Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(98)/2018, с. 163–172

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(98)/2018, pp. 163–172

УДК 519.21

РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ОДНОРІДНОЇ СТРУНИ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ, ВИМУШЕНИХ ВИПАДКОВИМ СТІЙКИМ ШУМОМ

Л. І. РУСАНЮК, Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. У статті досліджується рівняння вимушених коливань однорідної струни із закріпленими кінцями, права частина якого має симетричний α-стійкий розподіл. Доведено, що функція, побудована за методом Фур'є, є узагальненим розв'язком рівняння, а також установлено регулярність траєкторій.

Ключові слова і фрази. Рівняння коливань струни, хвильове рівняння, метод Фур'є, узагальнений розв'язок, стійка міра з незалежними приростами, розклад Лепажа.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15, 35L05; Secondary 35R60, 60G52.

1. Вступ

Об'єктом дослідження у цій роботі є процес вимушених коливань однорідної струни, яка перебуває під дією випадкових сил, які мають симетричний α-стійкий розподіл. Більш точно, відхилення струни задається як розв'язок задачі Коші для хвильового стохастичного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) U(x,t) = h(x,t), \quad x \in [0,a],\ t \in (0,T], \\ U(x,0) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

з однорідними початковими умовами, у якому права частина є випадковим збуренням вигляду $h(x,t) = \sigma(x,t) \cdot \dot{M}(t)$, де σ — невипадкова функція, а $\dot{M}$ — випадковий «білий» шум із симетричним α-стійким розподілом.

Починаючи з роботи [3], рівняння коливань випадково збуреної струни досліджувалося багатьма авторами, зокрема, у [2, 13, 17]. Багатовимірні хвильові рівняння розглядалися у [4, 5, 11] та в інших роботах; докладну бібліографію зі стохастичних диференціальних рівнянь у частинних похідних можна знайти у [10, 19]. Більшість указаних досліджень розглядають ситуацію, коли випадкове збурення має нормальний розподіл. Хвильові рівняння з негауссівськими збуреннями розглядалися лише у декількох роботах, зокрема, у [12] досліджено хвильове рівняння, початкові дані у якому мають розподіл Леві, у [8, 14–16] — хвильові рівняння із шумом Леві у правій частині. Варто відзначити також роботи [1, 6], у яких розглядалися рівняння із загальною стохастичною мірою, без припущень про існування моментів або незалежність приростів.

У цій статті ми продовжуємо дослідження, започатковані в роботах [14, 15], в яких розглянуто хвильові рівняння з α-стійким збуренням на площині та у просторі. Розв'язок рівняння (1) будується за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур'є). Після цього ми доводимо, що побудована таким чином функція $U(x,t)$ коректно визначена і що вона є узагальненим розв'язком рівняння.

Автори вдячні анонімному рецензенту за уважне читання роботи та корисні поради, що суттєво покращили статтю.

Статтю влаштовано таким чином. У розділі 2 наведено основні відомості щодо стійких випадкових величин та їх розподілів. Цей розділ містить короткі відомості щодо розкладу в ряд Лепажа. У розділі 3 наведено постановку задачі та обґрунтовано метод Фур'є для рівняння. У розділі 4 встановлено траєкторні властивості розв'язку.

2. Попередні відомості

2.1. **Стійкі величини та їх розподіли.** У цьому розділі ми надаємо важливу інформацію про симетричні α-стійкі ($S\alpha S$) випадкові величини. Більш докладну інформацію про стійкі величини можна знайти у [18]. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний імовірнісний простір. Для $\alpha \in (0,2)$, що називається параметром стійкості, випадкова величина ξ є $S\alpha S$ із параметром масштабу $\sigma > 0$, якщо її характеристична функція

$$\mathsf{E}\big[e^{i\lambda\xi}\big] = e^{-|\sigma\lambda|^\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нам знадобиться $S\alpha S$ міра M на $[0,T]$ із незалежними приростами. За означенням, це множина випадкових величин $\{M(A), A \in \mathcal{B}([0,T])\}$, індексована сім'єю $\mathcal{B}([0,T])$ борелівських підмножин відрізка $[0,T]$, із такими властивостями:

