Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(98)/2018, с. 228–238

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(98)/2018, pp. 228–238

УДК 519.21

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ФУНКЦІЇ РИЗИКУ У НЕОДНОРІДНІЙ ЗА ЧАСОМ ТА ПРОСТОРОМ МОДЕЛІ КРАМЕРА – ЛУНДБЕРГА

М. В. КАРТАШОВ, В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Розглядається узагальнена модель ризику Крамера – Лундберга з неоднорідним за часом процесом Пуассона страхових подій, а також із інтенсивністю премій, що залежить від величини наявного страхового фонду. Знайдені явні нерівності для експоненційно нормованої рівномірної відстані (a) між функцією ризику у неоднорідних за часом і простором моделях та функцією ризику в однорідних за часом і неоднорідних за простором моделях, (b) між функціями ризику в однорідних за часом і неоднорідних за простором моделях та в однорідних за часом і простором моделях. Припускається, що функція інтенсивності премій наближається при зростанні страхового фонду до сталої.

Ключові слова і фрази. Неоднорідні у часі та просторі процеси Маркова, імовірність банкрутства, модель ризику Крамера – Лундберга.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B30; Secondary 60J25.

1. Вступ

Дослідження стійкості розподілів та асимптотики розподілу марковських моментів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлено у монографії автора [8], де наведено також ряд застосувань.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладено у монографії В. Золотарьова [3]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведено у книзі С. Мейна, Р. Твіді [7].

Враховуючи потреби практичних застосувань, доцільно поширити класичні результати теорії Крамера – Лундберга на клас неоднорідних процесів ризику. Наприклад, актуарна вартість поліса автострахування має враховувати сезонний фактор, що діє періодично та впливає на інтенсивність дорожньо-транспортних пригод.

У роботі [11] досліджено асимптотику функції ризику для неоднорідного за простором (зі змінною інтенсивністю премій) та однорідного і неперервного за часом узагальнення моделі ризику Крамера – Лундберга.

У цій роботі вказане вище дослідження продовжено у бік порівняння функцій ризику (тобто отримання явних нерівностей для їх різниці) для неоднорідної чи однорідної за часом чи простором моделі. Означення функції ризику (що те ж саме, що функція ймовірностей банкрутства залежно від страхового резерву, див. нижче) наведено у [5].

Для практичних застосувань двічі неоднорідної (за простором та часом) моделі також отримано явні експоненційні нерівності для різниці відповідних функцій ризику, із використанням результатів [9, 10, 12].

Перші частини роботи містять формулювання результатів, остання — доведення.

2. Неоднорідна за часом і простором модель Крамера – Лундберга

Нехай $(c(x), x \in \mathbb{R})$ додатна борелівська функція така, що функція $1/c(x)$ локально інтегровна та для деяких сталих $c > 0$ і $\gamma > 0$

$$c(x) - c = O\big(\exp(-\gamma x)\big), \quad x \to \infty. \tag{1}$$

Розглянемо неоднорідний за часом процес Маркова у $\mathbb{R}$, що описує динаміку страхового капіталу та є неперервним справа розв'язком стохастичного рівняння

$$dX(t) = c\big(X(t)\big)dt - d\widetilde{Z}(t),\ t \ge s, \quad X(s) = x. \tag{2}$$

Існування та єдиність розв'язку обґрунтовані у лемі 1 нижче.

Тут $c(x)$ задає інтенсивність премій при наявному страховому фонді x, а процес $\widetilde{Z}(t)$ має незалежні прирости

$$\widetilde{Z}(t) - \widetilde{Z}(s) = \sum_{\widetilde{\nu}(s) < n \le \widetilde{\nu}(t)} \xi_n \tag{3}$$

та описує страхові виплати на $(s, t]$, тут $\widetilde{\nu}(t)$ — випадковий процес, що визначено нижче.

Величини $(\xi_n, n \ge 1)$ у (3) є незалежними однаково розподіленими невід'ємними випадковими величинами страхових виплат, із $\mathsf{P}(\xi_n < x) = F(x)$, $G(x) = 1 - F(x)$, $m = \mathsf{E}\xi_1$, та задовольняють умову Крамера про скінченність при деякому $\alpha > 0$ генеруючої функції моментів

$$\widehat{f}(\alpha) = \mathsf{E}\exp(\alpha\xi_1) < \infty. \tag{4}$$

Нехай також

$$\widehat{G}(\alpha) = \Big(\widehat{f}(\alpha) - 1\Big)/\alpha = \int_0^\infty \exp(\alpha x)G(x)dx.$$

