Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 83–90

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 83–90

УДК 519.23

ПРО МІНІМАКСНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

О. В. ІВАНОВ, І. К. МАЦАК

Анотація. Для лінійної моделі регресії та, у деякому розумінні, рівномірного плану регресійного експерименту, отримано посилену властивість слабкої консистентності мінімаксної оцінки векторного параметра регресії та граничну теорему для абсолютних значень екстремальних залишків, побудованих за цією оцінкою.

Ключові слова і фрази. Лінійна модель регресії, екстремальні значення, схема серій, мінімаксні оцінки, симетричні помилки спостережень.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G70, 62J05.

1. Вступ

Розглянемо модель лінійної регресії

$$y_j = \theta_0 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i x_{ji} + \epsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_q)$ — невідомий параметр, $\{\epsilon_j, j = \overline{1, N}\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин(н.о.р.в.в.), заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, із функцією розподілу (ф.р.) $F(x) = \mathbf{P}(\epsilon_j < x)$, $X = (x_{ji})$ — матриця регресійного експерименту.

У цій роботі нас будуть цікавити асимптотичні властивості мінімаксної оцінки (ММО) параметра θ.

Означення 1. ММО параметра θ моделі (1) назвемо випадковий вектор $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta}_q)$, такий, що

$$\widehat{\Delta}_N = \rho(\widehat{\theta}) = \min_{\beta \in \mathbb{R}^{q+1}} \rho(\beta), \tag{2}$$

$$\rho(\beta) = \max_{1 \le j \le N} |y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_{ji}|, \quad \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q).$$

Мінімаксні оцінки вже досліджувалися у роботі [1], де вивчався лише випадок, коли план регресійного експеременту був зосереджений у деяких k фіксованих точках. Натомість у цій роботі на план регресійного експеременту накладається умова:

R . Для будь-яких $i = \overline{1, q}$ та $j = \overline{1, N}$

$$x_{ji} \in V_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\},$$

причому регресори $\{x_{ji}, i = \overline{1, q}\}$ пробігають усі можливі набори значень із множини V_n.

Умова **R** означає, що в моделі (1), насправді,

$$y_j = y_{nj}, \quad x_{ji} = x_{ji}^{(n)}, \quad \epsilon_j = \epsilon_{nj}, \quad N = N_n = (n+1)^q. \tag{3}$$

Таким чином, спостереження (1) розглядаються в ненульовій схемі серій [2], помилки спостережень $\{\epsilon_{nj}, j = \overline{1, N_n}\}$, $n \geq 1$, при кожному фіксованому n є н.о.р.в.в. із ф.р. $F(x)$.

Нагадаємо деякі необхідні надалі результати теорії екстремальних значень. Нехай $\{\epsilon_j, j \geq 1\}$ — послідовність н.о.р.в.в. із ф.р. $F(x)$. Покладемо

$$Z_N = \max_{1 \leq j \leq N} \epsilon_j, \quad Z_N^* = \max_{1 \leq j \leq N} |\epsilon_j|. \tag{4}$$

Припустимо, що для деяких констант $b_N > 0$, $a_N \in R$ при $N \to \infty$

$$b_N(Z_N - a_N) \xrightarrow{D} \zeta, \tag{5}$$

і ζ має невироджену ф.р. $G(x) = \mathbf{P}(\zeta < x)$ (через $\xrightarrow{D}$ позначаємо слабку збіжність в.в.).

Якщо співвідношення (5) виконується, то кажуть, що ф.р. F належить області максимум притягнення закону G і пишуть $F \in D(G)$.

Відомо із [3–5], що при виконанні співвідношення (5) G може мати лише один із таких трьох типів розподілів:

$$\begin{aligned}
\text{Тип I}: \quad \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{при} \quad \alpha > 0,\ x > 0\,; \end{cases} \\
\text{Тип II}: \quad \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \text{при} \quad \alpha > 0,\ x \leq 0, \\ 1, & \text{при} \quad x > 0; \end{cases} \\
\text{Тип III}: \quad \Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}), \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned} \tag{6}$$

Необхідні та достатні умови для збіжності до кожної ф.р. $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$ також добре відомі.

