Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 91–100

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 91–100

УДК 519.21

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ У ТЕРМІНАХ СЕРЕДНІХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

М. М. КАПУСТЕЙ, П. В. СЛЮСАРЧУК

Анотація. Наведено узагальнення оцінок Золотарьова В. М. у термінах середніх псевдомоментів для послідовності серій випадкових величин.

Ключові слова і фрази. Збіжність, центральна гранична теорема, псевдомоменти, послідовність серій, різнорозподілені випадкові величини.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60F05.

1. Вступ

Розглянемо суму незалежних однаково розподілених випадкових величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ з $\mathsf{M}\xi_k = 0$, $\mathsf{M}\xi_k^2 = 1$. Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу ξ_k і покладемо $F_n(x) = \mathsf{P}\{S_n < x\sqrt{n}\}$ і $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho(F_n, \Phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)|$.

Якщо $F(x) = \Phi(x)$, то $\rho(F_n, \Phi) = 0$, а права частина нерівності Беррі – Ессеена відмінна від нуля. Використання псевдомоментів (характеристик, що враховують близькість двох розподілів) усуває цей недолік. В 1965 році Золотарьов В. М. у [1] одержав оцінку, яка враховує близькість розподілів доданків до граничного. У [2] В. Паулаускас узагальнив оцінку з [1]. В 1973 році Золотарьов у [3] одержав оцінку, яка уточнює результат Паулаускаса. Золотарьов у [3] використовує характеристики (псевдомоменти)

$$\kappa = 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |F(x) - \Phi(x)| dx,$$

$$\kappa_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, 3x^2) |F(x) - \Phi(x)| dx,$$

$$\nu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^3) \left| d\big(F(x) - \Phi(x)\big)\right|$$

й одержує такі оцінки. Для всіх $n \ge 1$

$$\rho(F_n, \Phi) \le cn^{-\frac{1}{2}} \max\{\kappa; \kappa^{\frac{n}{3n+1}}\},$$

$$\rho(F_n, \Phi) \le cn^{-\frac{1}{2}} \max\{\kappa_0; \kappa_0^{\frac{n}{n+1}}\},$$

$$\rho(F_n, \Phi) \le cn^{-\frac{1}{2}} \nu_0.$$

У монографії [4, с. 377], яка містить детальну бібліографію, Золотарьов використовує характеристики θ_s для яких при всіх t справедлива нерівність

$$\left| f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \le \frac{1}{3}\theta_s \min\big(|t|^s, |t|^3\big), \quad 0 \le s \le 3,$$

тут $f(t)$ — характеристична функція ξ_k. Із характеристик θ_s, як окремий випадок, одержуються визначені вище псевдомоменти.

У роботі [5] розглядаються умови, при виконанні яких, швидкість збіжності буде вищою, ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. Відзначимо, що псевдомоменти застосовуються до оцінки швидкості збіжності цін опціонів [6]. У роботах [7] і [8] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [3] на різнорозподілені випадкові величини. Використовуючи методи робіт [3] і [4], у цій статті ми узагальнюємо результати роботи [3] на послідовність серій незалежних у кожній серії різнорозподілених випадкових величин у термінах середніх псевдомоментів.

2. Основна частина

Розглянемо послідовність серій $\xi_{n1},\dots,\xi_{nn}$ незалежних у кожній серії випадкових величин із математичними сподіваннями $\mathsf{M}\xi_{nk}=0$, дисперсіями $\mathsf{D}\xi_{nk}=\sigma_{nk}^2$, $\sigma_{nk}>0$, $\sum_{k=1}^n\sigma_{nk}^2=1$. Позначимо: $F_{nk}(x)$ — функція розподілу ξ_{nk}, $f_{nk}(t)$ — характеристична функція ξ_{nk}, $S_n=\xi_{n1}+\dots+\xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ — функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n=\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|$.