У (3) за припущенням випадковий процес $(\widetilde{\nu}(t), t \ge 0)$ із незалежними приростами не залежить від (ξ_n), задає кількість страхових подій на $(0, t]$ та є неоднорідним процесом Пуассона зі структурною мірою $\widetilde{\Lambda}(s,t) = \int_s^t \widetilde{\lambda}(u)du$ і борелівською невід'ємною локально інтегровною інтенсивністю $\widetilde{\lambda}(u)$ такою, що $\widetilde{\Lambda}(s, \infty) = \infty$. Отже,

$$\mathsf{P}\big(\widetilde{\nu}(t) - \widetilde{\nu}(s) = n\big) = \exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,t)\Big)\Big(\widetilde{\Lambda}(s,t)\Big)^n/n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Визначимо момент першого стрибка процесу $\widetilde{\nu}(t)$ після s

$$\theta_s = \inf\big(t > s : \widetilde{\nu}(t) > \widetilde{\nu}(s)\big). \tag{6}$$

Щільність θ_s дорівнює $\mathsf{P}_{sx}(\theta_s \in du) = \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)du,\ u \ge s.$

За теорією процесів із незалежними приростами [1, 2], інфінітезимальний оператор $A(t)$ (або ж характеристичний оператор Динкіна [2, II.5]) процесу $(X(t))$ має вигляд

$$A(t)g(x) = c(x)g'(x) + \widetilde{\lambda}(t)[g * F(x) - g(x)], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

для $g \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ (або $g \in \mathfrak{D}(A(t))$ — області визначення лінійного оператора $A(t)$).

Тут згортка $g * F(x) = \int_0^\infty g(x-y)dF(y)$. Для функції f згортка визначається як $f * g(x) = \int_0^\infty f(x-y)g(y)dy$.

Визначимо неперервні строго зростаючі функції, що внаслідок умов на $c(x)$ є ізоморфізмами $\mathbb{R}_+$:

$$D(x) = \int_0^x \frac{1}{c(y)}dy, \qquad C(y) = \sup(x : D(x) < y) = D^{(-1)}(y). \tag{8}$$

Нехай також

$$H(x,t) = C(D(x) + t) - x, \quad x, t \ge 0. \tag{9}$$

Зауважимо, що ця функція не спадає за t та невід'ємна, $H(x, 0) = 0$.

Лема 1. *За умови $X(s) = x \geq 0$ до настання моменту θ_s у (6) справедливі рівності*

$$X(t) = x + H(x, t - s), \quad s \leq t < \theta_s,$$
$$X(\theta_s) = x + H(x, \theta_s - s) - \xi_{\widetilde{\nu}(s)+1}. \tag{10}$$

Надалі символи P_{sx} та E_{sx} означають імовірність та математичне сподівання за умови $X(s) = x$.

3. Момент банкрутства та зупинений процес

Основним об'єктом дослідження є асимптотика розподілу моменту банкрутства

$$\zeta_{sx} = \inf(t > s : X(t) < 0), \text{ де } X(s) = x. \tag{11}$$

Тому розглянемо процес з обривом

$$X_t = X(t) 1_{t < \zeta_{sx}} - \infty 1_{t \geq \zeta_{sx}}, \quad t \geq s,$$

зі значеннями у $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$. Він є марковським субпроцесом процесу $X(t)$, що відповідає мультиплікативному функціоналу $\mu_s^t = 1_{\{\zeta_{sx} > t\}}$ [2, глава 1.5].

Внаслідок неперервності $X(t)$ справа, означення субпроцесу X_t та визначення інфінітезимального оператора (траєкторії процесів $X(t)$ та X_t збігаються до настання строго додатного марковського моменту ζ_{sx} для кожного $x \geq 0$) інфінітезимальний оператор A_t процесу X_t має вигляд

$$A_t g(x) = [A(t) g](x) 1_{x \geq 0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A_t g(-\infty) = 0. \tag{12}$$

для функцій g із $g(x) = 0$ при $x < 0$.

Визначимо при $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+), t \geq s$, перехідну ймовірність

$$P_{st}(x, B) = \mathsf{P}_{sx}(X_t \in B) = \mathsf{P}_{sx}(X(t) \in B, \ \zeta_{sx} > t). \tag{13}$$

Розглянемо при $x \geq 0$ ймовірності виживання та банкрутства (функцію ризику) на нескінченному горизонті

$$\widetilde{p}_s(x) = P_{s\infty}(x, \mathbb{R}_+) = P_{s\infty} 1(x),$$
$$\widetilde{q}_s(x) = 1 - \widetilde{p}_s(x) = P_{sx}(\zeta_{sx} < \infty), \tag{14}$$

де $P_{s\infty} 1(x) = \lim_{t\to\infty} P_{st} 1(x) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}_{sx}(\zeta_{sx} > t) = \mathsf{P}_{sx}(\zeta_{sx} = \infty)$, а 1 — одинична функція на $\mathbb{R}_+$. При $x < 0$ довизначимо ці функції як нульові.

4. Оцінка Крамера в однорідній за часом моделі

Нехай стала $\lambda > 0$, а $(\nu(t))$ — однорідний за часом процес Пуассона зі сталою функцією інтенсивності $\lambda(t) = \lambda$, $\Lambda(s, t) = \lambda(t - s)$ у (5).