Будемо вважати, що в моделі (1)

(A1): Помилки спостережень (ϵ_j) є симетричними в.в.;

(A2): $F \in D(G)$ із нормуючими константами a_N та b_N, де G одна з ф.р. Φ_α, Ψ_α, Λ у рівностях (6).

Як було сказано вище, при плані регресійного експеременту, який задовольняє умову $\mathbf{R}$, ми фактично маємо справу з схемою серій (3). Модель схеми серій для схеми максимуму н.в.в. вивчалась у літературі (див. [6, гл. 5, § 3 та літературу там]). Відзначимо, що в [6] використовувались нелінійні системи нормування. Це дозволило розширити клас граничних розподілів. Але при лінійних нормуваннях і однаково розподілених доданках перехід до схеми серій не дає якихось нових істотних результатів.

Якщо ж виконана умова (**A2**), тобто $F \in D(G)$, а $F(x)$ — це ф. р. ϵ_{nj} , то неважко зрозуміти, що в.в. $Z_{N_n} = \max_{1 \leq j \leq N} \epsilon_{nj}$ також задовольняє співвідношення (5), а граничними будуть функції $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$, визначені в (6). Тому для спрощення запису формул у доведеннях, як і у спостереженнях (1), ми не будемо вказувати залежність від n.

Нехай (C_n) — неспадна послідовність дійсних чисел, $C_n \geq 1, n \geq 1, (\eta_n, n \geq 1)$ — послідовність в.в. Будемо використовувати позначення $\eta_n \overset{P}{=} O(C_n^{-1})$, яке еквівалентне збіжності

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{P}(C_n |\eta_n| > K) \to 0, K \to \infty, \tag{7}$$

й означає стохастичну обмеженість послідовності $(C_n |\eta_n|)$.

2. Основний результат.

Основний результат роботи містить така теорема.

Теорема 1. *Нехай для моделі (1) виконано умови* $(\mathbf{A1}), (\mathbf{A2})$ *та* $\mathbf{R}$. *Припустимо також, що*

$$b_N \to \infty, \qquad N \to \infty. \tag{8}$$

Тоді ММО $\widehat{\theta}$ *консистентна і, більше того,*

$$\widehat{\theta}_i - \theta_i \overset{P}{=} O(b_{N_n}^{-1}), \quad i = \overline{0, q}, \tag{9}$$

$$Z_{N_n}^* - \widehat{\Delta}_{N_n} = \chi_n, \quad 0 \le \chi_n \overset{P}{=} O(b_{N_n}^{-1}). \tag{10}$$

Доведення. Покладемо

$$d_i = \beta_i - \theta_i, \, i = \overline{0, q}, \quad d = (d_0, d_1, \ldots d_q).$$

Так само, як і в роботі [1], зведемо оптимізаційну задачу (2) до задачі лінійного програмування (ЗЛП)

$$\widehat{\Delta}_N = \min_{d, \Delta \in \mathcal{D}} \Delta, \tag{11}$$

$$\mathcal{D} = \{(d, \Delta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ : | - d_0 - \sum_{i=1}^{q} d_i x_{ji} + \epsilon_j | \le \Delta, \quad j = \overline{1, N}\} =$$

$$= \{(d, \Delta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ : d_0 + \sum_{i=1}^{q} d_i x_{ji} + \Delta \ge \epsilon_j, -d_0 - \sum_{i=1}^{q} d_i x_{ji} + \Delta \ge -\epsilon_j, \quad j = \overline{1, N}\}.$$

Якщо вибрати $d_0 = d_1 = \ldots = d_q = 0$, то $\rho(\widehat{\theta}) \le \rho(\theta) = Z_N^*$. І, таким чином, можна вважати, що у правій частині рівності (11) $0 \le \Delta \le Z_N^*$.