(1) для будь-якої $A \in \mathcal{B}([0,T])$ випадкова величина $M(A)$ є $S\alpha S$ із параметром масштабу, що дорівнює $\lambda(A)$, мірі Лебега множини A;
(2) для довільних неперетинних множин $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}([0,T])$ значення $M(A_1), \dots, M(A_n)$ є незалежними;
(3) для довільних неперетинних множин $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}([0,T])$,

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$$

майже напевно.

Для функції $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ із

$$\|f\|^\alpha_{L^\alpha([0,T])} = \int_0^T |f(x)|^\alpha dx < \infty$$

можливо визначити стохастичний інтеграл

$$I(f) = \int_0^T f(s) M(ds),$$

значення якого є випадковою $S\alpha S$ величиною з параметром масштабу $\|f\|_{L^\alpha([0,T])}$. Нехай $\mathbf{T}$ — деяка параметрична множина. Для вимірної функції $f\colon \mathbf{T} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ такої, що для всіх $t \in \mathbf{T}$ функція $f(t,\cdot) \in L^\alpha([0,T])$, можна визначити випадкове поле $\{Z(t), t \in \mathbf{T}\}$ формулою

$$Z(t) = \int_0^T f(t,s) M(ds). \tag{2}$$

Для міри M справедливе зображення Лепажа. Нехай незалежні набори $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$, $\{\xi_k, k \geq 1\}$, $\{g_k, k \geq 1\}$ випадкових величин задовольняють такі умови:

(1) $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$ — послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;
(2) $\{\xi_k, k \geq 1\}$ — незалежні рівномірно розподілені на $[0,T]$ випадкові величини;
(3) $\{g_k, k \geq 1\}$ — незалежні нормально розподілені центровані випадкові величини з $\mathsf{E}\big[|g_k|^\alpha\big] = 1$.

Тоді M як випадковий процес, індексований $\mathcal{B}([0,T])$, має такі самі скінченновимірні розподіли, що й

$$M'(A) = C_\alpha T^{1/\alpha} \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \mathbf{1}_A(\xi_k) g_k, \quad A \in \mathcal{B}([0,T]), \tag{3}$$

де

$$C_\alpha = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha} \right)^{1/\alpha};$$

причому ряд майже напевно збігається для всіх $A \in \mathcal{B}([0,T])$. Відповідно, поле $\{Z(t), t \in \mathbf{T}\}$, визначене формулою (2), має такі ж скінченновимірні розподіли, що й

$$Z'(t) = C_\alpha T^{1/\alpha} \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} f(t, \xi_k) g_k, \tag{4}$$

причому ряд майже напевно збігається для всіх $t \in \mathbf{T}$. (Докладніше див. [7, лема 1], [18, теорема 1.4.2]). З огляду на це, надалі ми розглядатимемо міру M, задану формулою (3); відповідно, поле (2) буде задаватися формулою (4). Більше того, без обмеження загальності ми вважатимемо, що $\Omega = \Omega_\Gamma \times \Omega_\xi \times \Omega_g$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_\Gamma \otimes \mathsf{P}_\xi \otimes \mathsf{P}_g$, та для всіх $n \geq 1$, $\omega = (\omega_\Gamma, \omega_\xi, \omega_g) \in \Omega$ $\Gamma_n(\omega) = \Gamma_n(\omega_\Gamma)$, $\xi_n(\omega) = \xi_n(\omega_\xi)$, $g_n(\omega) = g_n(\omega_g)$. Символом E позначимо математичне сподівання (інтеграл Лебега) відносно P, символом E з індексами — математичне сподівання за відповідними координатами, наприклад,

$$\mathsf{E}_{\xi,g}[\eta](\omega_\Gamma) = \int_{\Omega_\xi} \int_{\Omega_g} \eta(\omega_\Gamma, \omega_\xi, \omega_g) d\mathsf{P}_\xi(\omega_\xi) d\mathsf{P}_g(\omega_g).$$

Усюди у статті символом C позначимо сталу, значення якої не є важливим і може змінюватися між рядками.