Розглянемо однорідний випадковий процес ризику (Y_t) аналогічний до (X_t) із заміною неоднорідного процесу $(\widetilde{\nu}(t))$ на однорідний $(\nu(t))$ та з тією ж інтенсивністю премій $(c(x))$ і сумами виплат (ξ_n). Інфінітезимальний оператор цього процесу має вигляд

$$Ag(x) = \big(c(x) g'(x) + \lambda[g * F(x) - g(x)]\big) 1_{x \geq 0}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

для $g(x) = 0$ при $x < 0$.

Позначимо через

$$p(x) = p_s(x), \quad q(x) = q_s(x) \tag{16}$$

відповідні до (14) імовірності виживання та банкрутства для процесу (Y_t), які, очевидно, не залежать від s. У роботі [11], лема 3 та рівність (30), доведено існування для майже всіх x невід'ємної похідної

$$r(x) = -q'(x), \quad q(x) = \int_x^\infty r(y) dy. \tag{17}$$

Для функцій g на $\mathbb{R}_+$ введемо при $\alpha \geq 0$ позначення

$$\|g\|_\alpha = \sup_{x\geq 0} \exp(\alpha x)|g(x)|, \qquad \widehat{g}(\alpha) = \int_0^\infty \exp(\alpha x) g(x)dx, \tag{18}$$

$$I_s(g) = \int_s^\infty |g(x)|dx, \qquad g^\pm(x) = \max(0, \pm g(x)).$$

Припустимо, що стала c у (1) задовольняє умову балансу

$$\lambda m < c. \tag{19}$$

Тому за припущень (4),(19) строго додатним є показник Крамера

$$\beta \equiv \sup\Big(\alpha \geq 0 : \lambda\widehat{G}(\alpha) < c\Big) > 0, \tag{20}$$

оскільки $\widehat{G}(0) = m$.

Одночасно з попередніми розглянемо також при $\alpha \geq 0$ умову

$$\Delta(\alpha) \equiv \inf_{x\geq 0}\left(c(x) - \lambda\int_0^x \exp(\alpha y)G(y)dy\right)/\lambda\widehat{f}(\alpha) > 0. \tag{21}$$

Зауваження 1. Для виконання (21) при малих $\alpha \geq 0$ необхідно та достатньо, щоб $\Delta(0) > 0$. Якщо інтенсивність $c(x)$ не зростає, то (21) виконано при $\alpha < \beta$.

Для обґрунтування вкажемо, що функція $\Delta(\alpha)$ неперервна в нулі внаслідок (4) та не зростає. а значення $\Delta(0) = c/\lambda - m$. Таким чином, якщо $\Delta(0) > 0$, то виконана умова (19) і $\Delta(\alpha) > 0$ для всіх $\alpha \in [0, \beta)$.

Теорема 1. *(a) Нехай виконуються умови (1) і (19), та стала* $0 \leq \alpha < \min(\gamma, \beta)$. *Тоді*

$$\|q\|_\alpha \leq \widehat{r}(\alpha) \leq \Big(\big\|(c(\cdot) - c)^-\big\|_\alpha + \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big)/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big). \tag{22}$$

(b) При $0 \leq \alpha < \beta$ *за припущення додатності знаменника правої частини*

$$\|q\|_\alpha \leq \widehat{r}(\alpha) \leq \lambda\widehat{G}(\alpha)/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha) - \big\|(c(\cdot) - c)^-\big\|_0\Big). \tag{23}$$

(c) За виконання (21) для даного $\alpha > 0$

$$\|q\|_\alpha \leq \|r\|_\alpha/\alpha \leq 1/\alpha\Delta(\alpha). \tag{24}$$

5. Порівняння з однорідною за часом моделлю Крамера – Лундберга

Порівняння моделей ми розуміємо як явні нерівності для різниці відповідних функцій ризику.

Припустимо, що неоднорідний процес-розв'язок (2) задовольняє при деякому $\alpha > 0$, фіксованому $s \geq 0$ та деякій сталій $\rho_\alpha(s) < 1$ умову

$$\sup_{x\geq 0} \widehat{f}(\alpha)\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)\exp\big(-\alpha H(x, u-s)\big)du \leq \rho_\alpha(s) < 1. \tag{25}$$

Зауваження 2. Для виконання (25) при достатньо малих $\alpha > 0$ необхідно та достатньо, щоб

$$\inf_{x\geq 0}\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)H(x, u-s)du > m. \tag{26}$$

Дійсно, вираз під знаком верхньої межі у лівій частині (25) при кожному x має розклад Тейлора

$$\big(1 + m\alpha + o(\alpha)\big)\big(1 - \alpha B(x) + o(\alpha)\big) = 1 - \big(B(x) - m\big)\alpha + o(\alpha), \quad \alpha \to 0,$$

де $B(x)$ — вираз під знаком нижньої межі у лівій частині (26) Тут усі $o()$ рівномірні за x внаслідок додатності H м. с. Візьмемо верхню межу по x в останньому співвідношенні та виберемо мале додатного α (не обов'язково для саме того значення, що у (25)). Тоді шукана еквівалентність випливає з того, що різниця $B(x)-m$ відділена від нуля.