Вибираючи далі для будь-якого $i_0 \in \{1, \ldots, q\}$ та для деяких $1 \le j_1, j_2 \le N$

$$x_{j_1 i_0} = \frac{1}{n}, \quad x_{j_2 i_0} = 1, \quad \text{а} \quad x_{j_1 i} = x_{j_2 i} = 0 \quad \text{при} \quad i \ne i_0,$$

отримуємо

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{i_0} = \{(d, \Delta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ : | - d_0 - d_{i_0} \frac{1}{n} + \epsilon_{j_1} | \le \Delta, \quad | - d_0 - d_{i_0} + \epsilon_{j_2} | \le \Delta\}.$$

Звідси випливає, що змінні d_{i_0} та d_{i_0} обмежені на області $\mathcal{D}$. Оскільки i_0 довільний номер із $\{1, \ldots, q\}$, то це означає, що $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\omega)$ — обмежена замкнена множина для всіх елементарних подій $\omega \in \Omega$. А оскільки цільова функція ЗЛП (11) лінійна і неперервна, то для кожного $\omega \in \Omega$ існує оптимальний розв'язок(можливо, не єдиний)

$$(\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_q, \widehat{\Delta}_N) \in \mathcal{D}, \tag{12}$$

і

$$\widehat{\Delta}_N \le Z_N^*. \tag{13}$$

Зауважимо, що $\widehat{d}_i = \widehat{\theta}_i - \theta_i, i = \overline{0, q}$, і отриманий факт показує, що мінімум у (2) досягається для кожного $\omega \in \Omega$. Правда, можливо, ця точка не єдина. Тоді з роботи [7, теорема (3.10) на с.270] випливає, що існує, принаймні, один розв'язок $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\omega), \omega \in \Omega$, задачі (2) такий, що $\widehat{\theta}_i, i = \overline{0, q}$, будуть в.в., як і відповідні їм $\widehat{d}_i = \widehat{\theta}_i - \theta_i, i = \overline{0, q}$.

Наведемо допоміжні твердження. Позначимо через $\epsilon_{(1)} \le \epsilon_{(2)} \le \ldots \le \epsilon_{(N)}$ варіаційний ряд, побудований по н.о.р.в.в. $\{\epsilon_j, \quad j = \overline{1, N}\}$ із ф.р. $F(x)$. І нехай $Z_N^{(k)}$ — k-те найбільше значення серед $\{\epsilon_j, \quad j = \overline{1, N}\}$, тобто

$$Z_N^{(1)} = Z_N = \epsilon_{(N)}, \quad Z_N^{(2)} = \epsilon_{(N-1)}, \ldots, Z_N^{(k)} = \epsilon_{(N-k+1)}, \ldots$$

Аналогічно визначається k-те найменше значення $W_N^{(k)}$ послідовності $\{\epsilon_j, j = \overline{1, N}\}$:

$$W_N^{(1)} = W_N = \epsilon_{(1)}, \ldots, \quad W_N^{(k)} = \epsilon_{(k)}, \ldots$$

Наступний результат добре відомий [5, гл. 2, § 2].

Лема 1. *Припустимо, що для деяких послідовностей $b_N > 0, a_N$ і для невиродженої ф.р. $G(x)$ виконується співвідношення (5), тобто $F \in D(G)$. Тоді для будь-якого фіксованого натурального $k \geq 1$*

$$\mathbf{P}(b_N(Z_N^{(k)} - a_N) < x) \longrightarrow G(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-\ln G(x))^i}{i!}, \quad N \to \infty, \tag{14}$$

при $G(x) > 0$, x — точка неперервності G. Якщо $G(x) = 0$, то справедлива збіжність до нуля.

У випадку, коли ϵ_j симетрично розподілені в.в., то $-W_N^{(k)}$ та $Z_N^{(k)}$ мають однакові розподіли. Таким чином, із леми 1 безпосередньо випливає наслідок 1.

Наслідок 1. *Нехай послідовність $(\epsilon_j, j \geq 1)$ задовольняє умови $(\mathbf{A1}), (\mathbf{A2})$, $b_N \geq 1, N \geq 1$. Тоді для будь-якого фіксованого натурального $k \geq 1$ справджується зображення*

$$Z_N^{(k)} = a_N + \frac{\xi_{N,k}}{b_N}, \quad W_N^{(k)} = -a_N - \frac{\xi'_{N,k}}{b_N}, \tag{15}$$

де при $N \to \infty$

$$\xi_{N,k} \stackrel{P}{=} O(1), \quad \xi'_{N,k} \stackrel{P}{=} O(1). \tag{16}$$

В умовах теореми 1 для помилок спостережень у схемі серій моделі (1) виконуються умови $(\mathbf{A1})$ та $(\mathbf{A2})$. Тоді залишаються правильними твердження леми 1 та наслідку 1, якщо їх переписати з індексами $N = N_n$, записати в (14) $n \to \infty$ замість $N \to \infty$, аналогічні заміни робляться і у співвідношеннях (7), (16).