3. Рівняння коливань однорідної струни

3.1. **Постановка задачі.** Розглянемо процес вимушених коливань однорідної струни, яка розміщена вздовж осі x та закріплена на кінцях $x = 0$ та $x = a$, якщо у момент t в точці x на неї діє зовнішня сила інтенсивністю $h(x,t)$. Струна може здійснювати малі коливання у площині Oxu; відхилення точки струни x у момент часу t будемо позначати $U(x,t)$.

Рівняння малих коливань

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = h(x,t), \quad x \in [0;a],\ t \in [0;T], \tag{5}$$

у якому права частина є випадковим збуренням вигляду $h(x,s) = \sigma(x,t) \cdot \dot{M}(t)$, де $\sigma \in C([0;a] \times [0;T])$, причому $\sigma(0,s) = \sigma(a,s) = 0$, а $\dot{M}(t)$ — випадковий «білий» шум із симетричним α-стійким розподілом, породжений випадковою мірою з незалежними приростами.

Оскільки права частина рівняння (5) не є звичайною функцією, то воно не може мати класичного розв'язку. Тому ми шукатимемо узагальнений розв'язок рівняння, тобто такий, що для $\theta(x,t) \in C^\infty([0,a] \times [0,T])$, яка задовольняє $\theta(0,t) = \theta(a,t) = 0$ для всіх $t \in [0,T]$, з імовірністю 1 виконано рівність

$$\int_0^T \int_0^a U(x,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta(x,t) dx\, dt = \int_0^T \int_0^a \theta(x,t)\sigma(x,t) dx\, M(dt).$$

Оскільки кінці струни жорстко закріплені, то

$$U(0,t) = U(a,t) = 0. \tag{6}$$

Початкові умови однорідні, тобто

$$U(x,0) = U'_t(x,0) = 0. \tag{7}$$

Шукатимемо розв'язок мішаної задачі (5)–(7) у вигляді

$$U(x,t) = \int_0^t V(x,t-s,s)ds, \tag{8}$$

де $V(x;t;s)$ — розв'язок наступної задачі:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)(x,t) = 0, \quad x \in [0,a],\ t \in [0,T], \\ V(x,0,s) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0,s) = h(x,s) \end{cases} \tag{9}$$

із крайовими умовами

$$V(0,t,s) = V(a,t,s) = 0.$$

Добре відомо, що розв'язок цієї задачі має вигляд

$$V(x,t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \int_0^a h(\xi,s) \sin \frac{\pi n}{a} \xi\, d\xi \, \sin \frac{\pi n}{a} t \, \sin \frac{\pi n}{a} x,$$

якщо функція $h(x,s)$ кусково диференційовна. Незважаючи на те, що випадковий шум у рівнянні (5) не задовольняє цю умову, спробуємо шукати його розв'язок саме у такому вигляді, тобто покладемо

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{a} x \int_0^T \sin \frac{\pi n}{a}(t-s) \int_0^a \sigma(y,s) \sin \frac{\pi n}{a} y \, dy \, M(ds).$$

Розглянемо відповідний розклад Лепажа:

$$U(x,t) = C_\alpha T^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{a} x \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \sigma_n(\xi_k) g_k \sin \frac{\pi n (t-\xi_k)}{a}, \tag{10}$$

де

$$\sigma_n(s) = \int_0^a \sigma(y,s) \sin \frac{\pi n}{a} y \, dy.$$

Теорема 1. *Для всіх $t \in [0,T]$ ряд у формулі* (10) *збігається майже напевно у $L^2[0,a]$.*

