Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 113–122

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 113–122

УДК 519.21

КРИТЕРІЙ ЗГОДИ В МОДЕЛІ КОКСА ІЗ ПРОПОРЦІЙНИМИ РИЗИКАМИ ТА ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

О. Г. КУКУШ, О. О. ЧЕРНОВА

Анотація. Розглядається модель Кокса із пропорційними ризиками, в якій базова функція інтенсивності $\lambda(\cdot)$ належить параметричній множині, складеній із невід'ємних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця з фіксованою сталою, а векторний параметр регресії β належить компактній параметричній множині. Спостерігається цензурована тривалість життя та відповідні значення регресорів, спотворені класичною адитивною похибкою вимірювань. Побудовано критерій згоди на основі строго консистентної сумісної оцінки $\lambda(\cdot)$ та β, визначеної у роботі Кукуша та Чернової (2017 р.) [6]. За нульової гіпотези тестова статистика має асимптотичний хі-квадрат розподіл. Знайдено потужність тесту за відповідних локальних альтернатив.

Ключові слова і фрази. Консистентна оцінка, критерій згоди, локальні альтернативи, модель Кокса із пропорційними ризиками, потужність критерію, сумісне оцінювання базової функції ризику та параметра регресії.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62N03; Secondary 62N01.

1. Вступ

Ми розглядаємо модель Кокса із пропорційними ризиками, відповідно до якої функція інтенсивності тривалості життя T має вигляд

$$\lambda(t|X;\lambda,\beta)=\lambda(t)\exp(\beta^T X), \quad t\ge 0. \tag{1}$$

Регресор X – це випадковий вектор в $\mathbb{R}^k$, β – параметр регресії із множини $\Theta_\beta\subset\mathbb{R}^k$, та $\lambda(\cdot)\in\Theta_\lambda\subset C[0,\tau]$ – це базова функція ризику (ми розгядаємо лише функції, зосереджені на $[0,\tau]$).

Замість тривалості життя T спостерігаються цензуровані значення – випадкові величини $Y:=\min\{T,C\}$, також спостерігається індикатор відсутності цензурування $\Delta:=I_{\{T\le C\}}$. Цензор C є випадковим і розподіленим на $[0,\tau]$. Функція виживання цензора, $G_C(u)=1-F_C(u)$, невідома, але відоме τ.

Умовна щільність T при заданому регресорі X задається рівністю

$$f_T(t|X,\lambda,\beta)=\lambda(t|X;\lambda,\beta)\exp\left(-\int_0^t\lambda(s|X;\lambda,\beta)ds\right).$$

Замість X спостерігається сурогатна змінна

$$W=X+U, \tag{2}$$

де випадкова похибка вимірювання U має відому генератрису моментів $M_U(s):=\mathsf{E}e^{s^TU}$, тут s належить деякому околу нуля. Пара (T,X), цензор C та похибка U стохастично незалежні.

Розглянемо незалежні копії моделі $(X_i,T_i,C_i,Y_i,\Delta_i,U_i,W_i),\ i=1,...,n$. За спостереженнями $(Y_i,\Delta_i,W_i),\ i=1,...,n$, оцінюємо параметри моделі β та $\lambda(t),\ t\in[0,\tau]$.

Згідно з роботою [1] ми використовуємо таку виправлену функцію правдоподібності:

$$Q_n^{cor}(\lambda,\beta) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(Y_i,\Delta_i,W_i;\lambda,\beta),$$

де

$$q(Y,\Delta,W;\lambda,\beta) := \Delta(\ln\lambda(Y)+\beta^T W) - \frac{\exp(\beta^T W)}{M_U(\beta)}\int_0^Y \lambda(u)du.$$

У [1] припускається, що базова функція ризику $\lambda(\cdot)$ належить до скінченновимірної параметричної множини; ми ж розглядаємо $\lambda(\cdot)$ із деякої замкненої опуклої множини невід'ємних неперервних функцій на $[0,\tau]$.