Пам'ятаючи про домовленість наприкінці вступу, покладемо

$$\overline{\xi}_{N,m} = \max(|\xi_{N,k}|, |\xi'_{N,k}|, \ k = \overline{1,m}).$$

Зрозуміло, що при фіксованому m

$$\overline{\xi}_{N,m} \stackrel{P}{=} O(1). \tag{17}$$

Нехай $(\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_q, \widehat{\Delta}_N)$ — розв'язок ЗЛП (11). З оцінок (13), (15) отримуємо

$$\widehat{\Delta}_N \leq \max(Z_N, -W_N) \leq a_N + \frac{\overline{\xi}_{N,m}}{b_N}.$$

Оскільки $(\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_q, \widehat{\Delta}_N) \in \mathcal{D}$, то

$$|-\widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{ji} + \epsilon_j| \leq a_N + \frac{\overline{\xi}_{N,m}}{b_N}, \quad j = \overline{1,N}. \tag{18}$$

Уведемо позначення:
$I\{B\}$ — індикатор події B, $I_i = I\{\widehat{d}_i \leq 0\}$, $\quad i = \overline{1,q}$,

$$\begin{aligned}
V_n^+ &= \{\frac{j}{n} : \frac{3n}{4} < j \leq n\}, \quad V_n^- = \{\frac{j}{n} : 0 \leq j < \frac{n}{4}\}, \\
J^+ &= \{1 \leq l \leq N : \quad x_{li} \in V_n^+ \text{ при } I_i = 1, \quad x_{li} \in V_n^- \text{ при } I_i = 0, \quad i = \overline{1,q}\}, \\
J^- &= \{1 \leq l \leq N : \quad x_{li} \in V_n^- \text{ при } I_i = 1, \quad x_{li} \in V_n^+ \text{ при } I_i = 0, \quad i = \overline{1,q}\}, \\
B_z &= \{\omega \in \Omega : \quad \exists l \in J^+, \exists k \in \{1, \ldots, m\} : \quad Z_N^{(k)} = \epsilon_l\}, \\
B_w &= \{\omega \in \Omega : \quad \exists l' \in J^-, \exists k' \in \{1, \ldots, m\} : \quad W_N^{(k')} = \epsilon_{l'}\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Нехай $\omega \in B_z \bigcap B_w$. Тоді, враховуючи оцінку (18), маємо: існують $l \in J^+, l^{'} \in J^-, k, k^{'} \in \{1, \dots, m\}$ такі, що

$$-\widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{li} + Z_N^{(k)} \leq a_N + \frac{\overline{\xi}_{N,m}}{b_N},$$

$$-\widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{l'i} + W_N^{(k)} \geq -a_N - \frac{\overline{\xi}_{N,m}}{b_N}.$$

Ще раз застосуємо наслідок 1 одержимо

$$-\widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{li} \leq \frac{\overline{\xi}_{N,m} - \xi_{N,k}}{b_N}, \tag{20}$$

$$-\widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{l'i} \geq \frac{-\overline{\xi}_{N,m} + \xi^{'}_{N,k'}}{b_N}. \tag{21}$$

Віднімаючи від нерівності (20) нерівність (21) , отримуємо

$$-\sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i (x_{li} - x_{l'i}) \leq \frac{4\overline{\xi}_{N,m}}{b_N},$$

причому тут

$$\frac{1}{2} \leq x_{li} - x_{l'i} \leq 1, \quad \text{якщо} \quad I_i = 1, \quad \text{тобто} \quad \widehat{d}_i \leq 0,$$