Доведення. Позначимо

$$v_n(t) = \frac{2C_\alpha T^{1/\alpha}}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \sigma_n(\xi_k) g_k \sin \frac{\pi n (t-\xi_k)}{a}.$$

Оскільки функції $\sin \frac{\pi n}{a} x$ ортогональні в $L^2[0,a]$, то для доведення твердження теореми достатньо показати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(t) < \infty$$

майже напевно. Покажемо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\xi,g}\left[v_n(t)^2\right] < \infty$$

P_Γ-майже напевно. Враховуючи, що величини $\{g_k, k \geq 1\}$ незалежні та центровані, маємо

$$\mathsf{E}_g\left[v_n^2(t)\right] = \frac{4C_\alpha^2 T^{2/\alpha} \mathsf{E}[g_1^2]}{(\pi n)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \sigma_n^2(\xi_k) \sin^2 \frac{\pi n (t-\xi_k)}{a}.$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\xi,g}\left[v_n(t)^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4C_\alpha^2 T^{2/\alpha}\mathsf{E}[g_1^2]}{(\pi n)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \mathsf{E}_\xi\left[\sigma_n^2(\xi_k)\sin^2\frac{\pi n(t-\xi_k)}{a}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4C_\alpha^2 T^{2/\alpha-1}\mathsf{E}[g_1^2]}{(\pi n)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \int_0^T \sigma_n^2(z)\sin^2\frac{\pi n(t-z)}{a}dz \leq$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha} < \infty$$

майже напевно, оскільки з посиленого закону великих чисел випливає, що $\Gamma_k \sim k$, $k \to +\infty$, P_Γ-майже напевно. Теорему доведено. $\square$

Тепер доведемо, що функція $U(x,t)$ задовольняє рівняння (5) в узагальненому сенсі.

Теорема 2. *Для довільної функції* $\theta(x,t) \in C^\infty([0,a]\times[0,T])$, *такої, що* $\theta(0,t) = \theta(a,t) = 0$ *для всіх* $t \in [0,T]$, *з імовірністю 1 виконано рівність:*

$$\int_0^T\int_0^a U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\theta(x,t)dx\,dt = \int_0^T\int_0^a \theta(x,t)\sigma(x,t)dxM(dt). \qquad (11)$$

Доведення. Позначимо

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\theta(x,t);$$

очевидно, $\psi \in C^\infty([0,a]\times[0,T])$. Для кожного $N \geq 1$ визначимо функцію

$$U_N(x,t) = C_\alpha T^{1/\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{a}x\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^{-1/\alpha}\sigma_n(\xi_k)g_k\sin\frac{\pi n(t-\xi_k)}{a},$$

де для кожного $t \in [0,T]$ збіжність ряду у середньому квадратичному доводиться так само, як у теоремі 1, та

$$V_N = C_\alpha T^{1/\alpha}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^{-1/\alpha}g_k\int_0^a \theta(z,\xi_k)\sigma(z,\xi_k)dz.$$

Відмітимо, що $U_N(x,t)$ є рядом Фур'є, складеним із часткових сум ряду Лепажа для $U(x,t)$, V_N — часткова сума ряду Лепажа для правої частини рівності (11).

Спочатку покажемо, що для довільного $N \geq 1$

$$\int_0^T\int_0^a U_N(x,t)\psi(x,t)dx\,dt = V_N. \qquad (12)$$

Позначимо

$$u_n(t,x) = \frac{2C_\alpha T^{1/\alpha}}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{a}x\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^{-1/\alpha}\sigma_n(\xi_k)g_k\sin\frac{\pi n(t-\xi_k)}{a}.$$

Оцінимо

$$|u_n(t,x)| \leq \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k^{-1/\alpha}|\sigma_n(\xi_k)g_k| = \frac{CG_N}{n}\sum_{k=1}^{N}|\sigma_n(\xi_k)| =: m_n,$$