У [5] отримано консистентність сумісної оцінки для $\lambda(\cdot)$ та β у випадку обмеженої параметричної множини; асимптотичну нормальність оцінки доведено в [4]. Випадок, коли параметрична множина Θ_λ є необмеженою та не відділена від 0, розглянуто в [6]: там отримано консистентність та асимптотичну нормальність сумісної оцінки. Довірчі області для оцінки із [6] побудовані в [3]. У цій роботі для моделі (1)–(2) ми будуємо критерій згоди на основі оцінок із [6] та знаходимо його потужність.

Стаття має таку структуру. У розділі 2 вводиться консистентна оцінка із [6]. У розділі 3 описано процедуру побудову критерію згоди, а в розділі 4 досліджено його потужність. Розділ 5 містить висновки.

2. Оцінювання

Накладемо умови на параметричну множину.

(i) $\Theta_\lambda := \left\{f\colon [0,\tau]\to\mathbb{R} \,\middle|\, f(t)\ge 0, \forall t\in[0,\tau] \text{ та } |f(t)-f(s)|\le L|t-s|, \forall t,s\in[0,\tau]\right\}$, де $L>0$ – фіксована стала.

(ii) $\Theta_\beta \subset \mathbb{R}^m$ – компактна множина.

(iii) $\mathsf{E}U=0$ та для деякого $\epsilon>0$ виконується

$$\mathsf{E}e^{D\|U\|}<\infty, \text{ де } D:=\max_{\beta\in\Theta_\beta}\|\beta\|+\epsilon.$$

(iv) $\mathsf{E}e^{D\|X\|}<\infty$, де число D визначене в (iii).

(v) τ – правий кінець розподілу C, тобто $\mathsf{P}(C>\tau)=0$ та $\mathsf{P}(C>\tau-\epsilon)>0$ для всіх $\epsilon>0$.

(vi) Коваріаційна матриця випадкового вектора X додатно визначена.

(vii) Істинне значення (λ,β) параметрів моделі належить $\Theta:=\Theta_\lambda\times\Theta_\beta$, причому

$$\lambda(t)>0, \quad t\in[0,\tau].$$

Означення 1. *Нехай $\{\varepsilon_n\}$ фіксована послідовність додатних чисел така, що $\varepsilon_n\downarrow 0$, $n\to\infty$. Будь-яку борельову функцію від спостережень (Y_i,Δ_i,W_i), $i=1,...,n$, зі значеннями в Θ, що задовольняє наступну нерівність*

$$Q_n^{cor}\left(\hat\lambda_n,\hat\beta_n\right) \ge \sup_{(\lambda,\beta)\in\Theta} Q_n^{cor}(\lambda,\beta)-\varepsilon_n, \tag{3}$$

будемо називати виправленою оцінкою $\left(\hat\lambda_n,\hat\beta_n\right)$ для (λ,β).

У [6] показано строгу консистентність виправлених оцінок.

Теорема 1 [6]. *За умов (i)–(vii) пара $\left(\hat\lambda_n,\hat\beta_n\right)$ є строго консистентною оцінкою істинних значень (λ,β), тобто*

$$\max_{t\in[0,\tau]}|\hat\lambda_n(t)-\lambda(t)|\to 0, \qquad \hat\beta_n\to\beta \tag{4}$$

майже напевно при $n \to \infty$.

3. Критерій згоди

Нехай цензор C має довільний розподіл μ_C на $(0, \tau]$ та виконується умова (v). Пара (Y, Δ) розподілена на $\mathcal{X} := (0, \tau] \times \{0, 1\}$. Міра $\mu = \lambda_1 \times \delta_1 + \mu_C \times \delta_0$ на $\mathcal{X}$ задається рівностями $\mu(A \times \{1\}) = \lambda_1(A)$ та $\mu(A \times \{0\}) = \mu_C(A)$, для всіх борельових множин $A \subseteq (0, \tau]$. Щільність C відносно μ_C така: $f_C(y) \equiv 1$, сумісна щільність (Y, Δ) відносно μ:

$$f(y, \delta | X; \lambda, \beta) = f_T^{\delta}(y|X; \lambda, \beta) G_T^{1-\delta}(y|X; \lambda, \beta) G_C^{\delta}(y), \quad (y, \delta) \in \mathcal{X}. \tag{5}$$