Теорема 2.1. *Нехай для деякого $s\in[0;3]$ існують величини $\theta_{nk}(s)$ такі, що для всіх $t\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$ справедливі нерівності*

$$\omega_{nk}(t)=\left|f_{nk}(t)-e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\right|\le\theta_{nk}(s)\min\left(|t|^s\sigma_{nk}^s;\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\right),\tag{1}$$

$\overline{\theta}_n(s)=\overline{\sigma}_n^{2-s}\sum_{k=1}^n\theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s$, $\overline{\sigma}_n=\max\{\sigma_{n1},\dots,\sigma_{nn}\}$, $\underline{\sigma}_n=\min\{\sigma_{n1},\dots,\sigma_{nn}\}$.

Тоді існують сталі C_1, C_2, які залежать тільки від s, що для всіх $n\ge2$ справедлива нерівність

$$\rho_n\le C_1\overline{\sigma}_n\max\left\{\delta_n(s)\overline{\theta}_n(s);\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p\right\},\tag{2}$$

де $p=\min\left\{1;\frac{n}{sn+1}\right\}$, $\delta_n(s)=\max\left\{\overline{\sigma}_n\left(\frac{\overline{\sigma}_n}{\underline{\sigma}_n}\right)^r;1\right\}$, $r=\begin{cases}s+2, & s\in[1;3],\\ s+3, & s\in[0;1),\end{cases}$ *а при* $s>0$

$$\rho_1\le C_2\left(1+\frac{1}{s}\right)\max\left\{\theta_{11}(s);(\theta_{11}(s))^{\frac{1}{s+1}}\right\}.\tag{3}$$

Якщо випадкові величини однаково розподілені, то $\delta_n(s)=1$.

Доведення. У нерівності [9, с. 299]

$$|F(x)-G(x)|\le\frac{2}{\pi}\int_0^T|f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}+\frac{24\sup_x|G'(x)|}{\pi T}$$

покладемо $F(x)=\Phi_n(x)$, $G(x)=\Phi(x)$, $f(t)=\prod\limits_{k=1}^n f_{nk}(t)$, $g(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Тоді

$$\rho_n=\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|\le\frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}.\tag{4}$$

Для будь-яких комплексних чисел $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ справедливі нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^n a_i-\prod_{i=1}^n b_i\right|\le\sum_{i=1}^n|a_i-b_i|\left(\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\right)\prod_{k=i+1}^n|a_k|,\tag{5}$$

$$\left|\prod_{i=1}^n a_i-\prod_{i=1}^n b_i\right|\le\sum_{i=2}^n|a_i-b_i|\left(\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\right)\prod_{k=i+1}^n|a_k|+$$
$$+\sum_{i=2}^n\left(\prod_{k=1}^{i-1}|a_k-b_k|\right)|b_i|\prod_{k=i+1}^n|a_k|+\prod_{k=1}^n|a_k-b_k|,\tag{6}$$

що одержуються із рівностей

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \left(\prod_{k=1}^{i-1} b_k \right) \prod_{k=i+1}^{n} a_k =$$
$$= \sum_{i=2}^{n} (a_i - b_i) \left(\prod_{k=1}^{i-1} b_k \right) \prod_{k=i+1}^{n} a_k +$$
$$+ \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{k=1}^{i-1} (a_k - b_k) \right) b_i \prod_{k=i+1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} (a_k - b_k),$$

які легко перевіряються.

Нехай $c \in (0;1)$ — деяка стала, вибір якої визначимо пізніше. Позначимо $X = c^{\frac{5}{2}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-p}$, $X_1 = \min\{\sqrt{c}; X\}$, де $p = \min\left\{1; \frac{n}{sn+1}\right\}$, якщо $\overline{\theta}_n(s) < 1$, і $p = 1$, якщо $\overline{\theta}_n(s) \geq 1$. Такі зміни у визначенні p не вплинуть на твердження теореми. Відзначимо, що у випадку $X_1 = \sqrt{c}$ $\overline{\theta}_n(s) \leq c^{\frac{2}{p}}$, а у випадку $X_1 = X$ $\overline{\theta}_n(s) \geq c^{\frac{2}{p}}$.

$$|f_{nk}(t)| = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t) =$$
$$= \psi_{nk}(t) \leq \exp\left\{ e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} - 1 + \omega_{nk}(t) \right\}. \tag{7}$$

Функція $y = \frac{e^{-x}-1}{x}$ зростає при $x > 0$, бо $y' = \frac{-e^{-x}x - \left(e^{-x}-1\right)}{x^2} = \frac{1-e^{-x}(1+x)}{x^2} \geq 0$.