де $G_N = \max_{1\leq k\leq N}|g_k|\Gamma_k^{-1/\alpha}$. Оскільки $\sigma_n(\xi_k)$ — це, із точністю до сталої, коефіцієнти Фур'є неперервної функції $\sigma(\cdot,\xi_k)$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2(\xi_k) < \infty$, звідки, використовуючи нерівність Коші – Буняковського, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n = CG_N \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n(\xi_k)|}{n} \leq CG_N \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2(\xi_k) \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \right)^{1/2}.$$

Отже, за ознакою Вейєрштрасса ряд для $U_N(x,t)$ збіжний рівномірно на $[0,a] \times [0,T]$. Тому, враховуючи обмеженість функції ψ, рівняння (12) рівносильне такому:

$$C_\alpha T^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \int_0^T \int_0^a \sin \frac{\pi n}{a} x \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^{-1/\alpha} g_k \sin \frac{\pi n (t - \xi_k)}{a} \times$$
$$\times \int_0^a \sigma(z, \xi_k) \sin \frac{\pi n}{a} z \, dz \, \psi(x,t) dx \, dt =$$
$$= C_\alpha T^{1/\alpha} \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^{-1/\alpha} g_k \int_0^a \theta(z, \xi_k) \sigma(z, \xi_k) dz. \tag{13}$$

Щоб довести тотожність (13), достатньо перевірити рівність відповідних доданків, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \int_0^T \int_0^a \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi n (t - \xi_k)}{a} \int_0^a \sigma(z, \xi_k) \sin \frac{\pi n}{a} z \, dz \, \psi(x,t) dx \, dt =$$
$$= \int_0^a \theta(z, \xi_k) \sigma(z, \xi_k) dz. \tag{14}$$

Розглянемо функцію

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z),$$

де

$$w_n(z) = \frac{2}{\pi n} \sigma(z, \xi_k) \sin \frac{\pi n}{a} z \int_0^T \sin \frac{\pi n}{a} (t - \xi_k) \int_0^a \psi(x,t) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx \, dt.$$

Зінтегруємо частинами:

$$\int_0^a \psi(x,t) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx = -\frac{a\psi(a,t) \cos \pi n}{\pi n} + \frac{a\psi(0,t)}{\pi n} + \frac{a}{\pi n} \int_0^a \psi_x'(x,t) \cos \frac{\pi n}{a} x \, dx.$$

Звідси легко бачити, що $|w_n(z)| \leq \frac{C}{n^2}$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса ряд для $W(z)$ збігається рівномірно на $[0,a]$, тому може бути почленно інтегровний. Отже, рівність (14) рівносильна такій:

$$\int_0^a \sigma(z, \xi_k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{a} z \int_0^T \sin \frac{\pi n}{a} (s - \xi_k) \int_0^a \psi(x,s) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx \, ds \, dz =$$
$$= \int_0^a \sigma(z, \xi_k) \theta(z, \xi_k) dz.$$

У свою чергу, для доведення цього факту достатньо перевірити, що для довільних $y > 0, z \in [0,a]$ виконано

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{a} z \int_0^T \sin \frac{\pi n (s - y)}{a} \int_0^a \psi(x,s) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx \, ds = \theta(z,y). \tag{15}$$

Для деякого $R > T$ продовжимо θ на $[0,a] \times [0,R]$ так, що $\theta \in C^\infty([0,a] \times [0,R])$ та $\theta(x,R) = \frac{\partial}{\partial t} \theta(x,R) = 0$. Для цього продовження, як і раніше, визначимо

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta(x,t).$$

Розглянемо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) V(x,t) = \psi(x, R-t), \quad x \in [0,a],\ t \in [0,R], \\ V(x,0) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0, \\ V(0,t) = V(a,t) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Оскільки функція ψ є гладкою, то, як добре відомо, розв'язок такого рівняння має вигляд

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R \frac{2}{\pi n} \int_0^a \psi(\xi, R-\tau) \sin \frac{\pi n}{a} \xi\, d\xi \, \sin \frac{\pi n}{a}(t-\tau) d\tau \, \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

З іншого боку, функція $\theta(x, R-t)$, очевидно, задовольняє рівняння (16). Тоді з єдиності випливає, що

$$\theta(x, R-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{a} x \int_0^R \sin \frac{\pi n}{a}(t-\tau) \int_0^a \psi(\xi, R-\tau) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \, d\tau,$$

що збігається з рівністю (15) із точністю до заміни змінних $s = R - \tau, y = R - t$.