Доведення рівності (5) представлене в [5]. Там показано, що

$$\int_{A \times \{0\}} f(y, \delta | X; \lambda, \beta)\, d\mu(y, \delta) = \mathsf{P}(Y \in A, \Delta = 0),$$

$$\int_{A \times \{1\}} f(y, \delta | X; \lambda, \beta)\, d\mu(y, \delta) = \mathsf{P}(Y \in A, \Delta = 1).$$

Із (5) отримуємо

$$\ln f(y, \delta | X; \lambda, \beta) = \delta \ln f_T(y|X; \lambda, \beta) + (1 - \delta) \ln G_T(y|X; \lambda, \beta) + \delta \ln G_C(y) =$$

$$= \delta(\ln \lambda(y) + \beta^\top X) - \exp(\beta^\top X) \int_0^y \lambda(u) du + \delta \ln G_C(y).$$

У випадку, коли X спостерігається без похибок вимірювання, оціночна функція

$$s_0(y, \delta, X) := \frac{\partial \ln f(y, \delta | X)}{\partial \beta} = X\delta - X \exp(\beta^\top X) \int_0^y \lambda(u) du$$

є умовно незсуненою при фіксованому X:

$$\mathsf{E}[s_0(Y, \Delta, X) | X] = 0. \tag{6}$$

Тоді $s_1(Y, \Delta, X) := s_0(Y, \Delta, X) \exp(a^\top X)$, $a \in \mathbb{R}^k$, теж є умовно незсуненою при фіксованому X. Параметр a буде використаний при дослідженні потужності тесту.

За наявності похибок вимірювання, побудуємо нову оціночну функцію $s(Y, \Delta, X)$, таку що

$$\mathsf{E}[s(Y, \Delta, W) | X] = s_1(Y, \Delta, X).$$

Для цього треба розв'язати задачу деконволюції

$$\mathsf{E}[g(W, \beta) | X] = X \exp(\beta^\top X).$$

Її розв'язком є функція

$$g(W, \beta) = \frac{W M_U(\beta) - \mathsf{E}[U e^{\beta^\top U}]}{M_U^2(\beta)} e^{\beta^\top W}.$$

Отже, на роль оціночної функції можна обрати

$$s(Y, \Delta, W) = \Delta \cdot g(W, a) - g(W, \beta + a) \int_0^Y \lambda(u) du.$$

Вона буде незсуненою, бо $s_1(Y, \Delta, X)$ була незсуненою.

Якщо похибки вимірювання мають стандартний нормальний розподіл, то $M_U(\beta) = \exp(\frac{1}{2}||\beta||^2)$ та

$$g(W, \beta) = (W - \beta) \exp\left(-\frac{1}{2}||\beta||^2 + \beta^\top W\right).$$

Перевіряємо нульову гіпотезу

H$_0$: "спостереження описуються моделлю (1)–(2) (з відповідними припущеннями)"проти альтернативи

$\mathbf{H}_1$: "спостереження не описуються моделлю (1)–(2)".

Для побудови тесту розбиваємо спостереження на навчальну і тестову вибірки. Перша використовується для побудови оцінок, друга – власне для побудови тестової статистики. За спостереженнями (Y_i, W_i, Δ_i), $1 \le i \le m$, будуємо навчальну вибірку таким чином. Зафіксуємо $0 < \varepsilon < \tau$, нехай $C^* = \min\{C, \tau - \varepsilon\}$ – новий цензор, Y^* та Δ^* – цензурована тривалість життя та індикатор відсутності цензурування відповідно. За спостереженнями $(Y_1^*, W_1, \Delta_1^*), \ldots, (Y_m^*, W_m, \Delta_m^*)$ будуємо оцінки $\hat{\beta}_m$, $\hat{\lambda}_m(\cdot)$, які задаються згідно з означенням 1. Інтервал стостережень звужений, щоб забезпечити виконання леми 2. Припустимо, що ми маємо ще n незалежних спостережень (тестову вибірку) у моделі (1)–(2) (зі старим розподілом цензора C), які є незалежні в сукупності з навчальною вибіркою. Побудуємо тестову статистику

$$T_{n,m}^0 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s(Y_i, \Delta_i, W_i; \hat{\beta}_m, \hat{\lambda}_m). \tag{7}$$