Тоді при $|t|\overline{\sigma}_n \leq \sqrt{c}$

$$e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} - 1 = \frac{e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} - 1}{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \leq \frac{e^{-\frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2}} - 1}{\frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2}} \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \leq \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} t^2 \sigma_{nk}^2 =$$
$$= \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\left\{c; t^2 \overline{\sigma}_n^2\right\},$$

а при $|t|\overline{\sigma}_n > \sqrt{c}$

$$e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} - 1 \leq e^{-\frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2}} - 1 = \frac{e^{-\frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2}} - 1}{\frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2}} \frac{c\sigma_{nk}^2}{2\overline{\sigma}_n^2} \leq \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{c\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\left\{c; t^2 \overline{\sigma}_n^2\right\}.$$

Отже, для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} - 1 \leq \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\left\{c; t^2 \overline{\sigma}_n^2\right\}.$$

Тому із (7)

$$\psi_{nk}(t) \leq \exp\left\{ \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\left\{c; t^2 \overline{\sigma}_n^2\right\} + \omega_{nk}(t) \right\}. \tag{8}$$

Нехай $X_1 = \sqrt{c}$, тоді $\overline{\theta}_n(s) \leq c^{\frac{2}{p}}$ і $1 - sp > 0$. При $|t|\overline{\sigma}_n \leq \sqrt{c}$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk}(s) \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \leq \frac{|t|^3}{6} \overline{\theta}_n(s) \overline{\sigma}_n \leq \frac{t^2}{6} \sqrt{c} \overline{\theta}_n(s) \leq$$

$$\leq \frac{c^{\frac{5}{2}}}{6\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\}, \tag{9}$$

а у випадку $\sqrt{c} \leq |t|\overline{\sigma}_n \leq X$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk}(s)|t|^s \sigma_{nk}^s \leq c^{\frac{5s}{2}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-sp} \overline{\sigma}_n^{-s} \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s \leq$$

$$\leq c^{\frac{5s}{2}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{1-sp} \overline{\sigma}_n^{-2} \leq c^{\frac{5s}{2}} \left(c^{\frac{2}{p}}\right)^{1-sp} \overline{\sigma}_n^{-2} \leq c^{\frac{s}{2}} c^2 \overline{\sigma}_n^{-2} =$$

$$= \frac{c^{\frac{s}{2}+1}}{\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\}. \tag{10}$$

Нехай $X_1 = X$, тоді $\overline{\theta}_n(s) \geq c^{\frac{2}{p}}$ і при $|t|\overline{\sigma}_n \leq X$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk}(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk}(s) \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \leq \frac{t^2}{6} \overline{\theta}_n(s)\overline{\sigma}_n \frac{1}{\overline{\sigma}_n} c^{\frac{5}{2}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-p} \leq$$

$$\leq \frac{t^2}{6} c^{\frac{5}{2}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{1-p} \leq \frac{t^2}{6} c^{\frac{5}{2}} = \frac{c^{\frac{5}{2}}}{6\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\}. \tag{11}$$

Крім того,

$$\exp\left\{-\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\}\right\} \leq \exp\left\{\frac{1 - e^{-\frac{c}{2}}}{c} c\right\} \leq e^{\frac{1}{2}c}. \tag{12}$$