Зауваження 3. В однорідній схемі з $\widetilde{\lambda}(u)=\lambda$ та $c(x)=c$ умова (26) еквівалентна умові балансу (19).

Дійсно, у даних припущеннях $H(x,t)=ct$, а ліва частина (26) дорівнює c/λ .

Наслідок 1. *Якщо функція $c(x)$ монотонна, то $H(x,t)$ монотонна за аргументом x у той же бік.*

Якщо $c(\cdot)$ не спадає, умова (26) еквівалентна умові

$$\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)C(u-s)du>m. \tag{27}$$

Якщо ж $c(\cdot)$ не зростає, то умова (26) еквівалентна умові

$$\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)\big(C(u-s)-K(u-s)\big)du>m, \tag{28}$$

де $K(t)=\int_0^\infty\big(1-c(y+H(y,t))/c(y)\big)dy.$

Теорема 2. *Нехай для $\alpha\ge 0$ виконується умова (25) та одна з умов (a),(b),(c) теореми 1. Тоді*

$$\|\widetilde{q}_s-q\|_\alpha\le I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot)-\lambda\Big)\widehat{f}(\alpha)\max\big(1,\|q\|_\alpha\big)/\big(1-\rho_\alpha(s)\big), \tag{29}$$

де норма $\|q\|_\alpha$ у правій частині обмежується у відповідному пункті теореми 1.

У кожному випадку для ймовірності ризику справедлива нерівність

$$\widetilde{q}_s(x)\le\exp(-\alpha x)(\|\widetilde{q}_s-q\|_\alpha+\|q\|_\alpha). \tag{30}$$

6. Порівняння із класичною моделлю Крамера – Лундберга

Розглянемо випадковий процес ризику $(\overline{Y}_t)$ аналогічний до (Y_t) із заміною неоднорідної інтенсивності премій $(c(x))$ на однорідну $\overline{c}(x)=c$ і тими ж сумами виплат (ξ_n). Інфінітезимальний оператор цього процесу має вигляд

$$\overline{A}g(x)=\big(cg'(x)+\lambda[g*F(x)-g(x)]\big)1_{x\ge 0},\quad x\in\mathbb{R}_+. \tag{31}$$

Відповідні функції у (16), (17) позначимо через

$$\overline{p}(x),\quad \overline{q}(x),\quad \overline{r}(x).$$

Для цих функцій відомі явні нерівності [5].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (1) і (19), та $0\le\alpha<\min(\gamma,\beta)$. Тоді*

$$\|q-\overline{q}\|_\alpha\le\Big(\|c(\cdot)-c\|_\alpha+\lambda\widehat{G}(\alpha)\min\big(\|c(\cdot)-c\|_0/c,1\big)\Big)/\Big(c-\lambda\widehat{G}(\alpha)\Big). \tag{32}$$

Далі, виконується оцінка знизу

$$\lambda m/(c+\|c(\cdot)-c\|_0)\le q(0).$$

Крім того, за додаткової умови $\|c(\cdot)-c\|_0<c$ справедлива оцінка зверху

$$q(0)\le\lambda m/(c-\|c(\cdot)-c\|_0). \tag{33}$$

7. Приклад: дворівнева інтенсивність премій

Розглянемо приклад залежної від страхового фонду дворівневої інтенсивності премій

$$c(x) = b1_{x<z} + c1_{x\geq z}, \tag{34}$$

при деяких $b, c, z > 0$.

Умова (1) виконана при кожному $\gamma > 0$.

Основні функції такі:

$$\begin{aligned} D(x) &= (x/b)1_{x\leq z} + \big(z/b + (x-z)/c\big)1_{x>z}, \\ C(y) &= (by)1_{y\leq z/b} + \big(z + c(y - z/b)\big)1_{y>z/b}, \\ H(x,t) &= (ct)1_{x>z} + (bt)1_{0\leq t\leq (z-x)/b} + \big(ct + (z-x)(1-c/b)\big)1_{x\leq z, t>(z-x)/b}. \end{aligned} \tag{35}$$

Перші дві рівності виводяться з (8), а останню простіше вивести з (10) та рівняння (2) при $t < \zeta_{sx}$.

Умова (21) виконується при деякому $\alpha > 0$ тоді і тільки тоді, коли справджується умова балансу (19) та $b > \lambda \int_0^z G(y)dy$. Це твердження є очевидним наслідком зауваження 1 та (34).

