Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 101–112

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 101–112

УДК 519.21

ПОБУДОВА МОДЕЛІ КАРУНЕНА – ЛОЕВА ДЛЯ ВХІДНОГО ГАУССОВОГО ПРОЦЕСУ, ЩО ПОДАЄТЬСЯ НА ЛІНІЙНУ СИСТЕМУ, З УРАХУВАННЯМ ВИХОДУ

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, І. В. РОЗОРА

Анотація. У статті вивчаються моделювання вхідного сигналу, що подається на лінійну систему з відомою імпульсною перехідною функцією. Відгук системи є вихідним процесом. За допомогою розкладу Карунена – Лоева будується модель, яка наближає вхідний процес з урахуванням виходу із наперед заданими точністю та надійністю у банаховому просторі $C([0,T])$. Також досліджується окремий випадок, при якому вхідним процесом є броунівський рух.

Ключові слова і фрази. Моделювання, гауссовий процес, розклад Карунена – Лоева, точність та надійність.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60G15, 68U20, 60K10.

1. Вступ

На сьогоднішній день теорія випадкових процесів широко використовується в різних галузях науки, причому не лише у природничих. Тому однією з важливих проблем є побудова математичної моделі випадкового процесу та вивчення її властивостей. Проблеми чисельного моделювання стають особливо актуальними завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють використовувати програмне забезпечення як інструмент моделювання та прогнозувати поведінку випадкового процесу. Існують різні методи моделювання випадкових процесів і полів, наприклад, [4, 16–18, 20, 25]. Проте в більшості робіт, що стосуються моделювання випадкових процесів, питання точності та надійності не розглядається. У [5–11, 14, 15, 19, 21, 22] ця проблема була досліджена для різних стохастичних процесів і полів, зокрема для гауссівських та субгауссівських випадкових процесів.

Стаття присвячена моделюванню вхідного сигналу на лінійну однорідну систему з урахуванням виходу. Вхідний процес є гауссовим із неперервною кореляційною функцією. Лінійна система описується дійсною інтегрованою із квадратом імпульсною перехідною функцією. Інформацію про лінійні системи з імпульсною перехідною функцією та оцінки для них можна знайти в роботах [12, 13, 23]. Відгук системи розглядається як вихідний процес. За допомогою розкладу Карунена – Лоева будується модель, яка наближає вхідний процес з урахуванням виходу із наперед заданими точністю та надійністю у банаховому просторі $C([0,T])$. Детально вивчається окремий випадок, при якому вхідним процесом є броунівський рух. За допомогою програмного середовища для статистичних обчислень, аналізу та зображень даних у графічному вигляді R знаходяться значення N (верхня межа зрізок у моделі Карунена – Лоева) для різних значень точності та надійності.

2. Основні означення

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, F, P).

Нехай $T=[0,T]$, $X=\{X(t), t\in T\}$ — неперервний у середньому квадратичному квадратично-інтегрований випадковий процес, що заданий на визначеному ймовірнісному просторі, $\mathsf{E}\,X(t)=0$, $B(t,s)=\mathsf{E}\,X(t)X(s)$, $t,s\in T$ —коваріаційна функція цього випадкового процесу. Зрозуміло, що $B(t,s)$ — невід'ємно визначена функція. Оскільки процес $X(t)$ неперервний у середньому квадратичному, то функція $B(t,s)$ неперервна на $T \times T$.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$z(t) = \lambda \int_T B(t,s) z(s)\, ds. \tag{1}$$

У книзі [26] показано, що інтегральне рівняння (1) має не більш ніж зліченну сім'ю невід'ємних характеристичних значень. Нехай λ_n — характеристичні числа, а $z_n(t)$ — відповідні їм функції рівняння (1). Занумеруємо λ_n у порядку зростання $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le \lambda_{n+1} \le \ldots$ Будемо вважати, що $z_n(t)$ — ортонормована послідовність

$$\int_T z_n(t) z_m(t)\, dt = \delta_m^n,$$

де δ_m^n — символ Кронекера. Функції $z_n(t)$ також є неперервними при $t \in T$.

Тоді, використовуючи розклад Карунена–Лоева, випадковий процес можна подати у вигляді

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \xi_n. \tag{2}$$

При цьому ряд (2) збігається в середньому квадратичному, ξ_n — некорельовані випадкові величини: $\mathsf{E}\,\xi_n = 0$, $\mathsf{E}\,\xi_n \xi_m = \delta_m^n$.

У цій статті розглядаємо випадок, коли випадковий процес $X(t)$ є гауссовим. Тоді у розкладі (2) випадкові величини ξ_n — незалежні гауссові такі, що $\mathsf{E}\,\xi_n^2 = 1$.