У (4) покладемо $T = \frac{1}{\overline{\sigma}_n} X$. Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{X/\overline{\sigma}_n} \left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24\overline{\sigma}_n}{\pi\sqrt{2\pi}X} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{X_1/\overline{\sigma}_n} \left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{X_1/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} \left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24\overline{\sigma}_n}{\pi\sqrt{2\pi}X} =$$

$$= I_1 + I_2 + \frac{24\overline{\sigma}_n \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p}{\pi\sqrt{2\pi}c^{\frac{5}{2}}}. \tag{13}$$

Нехай $n \geq 2$. Для оцінки I_1 із нерівності (5) одержуємо

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)|,$$

а з умов теореми і (7) при $n \geq 2$

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|t|^3 \sigma_{ni}^3}{6} \theta_{ni}(s) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \overline{\sigma}_n^{3-s} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ni}^s \theta_{ni}(s) \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \psi_{nk}(t). \tag{14}$$

При $|t|\overline{\sigma}_n \leq X_1$, $n \geq 2$, із нерівностей (8), (9), (11) і (12)

$$\prod_{k=1, k\neq i}^{n} \psi_{nk}(t) \leq \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\} + \omega_{nk}(t)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \left(1 - \sigma_{ni}^2\right) \frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\} + \frac{c^{\frac{5}{2}}}{6\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\}\right\} \leq$$

$$\leq e^{\frac{1}{2}c} e^{-c_1 t^2}, \tag{15}$$

де $c_1 = \frac{1-e^{-\frac{c}{2}}}{c} - \frac{c^{\frac{5}{2}}}{6}$, стала c вибирається так, щоб $c_1 > 0$.

Із (14) і (15) при $|t|\overline{\sigma}_n \le X_1$ і $n \ge 2$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le e^{\frac{1}{2}c} e^{-c_1 t^2} \frac{|t|^3}{6} \overline{\sigma}_n^{3-s} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ni}^s \theta_{ni}(s) = \\ = \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{e^{\frac{1}{2}c}}{6} |t|^3 e^{-c_1 t^2}.$$

Тому при $n \ge 2$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{X_1/\overline{\sigma}_n} \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \frac{dt}{t} \le \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{e^{\frac{1}{2}c}}{6} \frac{2}{\pi} \int_0^{X_1/\overline{\sigma}_n} t^2 e^{-c_1 t^2} dt \le \\ \le \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{e^{\frac{1}{2}c}}{12\sqrt{\pi} c_1^{\frac{3}{2}}}. \tag{16}$$

Будемо вважати, що $X_1 = \sqrt{c}$, бо у випадку $X_1 = X$ $I_2 = 0$ і при $n \ge 2$ теорема випливає із (13) і (16).

Із нерівностей (6), (7) й умов теореми при $n \ge 2$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le \sum_{i=2}^{n} \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)| + \\ + \sum_{i=2}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}} \prod_{k=1}^{i-1} \omega_{nk}(t) \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)| + \prod_{k=1}^{n} \omega_{nk}(t) \le \\ \le |t|^s e^{-\frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}} \sum_{i=2}^{n} \theta_{ni}(s)\sigma_{ni}^s \prod_{k=2,k\ne i}^{n} \psi_{nk}(t) + \\ + |t|^s \theta_{n1}(s)\sigma_{n1}^s \sum_{i=2}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}} \prod_{k=2,k\ne i}^{n} \psi_{nk}(t) + |t|^{sn} \prod_{k=1}^{n} (\theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s). \tag{17}$$

Нехай $\sqrt{c} \le |t|\overline{\sigma}_n \le X$, $n \ge 2$. У цьому випадку $\min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\} = c$, тому із (8), (10) і (12)

$$\prod_{k=2,k\ne i}^{n} \psi_{nk}(t) \le \prod_{k=2,k\ne i}^{n} \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}}-1}{c} \frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2} \min\{c; t^2\overline{\sigma}_n^2\} + \omega_{nk}(t)\right\} \le \\ \le \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}}-1}{c}\left(1 - \sigma_{n1}^2 - \sigma_{ni}^2\right)\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} c + \frac{c^{\frac{5s}{2}+2}}{\overline{\sigma}_n^2}\right\} \le e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}}, \tag{18}$$

де $c_2 = \frac{1-e^{-\frac{c}{2}}}{c} - c^{\frac{5s}{2}+1}$, c вибирається так, щоб $c_2 > 0$.