Отже, (12) доведено. Оскільки ряд Лепажа для правої частини рівності (11) збіжний майже напевно, то для доведення того, що ця рівність справедлива з імовірністю 1, достатньо показати, що

$$I_N := \int_0^T \int_0^a \big(U(x,t) - U_N(x,t)\big) \psi(x,t) dx\, dt \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad N \to \infty.$$

Використовуючи нерівність Коші – Буняковського, оцінимо

$$\mathsf{E}_{\xi,g}\big[I_N^2\big] \le \int_0^T \int_0^a \mathsf{E}_{\xi,g}\Big[\big(U(x,t) - U_N(x,t)\big)^2\Big] dx\, dt \cdot \int_0^T \int_0^a \psi^2(x,t) dx\, dt. \tag{17}$$

Помітимо, що для довільного $t \in [0,T]$

$$U(x,t) - U_N(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n,N}(t) \sin \frac{\pi n}{a} x,$$

де

$$v_{n,N}(t) = \frac{2C_\alpha T^{1/\alpha}}{\pi n} \sum_{k=N+1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \sigma_n(\xi_k) g_k \sin \frac{\pi n (t - \xi_k)}{a},$$

причому ряд збіжний в $L^2[0,a]$. Аналогічно доведенню теореми 1 маємо

$$\mathsf{E}_{\xi,g}\left[\int_0^a \big(U(x,t) - U_N(x,t)\big)^2 dx\right] = \frac{a}{2} \cdot \mathsf{E}_{\xi,g}\left[\sum_{n=1}^{\infty} v_{n,N}^2(t)\right] \le C \sum_{k=N+1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha}.$$

З урахуванням (17) одержуємо

$$\mathsf{E}_{\xi,g}\big[I_N^2\big] \le C \sum_{k=N+1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \to 0, \quad N \to \infty,$$

P_Γ-майже напевно. Зокрема, для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}_{\xi,g}\big(|I_N| \ge \varepsilon\big) \to 0, \quad N \to \infty,$$

P_Γ-майже напевно. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\mathsf{P}\big(|I_N| \ge \varepsilon\big) = \mathsf{E}_\Gamma\big[\mathsf{P}_{\xi,g}\big(|I_N| \ge \varepsilon\big)\big] \to 0, \quad N \to \infty,$$

що й потрібно довести. □

4. Властивості реалізації розв'язку рівняння коливань струни

Теорема 3. *Випадкове поле U має неперервну модифікацію, яка для довільного $\delta > 0$ задовольняє умову*

$$\sup_{\substack{x',x''\in[0,a],\, t',t''\in[0,T]\\ |x'-x''|\le h,\, |t'-t''|\le h}} |U(x',t') - U(x'',t'')| \le C(\omega)h|\log h|^{1+\delta}$$

для всіх достатньо малих додатних h.

Доведення. Оцінимо за нерівністю трикутника

$$\mathsf{E}_g\Big[|U(x',t') - U(x'',t'')|^2\Big] \le$$
$$\le 2\Big(\mathsf{E}_g\Big[|U(x',t') - U(x'',t')|^2\Big] + \mathsf{E}_g\Big[|U(x'',t') - U(x'',t'')|^2\Big]\Big).$$

Нехай $h \in (0, 1/2)$. Визначимо

$$a_1(h) = \sup_{\substack{t\in[0,T],\, x',x''\in[0,a]\\ |x'-x''|\le h}} \mathsf{E}_g\Big[|U(x',t) - U(x'',t)|^2\Big],$$

$$a_2(h) = \sup_{\substack{x\in[0,a],\, t',t''\in[0,T]\\ |t'-t''|\le h}} \mathsf{E}_g\Big[|U(x,t') - U(x,t'')|^2\Big].$$