Розглянемо однорідну лінійну систему з дійсною інтегрованою із квадратом імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, що визначена на області $\tau \in [0,T]$. Тобто відгук системи на вхідний сигнал $X(t)$, що спостерігається на $[0,T]$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^T H(\tau) X(t-\tau) d\tau, \quad t \in [T, 2T] \tag{3}$$

та $H \in L_2([0,T])$.

Зауваження 2.1. Інтеграл у (3) розуміється в сенсі Рімана.

Вважаємо, що імпульсна перехідна функція відома. Уведемо таке позначення:

$$c_k(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^T H(\tau) z_k(t-\tau) d\tau, \;\; t \in [0,T]. \tag{4}$$

Якщо ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \xi_k$ збігається рівномірно на $[0,T]$ з імовірністю 1, то із (2) та (3) випливає, що відгук системи $Y(t)$ зображається як

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot c_k(t), \tag{5}$$

де функції $c_k(t)$ із (4).

Надалі припускаємо, що ряд у (5) збігається рівномірно з ймовірністю 1. (Умова **D**.)

Зауваження 2.2. Легко показати, що ряд у (2) збігається рівномірно з імовірністю 1, коли збігається ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k E|\xi_k|$, де $v_k = \max_{[0,T]} |z_k(t)|$. Але така умова є досить обмежуюча. Умови рівномірної збіжності таких рядів можна знайти у книзі [2].

Приклад 2.1. Із теореми Ханта (див, наприклад, [2, с. 116]) випливає, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(\lambda_k t)\xi_k,$$

де ξ_k, $k \geq 1$, — незалежні випадкові величини такі, що $E\xi_k^2 = 1$, а $\lambda_k \uparrow \infty$, рівномірно збігається на $[0,T]$ з імовірністю 1, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 (\ln(1+\lambda_k))^{1+\beta} < \infty, \tag{6}$$

для деякого $\beta > 0$.

У цій статті вивчається побудова моделі випадкового процесу $X(t)$ і знаходяться умови при яких, модель наближає вхідний процес $X(t)$, враховуючи відгук системи (вихідний процес) $Y(t)$ у банаховому просторі $C([0,T])$.

Як модель випадкового процесу $X(t)$ будемо розуміти зрізаний ряд із (2).

Означення 2.1. Випадковий процес $X_N = \{X_N(t),\, t \in T\}$, $N \in \mathbb{N}$, де

$$X_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{z_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \xi_n,$$

називається моделлю Карунена–Лоева процесу $X = \{X(t), t \in T\}$.

Якщо модель $X_N(t)$ розглянути як вхідний сигнал системи, то відповідний вихідний процес можна подати як

$$Y_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \xi_k \cdot c_k(t),$$

де функції $c_k(t)$ задані в (4).

Позначимо через $\xi_N(t)$ суму квадратів різниць $X(t) - X_N(t)$ та $Y(t) - Y_N(t)$:

$$\xi_N(t) = (X(t) - X_N(t))^2 + (Y(t) - Y_N(t))^2. \tag{7}$$

Означення 2.2. Будемо говорити, що модель $X_N(t)$ наближує випадковий процес $X(t)$ з урахуванням відгуку системи (2) із заданою надійністю $1 - \nu$, $\nu \in (0,1)$, та точністю $\delta > 0$ у просторі $C([0,T])$, якщо

$$P\left\{ \sup_{t \in [0,T]} |\xi_N(t)| > \delta \right\} < \nu.$$

Будемо використовувати наступний результат про розподіл хвоста для супремуму суми квадратів гауссових процесів. Доведення міститься в монографії [9, наслідок 3.6, с. 129].

Теорема 2.1. [9] *Припустимо, що* $\xi(t)$, $t \in [0,T]$, *є сумою квадратів гауссових випадковиих процесів та*

$$\sup_{|t-s|<h} \sqrt{D(\xi(t) - \xi(s))} \leq \sigma(h) = kh^{\alpha},\ \alpha \in (0,1], \tag{8}$$

де k *– певна стала. Тоді для* x *такого, що*

$$x > \frac{2\sqrt{2}\max\{\delta_0, k(T/2)^{\alpha}\}}{\alpha},$$

виконується нерівність

$$P\left\{ \sup_{t \in [0,T]} |\xi(t) - E\xi(t)| > x \right\} < 4e^{\frac{3}{\alpha}} \exp\left\{ -\frac{x}{2\sqrt{2}\delta_0} \right\} \left(\frac{x\alpha}{2\sqrt{2}\delta_0} \right)^{2/\alpha} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{2}\delta_0} \right)^{1/2},$$

де $\delta_0 = \sup\limits_{t\in[0,T]} (D(\xi(t)))^{1/2}$.