і

$$-1 \leq x_{li} - x_{l'i} \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{якщо} \quad I_i = 0, \quad \text{тобто} \quad \widehat{d}_i > 0.$$

Звідси при $\omega \in B_z \bigcap B_w$ негайно випливає оцінка

$$|\ \widehat{d}_i\ | \leq \frac{8\overline{\xi}_{N,m}}{b_N}, \quad i = \overline{1, q}. \tag{22}$$

Оцінимо ймовірності подій $\bar{B}_z = \Omega \backslash B_z$ та $\bar{B}_w = \Omega \backslash B_w$. Маємо

$$\mathbf{P}(\bar{B}_z) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \{0,1\}} \mathbf{P}(I_1 = \alpha_1, \dots, I_q = \alpha_q, \bar{B}_z). \tag{23}$$

Завдяки незалежності та однаковій розподіленості ϵ_j, виконуються рівності

$$\mathbf{P}(Z_N^{(k)} = \epsilon_l) = \frac{1}{N}, \quad l = \overline{1, N}, k = \overline{1, m}. \tag{24}$$

Спираючись на ці рівності, знайдемо оцінки зверху для доданків суми (23).

Для простоти спочатку розглянемо випадок $\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_q = 1$ та покладемо

$$L = \{1 \leq l \leq N : \quad \forall i \in \{1, \dots, q\} \quad x_{li} \in V_n^+\},$$

$|\ L\ |$ — кількість елементів L. Очевидно, для деякого $\delta \in [0, 1]$ при $n \to \infty$

$$|\ L\ | = (n - \frac{3n}{4} - \delta)^q = (\frac{n+1}{4})^q (1 - \frac{1 + 4\delta}{n+1}) = \frac{N}{4^q}(1 + O(\frac{1}{n})).$$

Звідси та із (24) маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(I_1 = \ldots = I_q = 1, \bar{B}_z) \leq \mathbf{P}(\forall l \in L, \forall k \in \{1, \dots, m\} : Z_N^{(k)} \neq \epsilon_l) = \\
= \;& \mathbf{P}(Z_N^{(1)} \neq \epsilon_l, l \in L) \times \mathbf{P}(Z_N^{(2)} \neq \epsilon_l, l \in L \,/\, Z_N^{(1)} \neq \epsilon_{l_1}, l_1 \in L) \times \ldots \times \\
\times \;& \mathbf{P}(Z_N^{(m)} \neq \epsilon_l, l \in L \,/\, Z_N^{(1)} \neq \epsilon_{l_1}, \dots, Z_N^{(m-1)} \neq \epsilon_{l_{m-1}}, l_1, \dots, l_{m-1} \in L) \leq \\
\leq \;& (N - |\ L\ |)(N - |\ L\ | - 1) \ldots (N - |\ L\ | - m + 1) N^{-m} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \quad (1 - \frac{1}{4^q} + O(\frac{1}{n}))^m. \tag{25}$$

Далі візьмемо як $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ довільний бінарний набір, а L виберемо так:

$$L = \{1 \leq l \leq N : \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\} \quad x_{li} \in V_n^+ \text{ при } \alpha_i = 1, \quad x_{li} \in V_n^- \text{ при } \alpha_i = 0\}.$$

Фактично повторюючи наведені при отриманні (25) міркування, дістанемо

$$\mathbf{P}(I_1 = \alpha_1, \ldots, I_q = \alpha_q, \bar{B}_z) \leq (1 - \frac{1}{4^q} + O(\frac{1}{n}))^m. \tag{26}$$

Разом (23) та (26) дозволяють записати

$$\mathbf{P}(\bar{B}_z) \leq 2^q (1 - \frac{1}{4^q} + O(\frac{1}{n}))^m. \tag{27}$$

Унаслідок симетричності ϵ_j та однакової розподіленості $Z_N^{(k)}$ і $-W_N^{(k)}$ із (27) випливає оцінка

$$\mathbf{P}(\bar{B}_w) \leq 2^q (1 - \frac{1}{4^q} + O(\frac{1}{n}))^m, \tag{28}$$