Тоді для $n \ge 2$ і $\sqrt{c} \le |t|\overline{\sigma}_n \le X$ із (17) і (18)

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le \\ \le e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}} \left(|t|^s e^{-\frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}} \sum_{i=2}^{n} \theta_{ni}(s)\sigma_{ni}^s + |t|^s \theta_{n1}(s)\sigma_{n1}^s \sum_{i=2}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}}\right) + \\ + |t|^{sn} \prod_{k=1}^{n} (\theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s) \le$$

$$\leq \overline{\theta}_n(s)\overline{\sigma}_n^{s-2}e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}}|t|^s\sum_{i=1}^n e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}} + |t|^{sn}\prod_{k=1}^n(\theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s). \tag{19}$$

Враховуючи нерівність

$$\prod_{k=1}^n(\theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \theta_{nk}(s)\sigma_{nk}^s\right)^n = \left(\frac{1}{n}\overline{\sigma}_n^{s-2}\overline{\theta}_n(s)\right)^n \leq \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n,$$

із (19) одержимо

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n}\left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \overline{\theta}_n(s)\overline{\sigma}_n^{s-2}e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}}\frac{2}{\pi}n\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{s-1}e^{-\frac{t^2\underline{\sigma}_n^2}{2}}dt + \\ &+ \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{sn-1}dt = I_2' + I_2''. \end{aligned} \tag{20}$$

Якщо $s \geq 1$, то

$$\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{s-1}e^{-\frac{t^2\underline{\sigma}_n^2}{2}}dt \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underline{\sigma}_n}\right)^s\int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underline{\sigma}_n}\right)^s,$$

а при $s < 1$

$$\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{s-1}e^{-\frac{t^2\underline{\sigma}_n^2}{2}}dt \leq \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{c}}\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^s e^{-\frac{t^2\underline{\sigma}_n^2}{2}}dt \leq \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underline{\sigma}_n}\right)^{s+1}.$$

Тоді при $s \geq 1$

$$\begin{aligned} I_2' &\leq \overline{\theta}_n(s)\overline{\sigma}_n^{s-2}e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}}\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underline{\sigma}_n}\right)^s \leq \overline{\sigma}_n\overline{\theta}_n(s)\delta_n(s)\overline{\sigma}_n^{-6}e^c e^{-cc_2\overline{\sigma}_n^{-2}}\frac{2^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \leq \\ &\leq \overline{\sigma}_n\overline{\theta}_n(s)\delta_n(s)\left(\frac{3}{cc_2}\right)^3\frac{2^{\frac{s}{2}-1}e^{c-3}}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \tag{21}$$

а при $s < 1$

$$I_2' \leq \overline{\sigma}_n\overline{\theta}_n(s)\delta_n(s)\left(\frac{3}{cc_2}\right)^3\frac{2^{\frac{s+1}{2}}e^{c-3}}{\sqrt{c\pi}}. \tag{22}$$

Нехай $s \geq \frac{1}{3}$, $n \geq 2$. Із визначення p випливає, що $n - spn \geq p$. Тому

$$\begin{aligned} I_2'' &= \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{sn-1}dt \leq \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n\frac{2}{\pi}\frac{1}{sn}\left(\frac{X}{\overline{\sigma}_n}\right)^{sn} = \\ &= \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{n-spn}\frac{2}{\pi}\frac{1}{sn}c^{\frac{5}{2}sn} \leq \overline{\sigma}_n\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p\frac{3\sqrt{2}}{\pi}c^{\frac{5}{3}}. \end{aligned} \tag{23}$$