3. Моделювання випадкового процесу з наперед заданою точністю та надійністю $C([0,T])$ з урахуванням відгуку системи

Легко бачити, що процес $\xi_N(t)$ є сумою квадратів двох гауссових процесів, де $\xi_N(t)$ визначено в (7). Тому можна для даного процесу використати результати теореми 2.1.

Позначимо

$$\phi_{kl}(t) = \frac{z_k(t)z_l(t)}{\lambda_k\lambda_l} + c_k(t)c_l(t). \tag{9}$$

Тоді із співвідношень (2), (5) та (7) випливає, що випадковий процес $\xi_N(t)$ зображається у вигляді ряду

$$\xi_N(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} \phi_{kl}(t)\xi_k\xi_l. \tag{10}$$

Також визначимо приріст функцій із (9)

$$\Delta\phi_{kl}(t,s) = \phi_{kl}(t) - \phi_{kl}(s). \tag{11}$$

Справедлива така лема.

Лема 3.1. *Нехай* $\xi_N(t)$ *випадковий процес із* (7). *Тоді*

$$\begin{aligned} E\xi_N(t) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \phi_{kk}(t); \\ D\xi_N(t) &= \sum_{k,l=N+1}^{\infty} 2(\phi_{kl}(t))^2; \qquad (12) \\ D(\xi_N(t) - \xi_N(s)) &= \sum_{k,l=N+1}^{\infty} 2(\Delta\phi_{kl}(t,s))^2. \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки ξ_k, $k \geq 0$, – незалежні гауссові центровані випадкові величини з дисперсією 1, то з (10) випливає, що

$$\begin{aligned} E\xi_N(t) &= \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} \phi_{kl}(t)E\xi_k\xi_l = \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \phi_{kk}(t). \end{aligned}$$

Обчислимо спочатку другий момент для $\xi_N(t)$

$$E(\xi_N(t))^2 = E\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} \phi_{kl}(t)\xi_k\xi_l\right)^2.$$

Використаємо формулу Іссерліса (див., наприклад, [1]) для гауссових центрованих випадкових величин:

$$EX_1X_2X_3X_4 = EX_1X_2EX_3X_4 + EX_1X_3EX_2X_4 + EX_1X_4EX_2X_3.$$

Тоді

$$E(\xi_N(t))^2 \;=\; E\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} \big(\phi_{kk}(t)\phi_{ll}(t) + 2(\phi_{kl}(t))^2\big).$$

А отже, дисперсію випадкового процесу $\xi_N(t)$ запишемо як

$$\begin{aligned} D\xi_N(t) &= E(\xi_N(t))^2 - (E\xi_N(t))^2 = \\ &= \sum_{k,l=N+1}^{\infty} \big(2(\phi_{kl}(t))^2\big). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходиться дисперсія приросту $\xi_N(t) - \xi_N(s)$. □

Розглянемо такі умови:

- **Умова A:** Імпульсна перехідна функція інтегрована із квадратом
$$I_H = \int_0^T H^2(\tau)d\tau < \infty.$$
- **Умова B:** Припустимо, що функції z_k задовольняють умову Гельдера з показником α на відрізку $[0,T]$, тобто існують константи $q_k > 0$ такі, що
$$|z_k(t) - z_k(t)| \le q_k|s-t|^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1],\ s,t \in [0,T]. \tag{13}$$
- **Умова C:** Збігаються ряди
$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^i q_k^{2-i}}{\lambda_k} < \infty,\ i = 0,1,2,$$
де значення q_k визначені в умові **B**, а
$$v_k = \max_{t \in T} |z_k(t)|. \tag{14}$$

За допомогою леми 3.2 знаходять оцінки середнього, дисперсії процесу $\xi_N(t)$ та дисперсії приростів процесу.

Лема 3.2. *Припустимо, що виконуються умови **A, B, C, D**. Тоді*

$$E\xi_N(t) \le (1 + I_H T) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} := m_N^*; \tag{15}$$

$$D\xi_N(t) \le 2(1 + T \cdot I_H)^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} \right)^2 := (\delta_0(N,T))^2; \tag{16}$$

$$D(\xi_N(t) - \xi_N(s)))^{1/2} \le K(N,T) \cdot |t-s|^{\alpha},\ \alpha \in (0,1], \tag{17}$$

де

$$K(N,T) = 2(1 + T \cdot I_H) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{q_l^2}{\lambda_l} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k q_k}{\lambda_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Доведення. Використовуючи результат леми 3.1 та співвідношення (9), маємо

$$E\xi_N(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \phi_{kk}(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} (\frac{z_k^2(t)}{\lambda_k} + c_k^2(t)) \le \sum_{k=N+1}^{\infty} (\frac{v_k^2}{\lambda_k} + c_k^2(t)).$$

Оцінимо зараз $c_k^2(t)$.

$$\begin{aligned} c_k^2(t) &= \frac{1}{\lambda_k} \left(\int_0^T H(\tau) z_k(t-\tau) d\tau \right)^2 \le \\ &\le \frac{1}{\lambda_k} \int_0^T H^2(\tau) d\tau \left(\int_0^T z_k^2(t-\tau) d\tau \right) \le \end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{I_H T v_k^2}{\lambda_k}. \tag{19}$$

Отже, оцінку (15) для $E\xi_N(t)$ повністю доведено.