а, отже,

$$\mathbf{P}(B_z \bigcap B_w) = 1 - \mathbf{P}(\bar{B}_z \bigcup \bar{B}_w) \geq 1 - 2^{q+1}(1 - \frac{1}{4^q} + O(\frac{1}{n}))^m. \tag{29}$$

Виберемо n_0 таке, щоб для $n \geq n_0$ у (29) виконувалась нерівність $O(\frac{1}{n}) \leq \frac{3}{4^{q+1}}$. Звідси та із (22) маємо

$$\mathbf{P}(b_N |\widehat{d}_i| > C) \leq \mathbf{P}(8\overline{\xi}_{N,m} > C) + 2^{q+1}(1 - \frac{1}{4^{q+1}})^m, \tag{30}$$

при $n \geq n_0$ та $i = \overline{1, q}$.

Якщо покладемо $N_0 = (n_0 + 1)^q$, то, враховуючи (16), одержимо

$$\lim_{C \to \infty} \sup_{N \geq N_0} \mathbf{P}(b_N |\widehat{d}_i| > C) \leq 2^{q+1}(1 - \frac{1}{4^{q+1}})^m, \tag{31}$$

для будь-якого $i = \overline{1, q}$.

Оскільки ми можемо вибрати число m як завгодно великим, то (31) означає, що

$$|\widehat{d}_i| = |\widehat{\theta}_i - \theta_i| \overset{P}{=} O(b_N^{-1}), \tag{32}$$

тобто (9) правильне при $i = \overline{1, q}$.

Потрібна оцінка для $\widehat{d}_0$ випливає з нерівностей (20)–(22). Дійсно, при $\omega \in B_z \bigcap B_w$

$$|\widehat{d}_0| \leq (8q + 2) \frac{\overline{\xi}_{N,m}}{b_N}.$$

Перехід звідси до оцінки (9) для $i = 0$ здійснюється так само, як і у випадку $i > 0$ (оцінки (31)).

Оцінка (10) випливає з таких міркувань. Оскільки виконано (12), то для $j = \overline{1, N}$

$$|\epsilon_j| - |\widehat{d}_0 + \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{ji}| \leq | - \widehat{d}_0 - \sum_{i=1}^{q} \widehat{d}_i x_{ji} + \epsilon_j| \leq \widehat{\Delta}_N,$$

тобто

$$\chi_n = Z_{N_n}^* - \widehat{\Delta}_{N_n} \leq \sum_{i=0}^{q} |\widehat{d}_i|.$$

Остання нерівність разом із оцінками (9) дає (10). □

3. Зауваження та приклади

Зауваження 1. Для класичної оцінки найменших квадратів (ОНК) виконується рівність

$$\widehat{\theta}_i - \theta_i \overset{P}{=} O(\frac{1}{\sqrt{N}}), \quad i = \overline{0,q}.$$

Тому, якщо виконуються умови теореми 1 і

$$\frac{b_N}{\sqrt{N}} \to \infty \quad \text{при} \quad N \to \infty, \tag{33}$$

то ММО ефективніша за ОНК.

Із результатів роботи [1] випливає, що умова (33) не може виконуватись для областей максимум притягання $D(\Phi_\alpha)$ та $D(\Lambda)$, а у випадку $D(\Psi_\alpha)$ співвідношення (33) правильне при $0 < \alpha < 2$.

Приклад 1. Нехай в.в. ϵ_j рівномірно розподілені на $[-1,1]$, тобто $F(x) = \frac{x+1}{2}$, $x \in [-1,1]$. Добре відомо (див., наприклад, [5, гл. 1, § 7]), що $F \in D(\Psi_1)$ і $b_N = \frac{N}{2}$, $a_N = 1$. Тоді в умовах теореми 1 при $N \to \infty$

$$\widehat{\theta}_i - \theta_i \overset{P}{=} O(\frac{1}{N}), \quad i = \overline{0,q}.$$

Приклад 2. Нехай в.в. ϵ_j мають стандартний нормальний розподіл. Тоді ([5, гл. 1, § 7]) $F \in D(\Lambda)$ і

$$b_N = \sqrt{2\ln N}, \quad a_N = \sqrt{2\ln N} - \frac{\ln\ln N + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln N}}.$$

За теоремою 1 при $N \to \infty$

$$\widehat{\theta}_i - \theta_i \overset{P}{=} O(\frac{1}{\sqrt{\ln N}}), \quad i = \overline{0,q}.$$

Таким чином, для рівномірного розподілу на $[-1,1]$ ММО ефективніша за ОНК, а у випадку нормального розподілу помилок спостережень кращою буде ОНК.