Використовуючи зображення Лепажа (10), оцінимо

$$\mathsf{E}_g\Big[|U(x',t) - U(x'',t)|^2\Big] \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4C_\alpha^2 T^{2/\alpha}}{(\pi n)^2} \left|\sin\frac{\pi n}{a}x' - \sin\frac{\pi n}{a}x''\right|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \left|\sin\frac{\pi n(t-\xi_k)}{a}\right|^2 \sigma_n^2(\xi_k)\mathsf{E}[g_1^2].$$

Із нерівності

$$\left|\sin\frac{\pi n}{a}x' - \sin\frac{\pi n}{a}x''\right| \le \frac{\pi n}{a}|x'-x''| \le \frac{\pi n h}{a},$$

враховуючи, що $\sigma_n(s)$ є, із точністю до сталої, коефіцієнтами Фур'є функції $\sigma(\cdot, s)$, одержимо таку оцінку:

$$a_1(h) \le Ch^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2(\xi_k) \le C(\omega_\Gamma)h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha}. \tag{18}$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}a_1(2^{-n})}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$

майже напевно. Тому

$$\frac{a_1(2^{-n})}{b(2^{-n})} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{19}$$

майже напевно, де $b(h) = h^2|\log h|^{1+\varepsilon}$. Враховуючи, що функція a неспадна, а функція b для достатньо малих $h > 0$ задовольняє $b(h) \le b(2h) \le Cb(h)$, звідси маємо, що з імовірністю 1 для всіх достатньо малих $h > 0$ виконано

$$a_1(h) \le C(\omega_\Gamma)b(h) = C(\omega_\Gamma)h^2|\log h|^{1+\varepsilon}.$$

Використовуючи оцінку

$$\left|\sin\frac{\pi n}{a}(t'-\xi_k) - \sin\frac{\pi n}{a}(t''-\xi_k)\right| \le \frac{\pi n}{a}|t'-t''| \le \frac{\pi n h}{a},$$

одержуємо таку саму оцінку для a_2.

Як наслідок, для майже всіх $\omega_\xi \in \Omega_\xi, \omega_\Gamma \in \Omega_\Gamma$

$$\sup_{A_h} \mathsf{E}_g\left[|U(x',t') - U(x'',t'')|^2\right] \le C(\omega_\xi,\omega_\Gamma)h^2|\log h|^{1+\varepsilon},$$

для всіх достатньо малих $h > 0$, де

$$A_h = \left\{(x',x'',t',t'') \in [0,a]^2 \times [0,T]^2 : |x'-x''| \le h, |t'-t''| \le h\right\}.$$

При фіксованих $(\omega_\xi,\omega_\Gamma) \in \Omega_\xi \times \Omega_\Gamma$, поле U має центрований гауссівський розподіл. Тому (див. [9, с. 220]) існує модифікація U_ε поля U, яка задовольняє

$$\sup_{A_h}|U_\varepsilon(x',t') - U_\varepsilon(x'',t'')| \le C(\omega)h|\log h|^{1+\varepsilon/2} \tag{20}$$

для всіх достатньо малих $h > 0$.

Для того, щоб переконатися в існуванні модифікації, яка задовольняє цю оцінку для кожного $\varepsilon > 0$, використаємо стандартне міркування. Для довільних $x \in \in [0,a], t \in [0,T]$ та $\varepsilon > 0$ визначимо $\Omega_{\varepsilon,x,t} = \{\omega : U(x,t) = U_\varepsilon(x,t)\}$, тоді за означенням модифікації $\mathsf{P}(\Omega_{\varepsilon,x,t}) = 1$, а отже,

$$\mathsf{P}(\Omega') := \mathsf{P}\left(\bigcap_{\substack{\varepsilon\in(0,\infty)\cap\mathbb{Q},\\ x\in[0,a]\cap\mathbb{Q},\, t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}}} \Omega_{\varepsilon,x,t}\right) = 1.$$