Із леми 3.1 випливає, що для оцінки дисперсії випадкового процесу $\xi_N(t)$ потрібно оцінити значення $(\phi_{kl}(t))^2$:

$$\begin{aligned}
(\phi_{kl}(t))^2 &= \frac{1}{\lambda_k\lambda_l} z_k^2(t) z_l^2(t) + \\
&+ 2\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}} z_k(t) z_l(t) c_k(t) c_l(t) + \\
&+ c_k^2(t) c_l^2(t).
\end{aligned}$$

Тоді, використовуючи останню рівність та нерівності (14), (19), дисперсія процесу $\xi_N(t)$ оцінюється таким чином:

$$\begin{aligned}
D\xi_N(t) &= 2\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{z_k^2(t)}{\lambda_k}\right)^2 + 2\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{z_k(t)c_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2(t)\right)^2\right) \leq \\
&\leq 2(1+T\cdot I_H)^2\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{v_k^2}{\lambda_k}\right)^2.
\end{aligned}$$

Для повного доведення даної леми потрібно ще оцінити $(D(\xi_N(t)-\xi_N(s)))^{1/2}$. Із леми 3.1 випливає, що для цього досить знайти оцінку щодо

$$(\Delta\phi_{kl})^2 = (\phi_{kl}(t) - \phi_{kl}(s))^2.$$

Дійсно, із (9),(14), (19) та умови **B**, маємо

$$\begin{aligned}
|\Delta\phi_{kl}| &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}|(z_k(t)z_l(t) - z_k(s)z_l(s)) + c_k(t)c_l(t) - c_k(s)c_l(s)| \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}(|z_k(t)|\cdot|z_l(t)-z_l(s)| + |z_l(t)|\cdot|z_k(t)-z_k(s)|) + \\
&+ |c_k(t)|\cdot|c_l(t)-c_l(s)| + |c_l(t)|\cdot|c_k(t)-c_k(s)| \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}(v_k\cdot q_l + v_l\cdot q_k)|t-s|^{\alpha} + \\
&+ \sqrt{I_H T}\left(\frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cdot|c_l(t)-c_l(s)| + \frac{v_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cdot|c_k(t)-c_k(s)|\right).
\end{aligned}$$

Розглянемо зараз приріст функцій $c_k(t)$. З умов **A, B** випливає

$$\begin{aligned}
|c_k(t)-c_k(s)| &= |\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T H(\tau)z_k(t-\tau)d\tau - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T H(\tau)z_k(s-\tau)d\tau| \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T |H(\tau)|\cdot|z_k(t-\tau)-z_k(s-\tau)|d\tau \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T |H(\tau)|\cdot q_k|t-s|^{\alpha}d\tau \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\left(\int_0^T H^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^T 1d\tau\right)^{1/2}\cdot q_k|t-s|^{\alpha} \leq \\
&\leq \frac{q_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sqrt{I_H T}\cdot|t-s|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}|\Delta\phi_{kl}| &\le \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}(v_k\cdot q_l+v_l\cdot q_k)|t-s|^{\alpha}+\\ &+ \sqrt{I_HT}\left(\frac{v_kq_l}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\cdot\sqrt{I_HT}\cdot|t-s|^{\alpha}+\frac{v_lq_k}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\cdot\sqrt{I_HT}\cdot|t-s|^{\alpha}\right)=\\ &= \frac{1+I_HT}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}(v_k\cdot q_l+v_l\cdot q_k)|t-s|^{\alpha}.\end{aligned}$$

А отже, дисперсія різниці процесу обмежується значенням

$$\begin{aligned}D(\xi_N(t)-\xi_N(s)) &= \sum_{k,l=N+1}^{\infty}2(\Delta\phi_{kl}(t,s))^2\le\\ &\le 2(1+I_HT)^2\sum_{k,l=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}(v_k\cdot q_l+v_l\cdot q_k)^2|t-s|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Після елементарних перетворень отримаємо

$$(D(\xi_N(t)-\xi_N(s)))^{1/2}\le K(N,T)\cdot|t-s|^{\alpha},\quad \alpha\in(0,1],$$

де $K(N,T)$ з (18). □

Результати леми 3.2 можна використати для наближення гауссового випадкового процесу за допомогою моделі Карунена – Лоева з урахуванням відгуку системи з наперед заданою точністю та надійністю у просторі неперервних функцій.