Розкладемо s як лінійну функцію відносно λ:

$$s(Y, \Delta, W; \hat{\beta}_m, \hat{\lambda}_m) = s(Y, \Delta, W; \hat{\beta}_m, \lambda) - g(W, \hat{\beta}_m + a) \int_0^Y (\hat{\lambda}_m - \lambda)(u) du.$$

Нехай

$$G(W) = \max_{\beta \in conv(\Theta_\beta)} \left\| \frac{\partial g}{\partial \beta}(W, \beta + a) \right\|,$$

де *conv* позначає опуклу оболонку множини. Застосуємо до векторнозначних функцій теорему про скінченні прирости [2]:

$$\begin{aligned}
&s(Y, \Delta, W; \hat{\beta}_m, \lambda) = s(Y, \Delta, W; \beta, \lambda) + r_1, \\
&g(W, \hat{\beta}_m + a) = g(W, \beta + a) + r_2, \\
&\|r_1\| \le \max_{\beta \in conv(\Theta_\beta)} \left\| \frac{\partial s}{\partial \beta} \right\| \cdot \|\hat{\beta}_m - \beta\| = G(W) \cdot \|\lambda\| \cdot \|\hat{\beta}_m - \beta\|, \\
&\|r_2\| \le G(W) \cdot \|\hat{\beta}_m - \beta\|.
\end{aligned}$$

Ми врахували рівність

$$\frac{\partial s}{\partial \beta}(\lambda, \beta) = -\frac{\partial g}{\partial \beta}(W, \beta + a) \int_0^Y \lambda(u) du.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
s(Y, \Delta, X; \hat{\beta}_m, \hat{\lambda}_m) = s(Y, \Delta, X; \beta, \lambda) - g(W, \beta + a) \int_0^Y (\hat{\lambda}_m - \lambda)(u) du \, + \\
+ r_1(Y, \Delta, W, \beta, \hat{\beta}_m, \lambda) - r_2(W, \beta, \hat{\beta}_m) \int_0^Y (\hat{\lambda}_m - \lambda)(u) du.
\end{aligned}$$

Маємо

$$\sqrt{n} T_{n,m}^0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} s(Y_i, \Delta_i, W_i; \beta, \lambda) - R_1 + R_2 \ ,$$

$$R_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(W_i, \beta + a) \sqrt{n} \int_0^{Y_i} (\hat{\lambda}_m - \lambda)(u) du,$$

$$R_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n} \cdot r_1(Y_i, \Delta_i, W_i, \beta, \hat{\beta}_m, \lambda) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n} \cdot r_2(W_i, \beta, \hat{\beta}_m) \int_0^{Y_i} (\hat{\lambda}_m - \lambda)(u) du.$$

Лема 1. *За умов (i)–(vii)*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} s(Y_i, \Delta_i, W_i; \beta, \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

причому $\Sigma = \Sigma(\beta, \lambda) = \mathsf{Cov}\ s(Y, \Delta, X; \beta, \lambda)$ *– додатно визначена матриця.*

Доведення. Маємо

$$\mathsf{Cov}\ s(Y, \Delta, X; \beta, \lambda) = \mathsf{E}\ s(Y, \Delta, X; \beta, \lambda) s^\top (Y, \Delta, X; \beta, \lambda).$$

Додатну визначеність Σ доводимо від супротивного. Припустимо, що існує $z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$ таке, що

$$z^\top \Sigma z = 0.$$

Тоді

$$\Delta \cdot z^\top g(W, a) - z^\top g(W, \beta + a) \int_0^Y \lambda(u) du = 0 \quad \text{м. н.}$$

Помножимо ліву і праву частину на $I(\Delta = 0)$:

$$I(\Delta = 0) \cdot z^\top g(W, \beta + a) \int_0^C \lambda(u) du = 0 \quad \text{м. н.}$$