Приклад 3. Розглянемо окремий випадок моделі (1)

$$y_j = \theta_0 + \epsilon_j, \quad j = \overline{1,N},$$

де ϵ_j мають щільність Лапласа $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Тоді (див. приклад 2 у роботі [1]) $F \in D(\Lambda)$, $b_N = 1$, $a_N = \ln\dfrac{N}{2}$ і

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{2(\widehat{\theta}_0 - \theta_0) < x\} = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

тобто ММО $\widehat{\theta}_0$ не буде консистентною. Цей приклад показує, що від умови (8) теореми 1 не можна відмовитися.

Зауваження 2. Роботи [8] та [9] містять, зокрема, твердження про близькість розподілів максимальних абсолютних величин залишків $\rho(\beta)|_{\beta=\widehat{\theta}}$, де $\widehat{\theta}$ — ОНК параметрів лінійної моделі регресії, до розподілів максимумів абсолютних величин похибок спостережень. Співвідношення (10) теореми 1 цієї роботи є фактом у тому ж напрямку, але вже для ММО $\widehat{\theta}$ параметрів моделі спостережень (1).

Зауваження 3. Із доведення теореми 1 зрозуміло, що умову $\mathbf{R}$ на план регресійного експерименту можна замінити, наприклад, на таку:
для будь-яких $i = \overline{1,q}$ та $j = \overline{1,N}$

$$x_{ji} \in \tilde{V}_n = \{0 \le v_0 < v_1 < \ldots < v_n \le 1\},$$

причому частка попадань величин v_k в інтервали $[0, h)$ та $(1-h, 1]$ повинна бути не менша ніж p для деяких $0 < h < \frac{1}{2}, 0 < p < \frac{1}{2}$.

Список літератури

1. A. V. Ivanov, I. K. Matsak, S. V. Polotskiy, *Extreme residuals in regression model. Minimax approach*, Modern stochastics : theory and applications, **2** (2015), no. 3, p. 297–308.
2. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* vol.2, Wiley, New York – London – Sydney, 1971.
3. B. V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire* , Ann.Math., **44** (1943), p. 423–453.
4. J. Galambos, *The asymptotic theory of extreme order statistics*, Wiley, New York, 1978.
5. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer, New York – Berlin, 1983.
6. V. M. Zolotarev, *Modern Theory of Summation of Random Variable* , VSP, Utreht, 1997.
7. J. Pfanzagl, *On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates*, Metrika, (1969), № 14, p. 249–272.
8. O. V. Ivanov, I. K. Matsak, *Limit theorems for extreme residuals in linear and nonlinear regression models* , Theor. Probability and Math. Statist., **86** (2013), 79–91.
9. O. V. Ivanov, I. K. Matsak, *Limit theorems for extreme residuals in regression models with heavy tails of observation errors*, Theor. Probability and Math. Statist., **88** (2014), 85–98.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03057

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 2, корп. 6, м. Київ, Україна, 03127

Адреса електронної пошти: mik@unicyb.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 2.07.2018

ON MINIMAX ESTIMATORS OF REGRESSION MODELS PARAMETERS

A. V. IVANOV, I. K. MATSAK

Abstract. For linear regression model and in certain sense uniform regression experiment design, an enhanced weak consistency property of vector regression parameter minimax estimator and limit theorem for extreme absolute values of residuals consructed by this estimator are obtained.

О МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ

А. В. ИВАНОВ, И. К. МАЦАК

Аннотация. Для линейной модели регрессии и, в некотором смысле, равномерного плана регрессионного експеримента получено усиленное свойство слабой состоятельности минимаксной оценки векторного параметра регресии и предельная теорема для екстремальных абсолютных значений невязок, построенных по этой оценке.