Позначимо

$$m_N(t)=E\xi_N(t),\quad Z_N(y)=\xi_N(t)-E\xi_N(t),\quad t\in[0,T].$$

Тоді, оскільки $\xi_N(t)$ є сумою квадратів гауссових процесів, то $m_N(t)\ge 0$. З іншого боку, використовуючи оцінку (15), маємо $m_N(t)\le m_N^*$, $t\in[0,T]$.

Теорема 3.1. *Припустимо, що виконуються умови* ***A, B, C, D****. Модель Карунена – Лоева $X_N(t)$ наближає вхідний гауссовий процес $X(t)$ з урахуванням виходу системи (2) із заданою надійністю $1-\nu$, $\nu\in(0,1)$, та точністю $\delta>0$ у просторі $C([0,T])$, якщо N задовольняє такі нерівності:*

$$\delta>\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\max\{\delta_0(N,T),K(N,T)\cdot(T/2)^{\alpha}\}+m_N^*,\ \alpha>0,$$

$$4e^{\frac{3}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{(\delta-m_N^*)}{2\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right\}\times\left(\frac{(\delta-m_N^*)\alpha}{2\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right)^{2/\alpha}\left(1+\frac{2(\delta-m_N^*)}{\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right)^{1/2}<\nu,\qquad(20)$$

де значення $\delta_0(N,T)$, $K(N,T)$ визначені в (16) та (18) відповідно.

Доведення. З означення 2.2 випливає, що потрібно знайти оцінку для ймовірності

$$P\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_N(t)|>\delta\}.$$

Випадковий процес $\xi_N(t)$ можна подати у вигляді

$$\xi_N(t)=\xi_N(t)-E\xi_N(t)+E\xi_N(t)=Z_N(t)+m_N(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\xi_N(t)\ge\delta &\quad\Leftrightarrow\quad Z_N(t)\ge\delta-m_N(t),\\ \xi_N(t)\le-\delta &\quad\Leftrightarrow\quad Z_N(t)\le-\delta-m_N(t).\end{aligned}$$

Оскільки $0\le m_N(t)\le m_N^*$, то для $\delta>m_N^*$ отримаємо

$$\{|\xi_N(t)|\ge\delta\}\subset\{|Z_N(t)|\ge\delta-m_N^*\}$$

та

$$P\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_N(t)|\geq\delta\}\leq P\{\sup_{t\in[0,T]}|Z_N(t)|\geq\delta-m_N^*\}. \tag{21}$$

Твердження теореми буде повністю доведено, якщо використати результат теореми 2.1 для процесу $Z_N(t)$ підставити отримані в лемі 3.2 оцінки для $\delta_0(N,T)$ і $K(N,T)$.

□

Зауваження 3.1. Оскільки при $N\to\infty$ функції $\delta_0(N,T)$ та m_N^* прямують до 0, то

$$4e^{\frac{3}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{(\delta-m_N^*)}{2\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right\}\left(\frac{(\delta-m_N^*)\alpha}{2\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right)^{2/\alpha}\left(1+\frac{2(\delta-m_N^*)}{\sqrt{2}\delta_0(N,T)}\right)^{1/2}\to 0,\ N\to\infty.$$

Тому для наперед заданих значень точності $\delta>0$ та надійності $1-\nu$ можна знайти таке N, для якого виконуються нерівності теореми 3.1.

Приклад 3.1. Як вхідний процес $X(t)$, $t\in[0,1]$, розглянемо стандартний вінерівський процес. Його коваріаційна функція $B(t,s)=\min\{t,s\}$. Досить просто знайти характеристичні числа та функції відповідного інтегрального рівняння (див, наприклад, [3, с. 349])

$$z(t)=\lambda\int_0^1\min\{t,s\}z(s)\,ds.$$

$\lambda_k=((k-1/2)\pi)^2$ є характеристичними числами, а $z_k(t)=\sqrt{2}\sin((k-1/2)\pi t)$, $k\geq 1$, — відповідні їм функції. Зауважимо, що для таких значень λ_k і $z_k(t)$ виконується умова (6) для рівномірної збіжності ряду (5) (умова **D**). Отже, сам вінерівський процес допускає зображення

$$X(t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((k-1/2)\pi t)}{(k-1/2)\pi}\xi_k,$$

де $\xi_k, k\geq 1$, — послідовність незалежних гауссових випадкових величин, для яких $E\xi_k=0$ і $E\xi_k^2=1$. Тоді випадковий процес

$$X_N(t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin((k-1/2)\pi t)}{(k-1/2)\pi}\xi_k, \tag{22}$$

буде моделлю Карунена–Лоева для процесу Вінера.