Наслідок 2. *За припущення (34)*

(a) При $0 \leq \alpha < \beta$

$$\|q\|_\alpha \leq \Big((b-c)^- e^{\alpha z} + \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big)\Big/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big).$$

(b) При $0 \leq \alpha < \beta$ *за умови додатності знаменника у правій частині*

$$\|q\|_\alpha \leq \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha) - (b-c)^-\Big).$$

(c) Нехай $0 < \alpha < \beta$ *та*

$$\overline{\Delta}(\alpha) = \min\left(c - \lambda\widehat{G}(\alpha), b - \lambda\int_0^z \exp(\alpha y)G(y)dy\right)\Big/\lambda\widehat{f}(\alpha) > 0.$$

Тоді

$$\|q\|_\alpha \leq 1/\alpha\overline{\Delta}(\alpha).$$

Зауважимо, що інтенсивність у (34) завжди монотонна.

Тому при $b \leq c$ (не спадання за x) з урахуванням рівностей (27) та (35) і виразу для щільності θ_s маємо необхідну та достатню умову (26)

$$\mathsf{E}_s\big[b(\theta_s - s)1_{b(\theta_s - s)<z} + \big(c(\theta_s - s) + z(1-b/c)\big)1_{b(\theta_s - s)\geq z}\big] > m.$$

Аналогічно, при $b \geq c$ (не зростання за x) маємо необхідну та достатню умову (26)

$$\mathsf{E}_s[c(\theta_s - s)] > m.$$

Наслідок 3. *Припустимо, що виконуються умови одного з пунктів (a),(b),(c) наслідку 2.*

(a1) Нехай $b \leq c$ *та*

$$\overline{\rho}_\alpha(s) \equiv \widehat{f}(\alpha)\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)\exp\big(-\alpha H(0,u-s)\big)du < 1,$$

де $H(0,t) = (bt)1_{t<z/b} + \big(ct + z(1-c/b)\big)1_{t\geq z/b}$.

Тоді

$$\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha \leq I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda\Big)\widehat{f}(\alpha)\max(1, \|q\|_\alpha)\big/\big(1 - \overline{\rho}_\alpha(s)\big), \tag{36}$$

де $\|q\|_\alpha$ *оцінюється у відповідному пункті наслідку 2.*

(a2) Нехай $b \ge c$ та

$$\overline{\rho}_\alpha(s) \equiv \widehat{f}(\alpha)\int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big)\exp\big(-\alpha H(\infty, u-s)\big)du < 1,$$

де $H(\infty,t) = ct$.

Тоді справджується нерівність (36).

Наслідок 4. *Нехай виконується умова (19), та $0 \le \alpha < \beta$. Тоді*

$$\|q-\overline{q}\|_\alpha \le \Big(|c-b|\exp(\alpha z) + \min(|b/c-1|,1)\lambda\widehat{G}(\alpha)\Big)\Big/\Big(c-\lambda\widehat{G}(\alpha)\Big).$$

Далі виконується оцінка знизу

$$\lambda m/(c+|c-b|) \le q(0).$$

Крім того, за додаткової умови $b < 2c$ справедлива оцінка зверху

$$q(0) \le \lambda m/(c-|c-b|).$$

Зауважимо, що нерівності наслідку 4 є рівностями при $b = c$.

8. Доведення

Доведення леми 1. Із (2) та (6) виводимо, що при $s \le t < \theta_s$ виконується стохастичне рівняння $dX(t) = c(X(t))dt$, звідки за означенням (8)

$$t - s = \int_s^t dX(u)/c(X(u)) = D(X(t)) - D(x).$$

Тому з (8) випливає перша рівність у (10). Друга рівність є очевидним наслідком першої та неперервності справа процесу $X(t)$ □

Наступна лема містить твердження про похідну функції ризику, що дозволяє дослідити асиптотику останньої.

Лема 2 [11, лема 4]. *Функція $r(x)$ у (17) є розв'язком рівняння*

$$c(x)r(x) = \lambda\int_0^x r(y)G(x-y)dy + \lambda\big(1-q(0)\big)G(x), \quad x \ge 0, \tag{37}$$

для м. в. x, причому

$$\int_0^\infty c(x)r(x)dx = \lambda m. \tag{38}$$

Наступна фундаментальна лема описує властивості розв'язків рівнянь типу (37).

Лема 3. *Нехай $k(t,s)$ борелівська невід'ємна обмежена функція, а борелівська обмежена функція $y(t) \ge 0$. Тоді рівняння Вольтерра*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t k(t,s)x(s)ds, \quad t \ge 0, \tag{39}$$

має единий розв'язок у класі вимірних локально обмежених функцій та є невід'ємним: $x(t) \ge 0$.

