sum_{p=1}^{N}\Big[\big(A_p^0\big)^2z_{2p}^2 + 2A_p^0B_p^0z_{1p}z_{2p} + \big(B_p^0\big)^2z_{1p}^2\Big] + o(1) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\Big(\big(A_p^0\big)^2 + \big(B_p^0\big)^2\Big)\big(1 - z_{1p}^2 - z_{2p}^2\big) + o(1) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\Big(\big(A_p^0\big)^2 + \big(B_p^0\big)^2\Big)\Big(1 - \big(x_{\lambda p}^2 + y_{\lambda p}^2\big)\big(x_{\mu p}^2 + y_{\mu p}^2\big)\Big) + o(1) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\Big(\big(A_p^0\big)^2 + \big(B_p^0\big)^2\Big) \times \\ \times\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{1}{2}T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}{\frac{1}{2}T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big)}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}{\frac{1}{2}T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big)}\right)^2\right] + o(1). \tag{40}$$

Рівність (40) разом із (36) доводять, що $T\big(\lambda_{pT} - \lambda_p^0\big) \to 0$, $T\big(\mu_{pT} - \mu_p^0\big) \to 0$ м. н., $T \to \infty$, $p = \overline{1, N}$. Тепер із (30) випливає, що $x_{\lambda p}$, $x_{\mu p} \to 1$, $y_{\lambda p}$, $y_{\mu p} \to 0$ м. н., $T \to \infty$, $p = \overline{1, N}$, а з (33) отримуємо $A_{pT} \to A_p^0$, $B_{pT} \to B_p^0$. Теорему доведено. $\square$

5. Висновки

У роботі доведено сильну консистентність ОНК параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні за припущення, що випадковий шум є гауссівським однорідним та ізотропним випадковим полем. Природним продовженням цього дослідження є отримання властивостей консистентності розглянутих оцінок для негауссівського випадкового шуму та доведення асимптотичної нормальності ОНК.

Список літератури

1. J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat, *A united texture model based on 2-D Wald type decomposition*, IEEE Trans. Signal Process., **41** (1993), 2665–2678.
2. T. Yuan, T. Subba Rao, *Spectrum estimation for random fields with application to Markov modelling and texture classification*, Markov Random Fields, Theory and Applications (R. Chellappa, A. K. Jain, eds.), Academic Press, New York, 1993.
3. H. Zhang, V. Mandrekar, *Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes*, J. Time Series Anal., **22** (2001), 613–629.
4. S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava, *Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model*, Comput. Statist. Data Anal., **58** (2013), 147–161.
5. P. Malliavan, *Sur la norte d'une matrice circulante Gaussienne*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique) (1994), 45–49.
6. P. Malliavin, *Estimation d'un signal Lorentzien*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **319** (1994), no. 9, 991–997.
7. M. I. Yadrenko, *Spectral theory of random fields*, Optimization Software, New York, 1983.
8. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, *Statistical analysis of random fields*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht-Boston-London, 1989.
9. A. V. Ivanov, *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence*, Theory Probab. Math. Statist., **80** (2010), 61–69.
10. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky, *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics, **49** (2015), 156–186.
11. C. R. Rao, L. C. Zhao, B. Zhou, *Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential*, IEEE Trans. Signal Process., **42** (1994), 795–802.
12. D. Kundu, A. Mitra, *Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals*, Multidimens. Syst. Signal Process., **7** (1996), 135–150.
13. D. Kundu, S. Nandi, *Determination of Discrete Spectrum in a Random Field*, Statistica Neerlandica **57** (2003), no. 2, 258–284.
14. D. R. Brillinger, *Regression for randomly sampled spatial series: The trigonometric case*, J. Appl. Probab., **23** (1986), 275–289.
15. A. V. Ivanov, *Asymptotic theory of nonlinear regression*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht-Boston-London, 1997.
16. A. M. Walker, *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals*, Adv. Appl. Probab. **5** (1973), 217–241.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, пр-т Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03057

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, пр-т Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03057

Адреса електронної пошти: malyar95@ukr.net

Стаття надійшла до редколегії 30.10.2017

CONSISTENCY OF THE LEAST SQUARES ESTIMATOR OF THE TEXTURED SURFACE SINUSOIDAL MODEL PARAMETERS

A. V. IVANOV, O. V. MALIAR

Abstract. For sinusoidal observation model of textured surface, i. e. for model where regression function is a sum of two-parameter harmonic oscillations and noise is a homogeneous isotropic Gaussian random field on the plane, the strong consistency conditions of unknown amplitudes and angular frequencies least squares estimates of indicated trigonometric regression model are obtained.

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПАРАМЕТРОВ СИНУСОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ТЕКСТУРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. ИВАНОВ, А. В. МАЛЯР

Аннотация. Для синусоидальной модели наблюдений текстурированной поверхности, т. е. модели, в которой функция регрессии является суммой двупараметрических гармонических колебаний, а шум — однородным и изотропным гауссовским случайным полем на плоскости, получены условия сильной состоятельности оценки наименьших квадратов неизвестных амплитуд и угловых частот указанной тригонометрической модели регрессии.