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконується умова* ***A***. *Модель Карунена–Лоева* $X_N(t)$ *із* (22) *наближає вхідний вінерівський процес* $X(t)$ *з урахуванням виходу системи* (2) *із заданою надійністю* $1-\nu$, $\nu\in(0,1)$, *та точністю* $\delta>0$ *у просторі* $C([0,1])$, *якщо* N *задовольняє такі нерівності:*

$$\delta>\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\max\{\delta_0(N,1),\frac{K(N,1)}{2^\alpha}\}+m_N^*,\ \alpha\in(0,\frac{1}{2}),$$

$$4e^{\frac{3}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{\delta\pi^2(N-1/2)}{8(1+I_H)}+\frac{1}{4}\right\}\left(\frac{\alpha\delta\pi^2(N-1/2)}{8(1+I_H)}-\frac{\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}\left(\frac{\delta\pi^2(N-1/2)}{2(1+I_H)}\right)^{1/2}<\nu,$$

де значення

$$m_N^*=\frac{2(1+I_H)}{\pi^2(N-1/2)},$$

$$K(N,1)=\frac{2^{3-\alpha}(1+I_H)\pi^{\alpha-2}}{(1-\alpha)}\sqrt{2+\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}}\frac{1}{(N-1/2)^{1-\alpha}},$$

$$\delta_0(N,1) = \frac{2\sqrt{2}(1+I_H)}{\pi^2(N-1/2)}. \tag{23}$$

Доведення. Використаємо теорему 3.1 і покажемо, що виконуються умови **B, C**.

Спочатку доведемо, що для власних функцій виконується умова Гельдера. Оскільки $|\sin(h)| \le h^\alpha,\ \alpha \in (0,1]$ (див., наприклад, [9]), то

$$\begin{aligned}
|z_k(t)-z_k(s)| &\le \sqrt{2}|\sin((k-1/2)\pi t) - \sin((k-1/2)\pi s)| \le \\
&\le 2^{3/2}|\sin\left(\frac{(k-1/2)\pi}{2}(t-s)\right)| \le \\
&\le 2^{3/2-\alpha}((k-1/2)\pi)^\alpha |t-s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Тому умова **B** виконується та значення q_k в цьому випадку

$$q_k = 2^{3/2-\alpha}\pi^\alpha (k-1/2)^\alpha,\ \alpha \in (0,1/2).$$

Зрозуміло, як $v_k = \max\limits_{t\in T}|z_k(t)|$ можна взяти послідовність констант $v_k = \sqrt{2}$.

Проаналізуємо збіжність рядів з умови **C** та оцінимо їх.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^i q_k^{2-i}}{\lambda_k} = 2^{3-2\alpha-i+\alpha i}\pi^{2(\alpha-1)-i\alpha} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^{2(1-\alpha)+i\alpha}},\ i=0,1,2.$$

Оскільки за умовою теореми $\alpha \in (0,1/2)$, то $2(1-\alpha)+i\alpha > 1$ при $i=0,1,2$. Отже, ряди збіжні. Для $d>1$ оцінимо

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^d} &= \sum_{N+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1/2)^d}dx \le \\
&\le \sum_{N+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(x-1/2)^d}dx = \int_N^\infty \frac{1}{(x-1/2)^d}dx = \\
&= \frac{1}{(d-1)(N-1/2)^{d-1}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} &\le 2\pi^{-2}\frac{1}{(N-1/2)}; \\
\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v_k q_k}{\lambda_k} &\le 2^{2-\alpha}\pi^{\alpha-2}\frac{1}{(1-\alpha)(N-1/2)^{1-\alpha}}; \\
\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{q_k^2}{\lambda_k} &\le 2^{3-2\alpha}\pi^{2(\alpha-1)}\frac{1}{(1-2\alpha)(N-1/2)^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Із (15), (16) і (18) випливає, що

$$m_N^* = \frac{2(1+I_H)}{\pi^2(N-1/2)},$$

$$\delta_0(N,1) = \sqrt{2}(1+T\cdot I_H)\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{v_k^2}{\lambda_k} = \frac{2\sqrt{2}(1+I_H)}{\pi^2(N-1/2)},$$

$$K(N,1) = 2(1+T\cdot I_H)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{v_k^2}{\lambda_k}\sum_{l=N+1}^{\infty}\frac{q_l^2}{\lambda_l}+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{v_k q_k}{\lambda_k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \frac{2^{3-\alpha}(1+I_H)\pi^{\alpha-2}}{(1-\alpha)}\sqrt{2+\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}}\frac{1}{(N-1/2)^{1-\alpha}}.$$