Доведення. Вказаний розв'язок є сумою ряду Неймана методу послідовних наближень і є невід'ємним, оскільки степені невід'ємних операторів є невід'ємними [13, лема 3; 4, гл. 3]. Зауважимо, що внаслідок лінійності для розв'язків $x_i(t)$ (39) та $y_i(t)$ у правій частині з $y_1(t) \ge y_2(t)$ випливає, що $x_1(t) \ge x_2(t)$ при всіх t. □

Доведення теореми 1 (a). Нерівність $\|q\|_\alpha = \sup_{x\geq 0}\exp(\alpha x)\int_x^\infty r(y)dy \leq \widehat{r}(\alpha)$ очевидна за означенням (17).

Перепишемо (37) у вигляді

$$cr(x) = (c - c(x))r(x) + \lambda r * G(x) + \lambda p(0)G(x). \tag{40}$$

Множенням (40) на $\exp(\alpha x)$ та інтегруванням на $[0,\infty)$ отримуємо

$$c\widehat{r}(\alpha) \leq \left\|(c - c(\cdot))^+\right\|_\alpha \int_0^\infty r(y)dy + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda p(0)\widehat{G}(\alpha) \leq$$
$$\leq \left\|(c(\cdot) - c)^-\right\|_\alpha + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda\widehat{G}(\alpha),$$

з урахуванням (17) та нерівностей $p(0), q(0) \leq 1$. Звідси маємо (22). □

Доведення теореми 1 (b). Аналогічно з рівняння (40) маємо, що

$$c\widehat{r}(\alpha) \leq \left\|(c - c(\cdot))^+\right\|_0 \widehat{r}(\alpha) + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda\widehat{G}(\alpha),$$

звідки отримуємо (23). □

Доведення теореми 1 (c). Нерівність $\|q\|_\alpha \leq \|r\|_\alpha/\alpha$ очевидна згідно із (17).

Із (37) виводимо, що функція $x(t) = -r(t) + K\exp(-\alpha t)$ є розв'язком рівняння (39) з ядром $k(s,t) = \lambda G(t-s)$ та правою частиною

$$y(t) = -\lambda p(0)G(t) + K\exp(-\alpha t)\left(c(t) - \lambda\int_0^t \exp(\alpha s)G(s)ds\right).$$

Тому за лемою 3 нерівності $x(t) \geq 0$ (тобто $\|r\|_\alpha \leq K$) випливають із нерівностей $y(t) \geq 0, t \geq 0$. Останні через нерівності $p(0) \leq 1$ та $\exp(\alpha t)G(t) \leq \widehat{f}(\alpha)$ виконуються за умовою (21) при $K = 1/\Delta(\alpha)$. Отже, доведено нерівність $\|r\|_\alpha \leq 1/\Delta(\alpha)$ та (24). □

Доведення наслідку 1. Обчислимо з (9) для майже всіх x

$$\partial/\partial x H(x,t) = C'(D(x) + t)/c(x) - 1,$$

звідки внаслідок (8) та $C'(D(x))/c(x) = 1$ отримуємо при майже всіх x тотожність

$$\partial/\partial x H(x,t) = c(x + H(x,t))/c(x) - 1. \tag{41}$$

Це доводить перше твердження наслідку, оскільки $H(x,t) \geq 0$.

Якщо інтенсивність $c(x)$ не спадає за x, то найменше значення (26) досягається при $x = 0$, тому досить врахувати, що $H(0,t) = C(t)$.

Якщо ж інтенсивність $c(x)$ не зростає за x, то найменше значення (26) досягається при $x = \infty$, тому слід врахувати рівність

$$H(\infty,t) = C(t) - K(t),$$

що випливає з інтегрування (41) на $[0,x]$ та рівності $H(0,t) = C(t)$. □

Доведення теореми 2. Розглянемо неоднорідний процес (X_t) з інфінітезимальним оператором (12), перехідною ймовірністю P_{st} у (13) та базовий однорідний процес (Y_t) з інфінітезимальним оператором (15). Вказані оператори задовольняють означення квазіоднорідності [12, с. 3], оскільки різницевий оператор у (AD) [12] згідно з (12) та (15) має вигляд

$$D_s g(x) \equiv (A_s - A)g(x) = \left(\widetilde{\lambda}(s) - \lambda\right)\left(g * F(x) - g(x)\right)1_{x\geq 0} \tag{42}$$

та є обмеженим при нормі $\|\cdot\|_\alpha$.

З урахуванням рівності $\widetilde{q}_s - q = -(\widetilde{p}_s - p)$ застосуємо нерівність (17) теореми 2 [12] із нормою $\|\cdot\|_\alpha$
$$\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha \le \int_s^\infty \|P_{su}\|_\alpha \|D_u p\|_\alpha du, \tag{43}$$
де ядро оператора P_{su} визначено у (13).