Оскільки базова функція ризику додатна, то

$$I(\Delta = 0) \cdot z^\top g(W, \beta + a) = 0 \quad \text{м. н.}$$

Візьмемо математичне сподівання при фіксованих $X,\ T,\ C$:

$$\mathsf{E}[\ I(\Delta = 0) \cdot z^\top g(W, \beta + a) \mid X, T, C\ ] = 0,$$

$$I(\Delta = 0) \cdot z^\top X e^{(\beta + a)^\top U} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Це рівносильно співвідношенню

$$I(\Delta = 0) \cdot z^\top X = 0 \quad \text{м. н.}$$

Узявши математичне сподівання при фіксованих X, отримуємо

$$\mathsf{P}(\Delta = 0 \mid X) z^\top X = 0 \quad \text{м. н.}$$

Звідси $z^\top X = 0$ м. н., оскільки $\mathsf{P}(\Delta = 0 \mid X) > 0$ м. н. Тоді

$$\mathsf{D}(z^\top X) = z^\top \mathrm{Cov}(X) z = 0.$$

Оскільки $\mathrm{Cov}(X) > 0$ отримали суперечність. Отже, матриця Σ додатно визначена.

Оціночна функція $s(Y, \Delta, W; \beta, \lambda)$ є незсуненою, тому застосувавши центральну граничну теорему, отримуємо твердження леми. □

Теорема 2 теорема 5 із [4]. *Нехай виконуються умови (i)–(vi). Тоді*

$$\sqrt[4]{m} \cdot ||\hat{\beta}_m - \beta|| = O_p(1),$$
$$\sqrt{m} \int_0^\tau \Big(\hat{\lambda}_m(u) - \lambda(u) \Big)^2 du = O_p(1).$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови (i)–(vii), причому* $n, m \to \infty$, $n^2 m^{-1} \to 0$. *Тоді при виконанні гіпотези* $\boldsymbol{H}_0$

$$\sqrt{n} T_{n,m}^0 \xrightarrow{d} N(0, \Sigma).$$

Доведення. Із попередньої теореми випливає, що

$$||\hat{\beta}_m - \beta|| = \frac{O_p(1)}{\sqrt[4]{m}}\ , \quad \int_0^{\tau-\varepsilon}\Big(\hat{\lambda}_m(u) - \lambda(u)\Big)^2 du = \frac{O_p(1)}{\sqrt{m}}\ . \tag{8}$$

Справедливі такі нерівності:

$$||R_1|| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||g(W_i, \beta + a)|| \cdot \sqrt{n}\int_0^{\tau-\varepsilon}|\hat{\lambda}_m(u) - \lambda(u)|du \le$$
$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||g(W_i, \beta + a)|| \cdot \sqrt{n}\bigg(\int_0^{\tau-\varepsilon}|\hat{\lambda}_m(u) - \lambda(u)|^2 du\bigg)^{1/2},$$
$$||R_2|| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}G(W_i) \cdot \|\lambda\| \cdot \sqrt[4]{\frac{n^2}{m}} \cdot \sqrt[4]{m} \cdot ||\hat{\beta} - \beta|| +$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}G(W_i) \cdot \sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}\bigg(\sqrt{m}\int_0^{\tau-\varepsilon}|\hat{\lambda}_m(u) - \lambda(u)|^2 du\bigg)^{1/2}.$$

За посиленим законом великих чисел вирази $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|g(W_i, \beta + a)\|$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}G(W_i)$ збігаються майже напевно до $\mathsf{E}\|g(W, \beta + a)\|$ та $\mathsf{E}\,G(W)$ відповідно при $n \to \infty$. Тому вони обмежені за ймовірністю. Враховуючи (8) отримуємо, що R_1 та R_2 збігаються до 0 за ймовірністю. Далі, використовуючи лему Слуцького, маємо $\sqrt{n}T^0_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{d}}$ $\xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \Sigma)$. □

Зауважимо, що умови на n та m із леми 2 фактично означають таке: на побудову оцінок витрачається значно більше спостережень, ніж на побудову тестової статистики. Оскільки $\Big(\hat{\lambda}_m, \hat{\beta}_m\Big)$ – строго консистентна оцінка параметрів (λ, β), а Σ – неперервна матричнозначна функція від цих параметрів, то $\hat{\Sigma} := \Sigma\Big(\hat{\lambda}_m, \hat{\beta}_m\Big)$ – строго консистентна оцінка асимптотичної коваріаційної матриці Σ. Зауважимо, що *зрештою* (тобто з імовірністю 1 для всіх $m \ge m_0(\omega)$) $\hat{\Sigma}$ – це додатно визначена матриця.