Теорему повністю доведено. □

Приклад 3.2. Розглянемо випадок, коли імпульсна перехідна функція

$$H(t) = e^{-t},$$

а $\alpha = \frac{1}{4}$. При таких значеннях виконуються всі умови теореми 3.2. За допомогою програмного середовища для статистичних обчислень та мови програмування R можна знайти найменше значення N, що задовольняє нерівності в теоремі 3.2, яке одночасно і є верхньою межею зрізки у моделі Карунена – Лоева. У табл. 1 наведено деякі N для різних значень точності та надійності, а також значення $\delta_0(N,1)$ з (23), що згідно з лемою 3.2 обмежує середньо-квадратичне відхилення для процесу $\xi_N(t)$.

Таблиця 1. Значення N, $\delta_0(N,1)$ та β для різних точностей при надійності 0,95

δ	N	$\delta_0(N,1)$	β
0,05	3774	0,000108	0,0084
0,1	1499	0,000273	0,017
0,3	348	0,001181	0,05
0,5	177	0,002325	0,084
0,7	113	0,003648	0,117
0,9	81	0,005099	0,15

У чисельних застосуваннях теорії ймовірностей практики користуються правилом 3σ для центрованих гауссових випадкових величин, а саме вважається, що випадкова нормальна величина ξ, $E\xi = 0$, набуває значень в інтервалі $[-3\sigma, 3\sigma]$, де $\sigma^2 = E\xi^2$. Якщо розглядати гауссів випадковий процес $\xi(t)$, $a \le t \le b$, $E\xi(t) = 0$, то звичайно траєкторії процесу рідко виходять за інтервал $(-3\max_{a\le t\le b}\sigma(t), 3\max_{a\le t\le b}\sigma(t))$, де $\sigma^2(t) = E\xi^2(t)$. Тому при наближенні такого процесу прийнято точність наближення δ вибирати у такий спосіб: $\delta = \beta \cdot 6\max_{a\le t\le b}\sigma(t)$. Коефіцієнт β показує, яку частку від коливань траєкторії становить бажана точність наближень. У табл. 1 наведено дані для випадку $\max_{0\le t\le 1}\sigma(t) = \sigma = 1$. Отже, при $\delta = 0,05$ $\beta \approx 0,0084$. Це дуже висока точність, яку можна реалізувати при $N = 3774$.

4. Висновки

У роботі вивчались моделі вхідних процесів для лінійної однорідної системи. Вхідні сигнали розглядались як неперервні у середньому квадратичному гауссові процеси з відомою кореляційною функцією. А лінійна однорідна система описувалась за допомогою імпульсної перехідної функції. Досліджено метод моделювання вхідного процесу, що базується на використанні зображення процесів у ряд за власними функціями певних інтегральних рівнянь, з урахуванням виходу системи із наперед заданими точністю та надійністю у рівномірній метриці. Окремо розглянуто випадок броунівського руху. За допомогою програмного середовища для статистичних обчислень R знайдено значення верхньої межі зрізки у моделі Карунена–Лоева N для різних значень точності при надійності 0,95.

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку проф. Мішурі Ю. С. та двом рецензентам за цінні зауваження та рекомендації, що змогли покращити цю статтю.