$p = 1$ при $s < \frac{1}{3}$ і $n \geq 2$. Оскільки $\overline{\theta}_n(s) \leq c^2$ і $n - sn - \frac{4}{3} \geq 0$, то

$$\begin{aligned} I_2'' &= \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{c}/\overline{\sigma}_n}^{X/\overline{\sigma}_n} t^{sn-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}dt \leq \left(\overline{\sigma}_n^s\overline{\theta}_n(s)\right)^n\frac{6}{\pi}\left(\frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{c}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{X}{\overline{\sigma}_n}\right)^{sn+\frac{1}{3}} \leq \\ &\leq \overline{\theta}_n(s)\left(c^2\right)^{n-sn-\frac{4}{3}}\frac{6}{\pi}c^{\frac{5}{2}sn+\frac{2}{3}} \leq \overline{\theta}_n(s)\frac{6}{\pi}c^{2n-2} \leq \overline{\sigma}_n\overline{\theta}_n(s)\frac{6}{\pi}\sqrt{n}c^{2n-2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Із (16), (20)–(24) і (13) одержуємо (2).

Нехай $n = 1$. У випадку $X_1 = X$ $\overline{\theta}_1(s) = \theta_{11}(s) \geq c^{\frac{2}{p}}$. Тоді

$$\rho_1 \leq 1 \leq c^{-\frac{2}{p}}\theta_{11}(s).$$

Якщо $X_1 = \sqrt{c}$, то $\theta_{11}(s) \le c^{\frac{2}{p}}$. Тоді із (4), де $T = X = c^{\frac{5}{2}}(\theta_{11}(s))^{-p}$, при $s > 0$

$$\rho_1 \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left| f_{11}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \le \theta_{11}(s)\ \frac{2}{\pi}\int_0^T t^{s-1}dt + \frac{24(\theta_{11}(s))^p}{\pi\sqrt{2\pi}c^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \theta_{11}(s)\frac{2}{\pi s}T^s + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} = \frac{2c^{\frac{5}{2}s}}{\pi s}(\theta_{11}(s))^{1-sp} + \frac{24c^{-\frac{5}{2}}}{\pi\sqrt{2\pi}}(\theta_{11}(s))^p \le$$

$$\le C_4\left(1 + \frac{1}{s}\right)(\theta_{11}(s))^p.$$

З одержаних оцінок випливає (3). Теорему доведено. □

3. Деякі наслідки

Уведемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{nk}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, |x|^3\right) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \qquad \overline{\nu}_n^{(0)} = \overline{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(0)};$$

$$\varkappa_{nk}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, 3x^2\right) |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)|\, dx, \qquad \overline{\varkappa}_n^{(0)} = \overline{\sigma}_n \sum_{k=1}^n \varkappa_{nk}^{(0)}\sigma_{nk};$$

$$\varkappa_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx, \qquad \overline{\varkappa}_n = \overline{\sigma}_n^{-1} \sum_{k=1}^n \varkappa_{nk}\sigma_{nk}^3.$$

Лема 3.1. *Для всіх $t \in \mathbb{R}$ справедливі нерівності*

$$\omega_{nk}(t) \le \nu_{nk}^{(0)} \min\left(1, \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\right), \tag{25}$$

$$\omega_{nk}(t) \le \varkappa_{nk}^{(0)} \min\left(|t|\sigma_{nk}, \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\right), \tag{26}$$

$$\omega_{nk}(t) \le \varkappa_{nk}\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}. \tag{27}$$

Доведення. Враховуючи, що $\mathsf{M}\xi_{nk} = 0$, $\mathsf{D}\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$,

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &= \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk})) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk})) \right| = \\ &= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk}))dx \right| = \\ &= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right)(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk}))dx \right|.\end{aligned} \tag{28}$$

Із рівності (28)

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk})) \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |d(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk}))| \le \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3}\right) |d(F_{nk}(x) - \Phi(x/\sigma_{nk}))| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| = \nu_{nk}^{(0)}.\end{aligned} \tag{29}$$