Для $n \ge 1$ та $\omega \in \Omega$ таких, що $\hat{\Sigma}(\omega)$ додатно визначена, означимо тестову статистику

$$T^2_{n,m} = n||\hat{\Sigma}^{-1/2}T^0_{n,m}||^2, \tag{9}$$

для тих $\omega \in \Omega$, що $\hat{\Sigma}(\omega)$ не є додатно визначеною, покладемо $T^2_{n,m} = 0$.

Теорема 3 є наслідком леми 2.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (i) – (vii). При виконанні гіпотези* $\boldsymbol{H}_0$ *маємо* $T^2_{n,m} \xrightarrow{d} \chi^2_k$ *при* $n, m \to \infty$, $n^2 m^{-1} \to 0$.

Теорема 3 дозволяє побудувати тест для перевірки $\mathbf{H}_0$. Нехай задано рівень довіри α, $0 < \alpha < 1/2$, $\chi^2_{k\alpha}$ – верхній квантиль розподілу χ^2_k, тобто $\mathsf{P}(\chi^2_k > \chi^2_{k\alpha}) = \alpha$. Критерій згоди будуємо таким чином: якщо $T^2_{n,m} \le \chi^2_{k\alpha}$, то не відхиляємо $\mathbf{H}_0$; інакше ми відхиляємо нульову гіпотезу.

4. Потужність тесту

Розглянемо послідовність локальних альтернатив $\mathbf{H}_{1,n}$, які полягають у такому: у навчальній вибірці немає збурення, але $(\lambda(\cdot), \beta)$ можуть бути не такими, як за гіпотези $\mathbf{H}_0$, крім цього, інтенсивність у додатковій вибірці є збуреною, тобто

$$\lambda(t|X; \lambda, \beta) = \lambda(t)\exp\bigg(\beta^\top X + \frac{h(X)}{\sqrt{n}}\bigg), \quad t \ge 0.$$

Тут борельова функція $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ задає нелійнійне відносно X збурення та задовольняє таку умову:

(viii) $|h(u)| \le c_1 + c_2 \cdot ||u||$ для всіх $u \in \mathbb{R}^k$, де c_1 та c_2 – деякі додатні сталі.

За $\mathbf{H}_{1,n}$ розподіли (Y_i, Δ_i) залежать від n, тобто маємо послідовність серій (Y_{in}, Δ_{in}), $1 \le i \le n$. Пари величин усередині кожної серії незалежні та однаково розподілені.

Розглянемо умови:

(ix) $\|a\| < \epsilon$, де ϵ визначається в умові (iii);

(x) $\mathsf{E}e^{2D\|X\|} < \infty$, $\quad \mathsf{E}e^{2D\|U\|} < \infty$, $\quad D$ задано в умові (iii).

Лема 3. *Нехай виконуються умови (i)–(ix). Тоді за локальних альтернатив $\boldsymbol{H}_{1,n}$ при $n \to \infty$:*

(a) $\sqrt{n}\ \mathsf{E}_{H_{1,n}}[s(Y,\Delta,W)] \to \mathsf{E}\Big[Xe^{a^\top X}h(X)\int_0^\tau f_T(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy\Big]$;

(b) за додаткової умови (x), коваріаційна матриця випадкового вектора $s(Y,\Delta,W)$ збігається до Σ – матриці з леми 2.