Згідно з (42) при $u \ge s$
$$\begin{aligned}\int_s^\infty \|D_u p\|_\alpha du &\le I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda\Big) \sup_{u\ge 0} \exp(\alpha u)|(p * F(u) - p(u))| = \\ &= I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda\Big) \sup_{u\ge 0} \exp(\alpha u)|(-G(u) - q * F(u) + q(u))| \le \\ &\le I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda\Big) \max\big(\max(1, \|q\|_\alpha)\widehat{f}(\alpha), \|q\|_\alpha\big) = \\ &= I_s\Big(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda\Big) \widehat{f}(\alpha) \max(1, \|q\|_\alpha).\end{aligned} \tag{44}$$

Далі розглянемо функції
$$\varphi_{st}(x) = \mathsf{E}_{sx} \exp(-\alpha X_t + \alpha x), \quad \varphi_s = \sup_{t\ge s,\, x\ge 0} \varphi_{st}(x). \tag{45}$$
За означенням операторної норми та ядра P_{st} у (13)
$$\|P_{st}\|_\alpha = \sup_{x\ge 0} \varphi_{st}(x) \le \varphi_s. \tag{46}$$

За марковською властивістю процесу (X_t) для марковського моменту θ_s у (6) та лемою 1 з урахуванням позначення $J_s \equiv X_{\theta_s} = x + H(x, \theta_s - s) - \xi_{\nu(s)+1}$ отримуємо
$$\begin{aligned}\varphi_{st}(x) &= \mathsf{E}_{sx} \exp(-\alpha H(x, t-s))1_{\theta_s > t} + \\ &\quad + \mathsf{E}_{sx} \exp(-\alpha J_s + \alpha x) \mathsf{E}_{\theta_s J_s} \exp(-\alpha X_t + \alpha J_s) 1_{\theta_s \le t} = \\ &= \mathsf{E}_{sx} \exp(-\alpha H(x, t-s))1_{\theta_s > t} + \\ &\quad + \mathsf{E}_{sx} \exp(-\alpha J_s + \alpha x) \varphi_{\theta_s, t}(J_s) 1_{\theta_s \le t} = \\ &= \int_t^\infty \widetilde{\lambda}(u) \exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big) \exp(-\alpha H(x, u-s)) du + \\ &\quad + \int_s^t \widetilde{\lambda}(u) \exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big) du \, \exp(-\alpha H(x, u-s)) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \exp(\alpha y) \varphi_{ut}(H(x, u-s) + x - y) dF(y).\end{aligned} \tag{47}$$

Заміною $\varphi_{ut}(\cdot)$ у правій частині на її верхню межу φ_u (45), що не залежить від x, та переходячи до верхньої межі при $t \ge s$ та $x \ge 0$ у (47) з урахуванням (5) отримуємо нерівність
$$\varphi_s \le 1 + \widehat{f}(\alpha) \sup_{t\ge s,\ x\ge 0} \int_s^t \widetilde{\lambda}(u) \exp\Big(-\widetilde{\Lambda}(s,u)\Big) \exp(-\alpha H(x, u-s)) \varphi_u du.$$

За умовою (25) ядра у правій частині є стискаючими з нормою не більшою за $\rho_\alpha(s)$, тому повторний перехід до верхньої межі з урахуванням монотонності φ_s у (45) призводить до нерівності
$$\|P_{st}\|_\alpha \le \varphi_s \le 1/(1 - \rho_\alpha(s)) \tag{48}$$
згідно з означенням (25).

Нарешті, підстановка (48) та використання (44) у (43) доводить шукану нерівність (29).

Нерівність (30) випливає з нерівності трикутника для норми (18). □

Доведення теореми 3. Застосуємо до процесів $(Y_t), (\overline{Y}_t)$ тотожність (37) леми 2 та віднімемо першу рівність від другої. Отримуємо

$$(r(x) - \overline{r}(x))c = r(x)(c - c(x)) + \lambda(r - \overline{r}) * G + \lambda(\overline{q}(0) - q(0))G(x). \tag{49}$$

Множенням (49) на $\exp(\alpha x)$ та інтегруванням на $\mathbb{R}_+$ виводимо

$$c\int_0^\infty \exp(\alpha x)|r(x) - \overline{r}(x)|dx \le \|c - c(\cdot)\|_\alpha \int_0^\infty r(x)dx + \\ + \widehat{G}(\alpha)\int_0^\infty \exp(\alpha x)|r(x) - \overline{r}(x)|dx + \lambda\widehat{G}(\alpha)|\overline{q}(0) - q(0)|. \tag{50}$$

Звідси з урахуванням $q(0) \le 1$ виводимо нерівність

$$\int_0^\infty \exp(\alpha x)|r(x) - \overline{r}(x)|dx \le \Big(\|c - c(\cdot)\|_\alpha + \lambda\widehat{G}(\alpha)|\overline{q}(0) - q(0)|\Big)/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big). \tag{51}$$