Для довільних раціональних $\epsilon > 0$ функції $U_{\varepsilon'}$ на Ω' збігаються на зліченній скрізь щільній множині, а тому, завдяки неперервності, й в усіх точках. Отже, на Ω' всі ці модифікації однакові та задовольняють (20) одночасно для всіх додатних раціональних, а тому і для всіх додатних, $\varepsilon > 0$. $\square$

Список літератури

1. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2016), 1–15.
2. R. Carmona, D. Nualart, *Random nonlinear wave equations: smoothness of the solutions.* Probab. Theory Related Fields, **79** (1988), no. 4, 469–508.
3. E. Cabaña, *The vibrating string forced by white noise*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **15** (1970), 111–130.
4. R. C. Dalang, N. E. Frangos, *The stochastic wave equation in two spatial dimensions*, Ann. Probab., **26** (1998), no. 1, 187–212.
5. R. C. Dalang, M. Sanz-Sole, *Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three*, Mem. Amer. Math. Soc., **199**(931), AMS, Providence, 2009.
6. D. M. Gorodnya, *On the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for wave equations with general stochastic measures*, Theory Probab. Math. Statist., **85** (2012), 53–59.
7. N. Kôno, M. Maejima, *Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes*, Tokyo J. Math., **14** (1991), no. 1, 93–100.
8. D. Khoshnevisan, E. Nualart, *Level sets of the stochastic wave equation driven by a symmetric Lévy noise*, Bernoulli, **14** (2008), no. 4, 899–925.
9. M. A. Lifshits, *Gaussian random functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
10. S. V. Lototsky, B. L. Rozovsky, *Stochastic partial differential equations*, Universitext, Springer, Cham, 2017.
11. A. Millet, P.-L. Morien, *On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density*, Stochastic Processes Appl., **86** (2000), no. 1, 141–162.
12. B. Øksendal, F. Proske, M. Signahl, *The Cauchy problem for the wave equation with Lé vy noise initial data*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **9** (2006), no. 2, 249–270.
13. E. Orsingher, *Randomly forced vibrations of a string*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.), **18** (1982), no. 4, 367–394.
14. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise*, Mod. Stoch. Theory Appl., **3** (2016), no. 3, 237–248.
15. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with a stable noise*, Theory Probab. Math. Statist., **96** 2017, 143–155.

16. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with a coloured stable noise*, Random Oper. Stoch. Equ., **25** (2017), no. 4, 249–260.
17. L. Quer-Sardanyons, S. Tindel, *The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet*, Stochastic Processes Appl., **177** (2007), no. 10, 1448–1472.
18. G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, New York, 1994.
19. J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Ecole D'ete de Probabilites de Saint-Flour, XIV-1984, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1986, 265–439.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, Київ, 01601, Україна
Адреса електронної пошти: pruhara7@gmail.com

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, Київ, 01601, Україна
Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 06.01.2018

EQUATION FOR VIBRATIONS OF A STRING WITH FIXED ENDS, FORCED BY A STABLE RANDOM NOISE

L. I. RUSANIUK, G. M. SHEVCHENKO

Abstract. We study the equation for forced vibrations of a homogeneous string with a random force having a symmetric α-stable distribution. We show that the function constructed by the Fourier method is a generalized solution to the equation, and establish its pathwise regularity.

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ, ВЫНУЖДЕННЫХ УСТОЙЧИВЫМ СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ

Л. И. РУСАНЮК, Г. М. ШЕВЧЕНКО

Аннотация. В статье исследуется уравнение вынужденных колебаний однородной струны с закрепленными концами, правая часть которого имеет симметричное α-устойчивое распределение. Доказано, что построенная методом Фурье функция является обобщенным решением уравнения, а также установлена регулярность траекторий.