Список літератури

1. D. Brillinger, *Time Series: Data Analysis and Theory*, San Francisco: Holden-Day, 1981.
2. V. Buldygin, Yu. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
3. I. Gikhman, A. Skorokhod, M. Yadrenko, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, "Vyscha Shkola", Kyiv, 1988. (in Russian)
4. S. Iermakov, G. Mikhaylov, *Statistical Modelling*, "Nauka",Moskow, 1982. (in Russian)
5. Yu. Kozachenko, A. Olenko, *A liasing-truncation Errors in Sampling Approximations of Sub-Gaussian Signals,* IEEE Trannsactions on Information Theory, **62** (2016), №10, 5831–5838.
6. Yu. Kozachenko, A. Olenko, *Whittaker-Kotel'nikov-Shannon approximation of φ-sub-Gaussian random processes,* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **443** (2016), №2, 926–946.
7. Yu. Kozachenko, A. Olenko and O. Polosmak, *Uniform convergence of compactly supported wavelet expansions of Gaussian random processes,* Communications in Statistics – Theory and Methods, **43** (2014), №10-12, 2549–2562.
8. Yu. Kozachenko, A. Pashko, I. Rozora, *Simulation of Stochastic Processes and fields*, Zadruga, Kyiv, 2007. (in Ukrainian)
9. Yu. Kozachenko, O. Pogorilyak, I. Rozora and A. Tegza, *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press - Elsevier, 2016.
10. Yu. Kozachenko, I. Rozora, *Simulation of Gaussian stochastic processes*, Random Oper. and Stochastic Equ., **11** (2003), №3, 275–296.
11. Yu. Kozachenko, I. Rozora, *Accuracy and Reliability of models of stochastic processes of the space* $Sub_\varphi(\Omega)$, Theor. Probability and Math. Statist., **71** (2005), 105–117.
12. Yu. Kozachenko, I. Rozora, *On cross-correlogram estimators of impulse response function*, Theor. Probability and Math. Statist., **93** (2016), 79–91.
13. Yu. Kozachenko, I. Rozora, *A Criterion For Testing Hypothesis About Impulse Response Function*, Statistics, optimization & information computing, **4** (2016), №3, 214–232.
14. Yu. Kozachenko, I. Rozora and Ye. Turchyn *On an expansion of random processes in series*, Random Operators and Stochastic Equ., **15** (2007), 15–33.
15. Yu. Kozachenko, I. Rozora and Ye. Turchyn *Properties of Some Random Series*, Communications in Statistics – Theory and Methods, **40** (2011), №19-20, 3672–3683.
16. Yu. Kozachenko Yu., T. Sottinen, O. Vasylyk, *Simulation of weakly self-similar stationary increment* $Sub_\varphi(\Omega)$*-processes: a series expansion approach*, Methodology and computing in applied probability, **7** (2005), 379–400.
17. P. Kramer, O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, *Comparative Analysis of Multiscale Gaussian Random Field Simulation Algorithms*, Journal of Computational Physics,**226** September (2007), 897–924.
18. G. Mikhaylov, A. Voitishek, *Numerical statistical modelling*, "Academiya", Moscow, 2006. (in Russian)
19. A. Pashko A., I. Rozora, *Accuracy of simulation for the network traffic in the form of fractional Brownian Motion*, 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET, Proceedings, April (2018), 840–845.
20. S. Prigarin, *The methods of numerical simulation for stochastic processes and fields*, IVMiMG, Novosibirsk, 2005. (in Russian)
21. I.Rozora, *Simulation of Gaussian stochastic process with respect to derivative*, Prykladna statystyka, actuarna i finansova matematyka, **1-2** (2008), 139–147. (in Ukrainian)
22. I. Rozora, *Simulation accuracy of strictly φ-Sub-Gaussian stochastic processes in the space* $L_2[0,T]$, Obchuslyuvalna ta prykladna matematyka, **2** (2009), №98, 68–76. (in Ukrainian)
23. I. Rozora, *Statistical hypothesis testing for the shape of impulse response function*, Communications in Statistics – Theory and Methods, **47** (2018), №6, 1459–1474.
24. I. Rozora, M. Lyzhechko, *On the modeling of linear system input stochastic processes with given accuracy and reliability*, Monte Carlo Methods Appl., **24** (2018), №2, 129–137.

25. K. Sabelfeld, *Monte Carlo methods in boundary-value problems*, "Nauka", Novosibirsk, 1989. (in Russian)
26. H. Trikomi, *Integral equations*, In.Lit., Moscow, 1960. (in Russian)

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, м. Київ, Україна, 03127
Адреса електронної пошти: yvk@univ.kiev.ua

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4д, м. Київ, Україна, 03680
Адреса електронної пошти: irozora@bigmir.net

Стаття надійшла до редколегії 30.07.2018

CONSTRUCTION OF THE KARHUNEN–LOEVE MODEL FOR THE INPUT GAUSSIAN PROCESS APPLIED TO THE LINEAR SYSTEM, TAKING INTO ACCOUNT THE OUTPUT

YU. V. KOZACHENKO, I. V. ROZORA

Abstract. In the article, we study the simulation of the input signal, which is applied to a linear system with known impulse response function. System response is an output process. With the help of the Karhunen–Loeve expansion, a model is constructed which approximates the input process taking into account the output with predefined accuracy and reliability in the Banach space $C([0,T])$. Also, a partial case is investigated, in which the input process is the Brownian motion.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ КАРУНЕНА – ЛОЭВА ДЛЯ ВХОДНОГО ГАУССОВОГО ПРОЦЕССА, КОТОРЫЙ ПОДАЕТСЯ НА ЛИНЕЙНУЮ СИСТЕМУ, С УЧЕТОМ ВЫХОДА

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, И. В. РОЗОРА

Аннотация. В статье изучаются моделирования входного сигнала, который подается на линейную систему с известной импульсной переходной функцией. С помощью разложения Карунена – Лоэва строится модель, которая приближает входной процесс с учетом выхода с заданными точностью и надежностью в банаховом пространстве $C([0,T])$. Также исследуется частный случай, при котором входным процессом является броуновское движение.