Враховуючи (38), за (17) отримуємо

$$\|q - \overline{q}\|_\alpha \le \int_0^\infty \exp(\alpha x)|r(x) - \overline{r}(x)|dx \le \\ \le \Big(\|c - c(\cdot)\|_\alpha + \lambda\widehat{G}(\alpha)|\overline{q}(0) - q(0)|\Big)/\Big(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)\Big). \tag{52}$$

Далі застосуємо рівняння (38) до процесів $(Y_t), (\overline{Y}_t)$ та віднімемо одне від одного:

$$c\int_0^\infty (r(x) - \overline{r}(x))dx = \int_0^\infty r(x)(c - c(x))dx.$$

Звідси

$$c|q(0) - \overline{q}(0)| = c\left|\int_0^\infty (r(x) - \overline{r}(x))dx\right| = \left|\int_0^\infty r(x)(c - c(x))dx\right| \le \\ \le \|c - c(\cdot)\|_0 \int_0^\infty r(x)dx = \|c - c(\cdot)\|_0 q(0). \tag{53}$$

Оскільки $\overline{q}(0) = \lambda m/c$ [5], то справджується (33).

З іншого боку, $c|q(0) - \overline{q}(0)| \le c$. Підстановка останніх нерівностей у (52) доводить теорему. □

Доведення наслідку 2. Твердження (a), (b), (c) наслідку є прямим наслідком відповідних тверджень теореми 1 з урахуванням (34) та (35). В останньому пункті слід врахувати, що $\Delta(\alpha) \ge \overline{\Delta}(\alpha)$. □

Доведення наслідку 3. Випливає з монотонності функції $H(x,t)$ за аргументом x згідно з наслідком 1 та з рівності (35). □

Доведення наслідку 4. Безпосередньо випливає з (32) та (34). □

Список літератури

1. E. B. Dynkin, *Markov processes*, v.1 and v.2, Academic Press, New York; Springer, Berlin,1966.
2. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
3. V.M. Zolotarev, *Modern theory of sums of independent random variables*, Nauka, Moscow, 1986.
4. V.M. Shurenkov, *Ergodic Markov processes*, Nauka, Moscow, 1989. (Russian)
5. J. Grandell, *Aspects of risk theory*, Springer Series in Statistics, 1991.
6. L.N. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1997.
7. S.P. Mayn, R.L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer-Verlag, 1993.
8. N.V. Kartashov, *Strong stable Markov chains*, VSP, Utrecht, 1996.
9. N.V. Kartashov, *The stability of almost homogeneous in time Markov semigroups of operators*, Theory Probab. Math. Statist., **71** (2004), 119–128.

10. N. V. Kartashov, *The ergodicity and stability of quasi-homogeneous Markov semigroups of operators*, Theory Probab. Math. Statist., **72** (2006), 59–68.
11. N. V. Kartashov, O. M. Stroev, *Lundberg approximation for the risk function in an almost homogeneous environment*, Theory Probab. Math. Statist., **73** (2006), 71–79.
12. N. V. Kartashov, *The stability of transient quasi-homogeneous Markov semigroups and an estimate of the ruin probability*, Theory Probab. Math. Statist., **75** (2007), 41–50.
13. N. V. Kartashov, *Boundness, limits, and stability of solutions of a perturbation of a non-homogeneous renewal equation on a semiaxis*, Theory Probab. Math. Statist., **81** (2010), 71–83.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: email: nkartashov@skif.com.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: vitaliy.golomoziy@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 02.11.2017

INEQUALITIES FOR A RISK FUNCTION IN THE TIME AND SPACE INHOMOGENEOUS CRAMER–LUNDBERG RISK MODEL

M. V. KARTASHOV, V. V. GOLOMOZIY

Abstract. We consider the generalization of the Cramer–Lundberg risk model with the Poisson process of risk events which is inhomogeneous in time, and with current reserve dependent premium rate. We obtain explicit inequalities for the exponential normed uniform distances between risk functions in (a) time-space inhomogeneous model and space-inhomogeneous time-homogeneous model, (b) space-inhomogeneous time-homogeneous model and space and time-homogeneous model. It is supposed some closeness of the premium rate to a constant.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИИ РИСКА В НЕОДНОРОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВУ МОДЕЛИ КРАМЕРА – ЛУНДБЕРГА

Н. В. КАРТАШОВ, В. В. ГОЛОМОЗЫЙ

Аннотация. Рассматривается обобщенная модель риска Крамера – Лундберга с неоднородным по времени процессом Пуассона страховых случаев, а также с интенсивностью премий, которая зависит от величины текущего страхового фонда. Найдены явные неравенства для экспоненциально нормированного равномерного расстояния (a) между функцией риска в неоднородных по времени и пространству моделях и функцией риска в однородных по времени и неоднородных по пространству моделях, (b) между функциями риска в однородных по времени и неоднородных по пространству и однородных по времени и пространству моделях. Предполагается, что функция интенсивности премий при росте страхового фонда приближается к постоянной.