Використовуючи нерівність [4, с. 372]

$$\left|e^{iz}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(iz)^j}{j!}\right|\le\frac{2^{1-\gamma}|z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^{\gamma}},\quad 0\le\gamma\le 1,\quad m=0,1,2,\dots,\tag{30}$$

із (28)

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t)&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right)d(F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk}))\right|\le\\&\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right||d(F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk}))|\le\\&\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|tx|^3}{6}\left|d\left(F_{nk}(x)-\Phi(\frac{x}{\sigma_{nk}})\right)\right|\le\\&\le\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\left(1,\frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3}\right)\ |d(F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk}))|=\nu_{nk}^{(0)}\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}.\end{aligned}\tag{31}$$

Із (29) і (31) одержуємо нерівність (25).

Із рівності (28) і нерівності (30)

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t)&=|t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\big(e^{itx}-1-itx\big)(F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk}))dx\right|\le\\&\le|t|\int_{-\infty}^{+\infty}\big|e^{itx}-1-itx\big||F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk})|dx\le\\&\le|t|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(tx)^2}{2}|F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk})|dx=\\&=\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2|F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x)|dx=\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\varkappa_{nk}.\end{aligned}$$

Нерівність (27) доведено. Із попередньої нерівності

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t)&\le\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2|F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x)|dx\le\\&\le\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\big(1,\ 3x^2\big)\ |F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x)|dx=\\&=\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\varkappa_{nk}^{(0)},\end{aligned}$$

а із (28)

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t)&=|t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}(F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk}))dx\right|\le\\&\le|t|\int_{-\infty}^{+\infty}|F_{nk}(x)-\Phi(x/\sigma_{nk})|dx=\\&=|t|\sigma_{nk}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x)|dx\le|t|\sigma_{nk}\varkappa_{nk}^{(0)}.\end{aligned}$$

Із цих нерівностей одержимо (26). Лему доведено. □

Наслідок 3.1. *Існують сталі $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, що для всіх $n\ge 1$ справедливі нерівності*

$$\rho_n\le C^{(1)}\overline{\sigma}_n\overline{\nu}_n^{(0)}\delta_n(0),\tag{32}$$

$$\rho_n \le C^{(2)}\overline{\sigma}_n \max\Big\{\overline{\varkappa}_n^{(0)}\delta_n(1); \left(\overline{\varkappa}_n^{(0)}\right)^{\frac{n}{n+1}}\Big\}, \tag{33}$$

$$\rho_n \le C^{(3)}\overline{\sigma}_n \max\Big\{\overline{\varkappa}_n\delta_n(3); (\overline{\varkappa}_n)^{\frac{n}{3n+1}}\Big\}. \tag{34}$$

Доведення. Із нерівності (25) леми випливає, що умови теореми будуть виконуватись для $s=0$ і $\theta_{nk}(0)=\nu_{nk}^{(0)}$. Тоді одержуємо (32) для $n\ge 2$.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sup_x|\Phi_1(x)-\Phi(x)| = \sup_x|F_{11}(x)-\Phi(x)| = \\ &= \sup_x\left|\int_{-\infty}^x d(F_{11}(u)-\Phi(u))\right| \le \sup_x\int_{-\infty}^x |d(F_{11}(u)-\Phi(u))| \le \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\max\Big(1,\ |x|^3\Big)\ |d(F_{11}(x)-\Phi(x))| = \nu_{11}^{(0)}.\end{aligned}$$

Нерівність (32) правильна для всіх $n\ge 1$.

Якщо в теоремі покласти $s=1$ і $\theta_{nk}(1)=\varkappa_{nk}^{(0)}$, то одержимо (33).

Якщо ж у теоремі покласти $s=3$ і $\theta_{nk}(3)=\varkappa_{nk}$, то одержимо (34).

Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $\mathsf{M}\xi_k=0$, дисперсіями $\mathsf{D}\xi_k=\sigma_k^2$, $B_n^2=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(x)$ функцію розподілу випадкової величини ξ_k і покладемо $\frac{\xi_k}{B_n}=\xi_{nk}$. Тоді $S_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{B_n}$, $\sigma_{nk}^2=\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}$, $F_{nk}(x)=F_k(xB_n)$, $F_{nk}(x\sigma_{nk})=F_k(x\sigma_k)$, $\overline{\sigma}_n = \frac{1}{B_n}\max_{1\le k\le n}\sigma_k$. Позначимо

$$\nu_k^{(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}\max\Big(1,\ |x|^3\Big)\ |d(F_k(x\sigma_k)-\Phi(x))|,\qquad \overline{\nu}_n^{(0)}=\overline{\sigma}_n^2\sum_{k=1}^n\nu_k^{(0)};$$

$$\varkappa_k^{(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}\max\big(1,\ 3x^2\big)\ |F_k(x\sigma_k)-\Phi(x)|dx,\qquad \overline{\varkappa}_n^{(0)}=\overline{\sigma}_n\sum_{k=1}^n\varkappa_k^{(0)}\sigma_{nk};$$

$$\varkappa_k=\int_{-\infty}^{\infty}3x^2|F_k(x\sigma_k)-\Phi(x)|dx,\qquad \overline{\varkappa}_n=\overline{\sigma}_n^{-1}\sum_{k=1}^n\varkappa_k\sigma_{nk}^3.$$

Тоді будуть справедливі нерівності (32)–(34). А із цих оцінок випливають оцінки Золотарьова із [3]. □

Список літератури

1. V. M. Zolotarev, *On the closeness the distribution of two sum of independent random variables*, Teor. Verojatn., **10** (1965), 519–526.
2. V. Paulauskas, *One intensification of the Lyapunov theorem*, Lituan. Math. J., **9** (1969), 323–328.
3. V. M. Zolotarev, *Exactness of an approximation in the central limit theorem*, Proceedings of the Second Japan–USSR Symposium on Probability Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 330, Springer-Verlag, Berlin, 1973, p. 531–543.
4. V. M. Zolotarev, *Modern theory of summation of independent random variables*, Nauka, Moscow, 1986.
5. Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk, *The rate of convergence to the normal law in therms of psevdomoments*, Modern Stochastics: Theory and Applications, **2** (2015), no. 2, 95–106.
6. Yu. Mishura, Ye. Munchak, *The convergence rate of stock prices using the method of pseudo-moments*, Teor. Imovir. ta Matem. Statyst., **92** (2015), 110–124.
7. P. V. Slyusarchuk, I. Y. Polyak, *The generalization of one result of V. M. Zolotarev*, Nauk. vistn. Uzhorod. Univer. Seriya matem., **3** (1998), 184–189.
8. T. V. Bojarishcheva, P. V. Slyusarchuk, *The estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for differently distributed variables*, Nauk. vistn. Uzhorod. Univer. Seriya matem., **4** (1999), 12–16.
9. M. M. Loeve, *Probability Theory*, Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1962.

Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу, математичний факультет, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», вул. Університетська, 14, м. Ужгород, Україна, 88020
Адреса електронної пошти: michaelkapustey@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу, математичний факультет, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», вул. Університетська, 14, м. Ужгород, Україна, 88020
Адреса електронної пошти: petro_slyusarchuk@ukr.net

Стаття надійшла до редколегії 25.06.2018

ESTIMATION OF THE CONVERGENCE VELOCITY IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR A SEQUENCE OF SERIES IN TERMS OF MEAN PSEUDO-MOMENTS

M. M. KAPUSTEY, P. V. SLYUSARCHUK

Abstract. Article contains generalization of the Zolotarev V. M. estimates for a sequence of series of differently distributed random variable in terms of average pseudomoments. Method of Zolotarev is used in proof.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕРИЙ В ТЕРМИНАХ СРЕДНИХ ПСЕВДОМОМЕНТОВ

М. М. КАПУСТЕЙ, П. В. СЛЮСАРЧУК

Аннотация. Приводятся обобщения оценок Золотарева В. М. в терминах средних псевдомоментов для последовательности серий случайных величин.