Доведення. (a) За $\mathbf{H}_{1,n}$ маємо

$$\exp(\beta^\top X)\lambda(u) = \frac{f_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)}{G_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)}\exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right), \quad u \in [0,\tau];$$

$$f_{T_{1,n}}(u|X,\lambda,\beta) = \lambda(u)\exp\left(\beta^\top X + \frac{h(X)}{\sqrt{n}} - e^{\beta^\top X + \frac{h(X)}{\sqrt{n}}}\int_0^u \lambda(s)ds\right).$$

Далі,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s_0(Y,\Delta,X)|X] &= X\left[\int_0^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy - \right.\\
&- \exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right)\int_0^\tau\int_0^y \frac{f_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)}{G_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)} f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dudy-\\
&\left.- \exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right)\int_0^\tau\int_0^y \frac{f_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)}{G_{T_{1,n}}(u|X;\lambda,\beta)} G_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)dud\mu_C(y)\right] =\\
&= X\left(1-\exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right)\right)\int_0^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy.
\end{aligned}$$

Остання рівність отримується заміною порядку інтегрування з урахуванням того, що

$$\begin{aligned}
&\int_u^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy + \int_u^\tau G_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)d\mu_C(y) =\\
&= \mathsf{P}(Y_{T_{1,n}} \in [u,\tau], \Delta_{T_{1,n}} = 1) + \mathsf{P}(Y_{T_{1,n}} \in [u,\tau], \Delta_{T_{1,n}} = 0) =\\
&= \mathsf{P}(Y_{T_{1,n}} \in [u,\tau]) = G_{T_{1,n}}(u)G_C(u).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s_1(Y,\Delta,X)|X] = Xe^{a^\top X}\left(1-\exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right)\right)\int_0^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy.$$

Звідси

$$\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s(Y,\Delta,W)] = \mathsf{E}\left[Xe^{a^\top X}\left(1-\exp\left(-\frac{h(X)}{\sqrt{n}}\right)\right)\int_0^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy\right].$$

За теоремою Лагранжа

$$|1-e^v| \le |v|\cdot e^v \le |v|\cdot e^{|v|}.$$

Тому при $n \geq n_0$

$$\sqrt{n}\mathsf{E}_{H_{1,n}}||s(Y,\Delta,W)|| \leq \mathsf{E}\left[||X||e^{a^\top X+\frac{|h(X)|}{\sqrt{n}}}|h(X)|\int_0^\tau f_{T_{1,n}}(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy\right] \leq$$
$$\leq c_3\cdot\mathsf{E}\left[||X||\exp\left(\frac{c_2||X||}{\sqrt{n_0}}+||a||\cdot||X||\right)\right]+c_4\cdot\mathsf{E}\left[||X||^2\exp\left(\frac{c_2||X||}{\sqrt{n_0}}+||a||\cdot||X||\right)\right],$$

де c_3 та c_4 – деякі додатні сталі. Скінченність останнього виразу випливає з (iv) та (ix). Далі, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\sqrt{n}\ \mathsf{E}_{H_{1,n}}[s(Y,\Delta,W)] \to \mathsf{E}\left[Xe^{a^\top X}h(X)\int_0^\tau f_T(y|X;\lambda,\beta)G_C(y)dy\right] =: K. \tag{10}$$

(b) Покажемо, що

$$\|\mathsf{E}_{H_{1,n}}\big[s(Y,\Delta,W)s^\top(Y,\Delta,W)|X\big]-\mathsf{E}\big[s(Y,\Delta,W)s^\top(Y,\Delta,W)|X\big]\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Справді,

$$\|\mathsf{E}_{H_{1,n}}\big[s(Y,\Delta,W)s^\top(Y,\Delta,W)|X\big]-\mathsf{E}\big[s(Y,\Delta,W)s^\top(Y,\Delta,W)|X\big]\|\leq$$
$$\leq \mathsf{E}\|g(W,a)g^\top(W,a)\|\int_0^\tau|f_{T_{1,n}}(y|X)-f_T(y|X)|G_C(y)dy+$$
$$+2\mathsf{E}\|g(W,\beta+a)g^\top(W,a)\|\int_0^\tau\int_0^y|f_{T_{1,n}}(y|X)-f_T(y|X)|\lambda(u)G_C(y)dudy+$$
$$+\mathsf{E}\|g(W,\beta+a)g^\top(W,\beta+a)\|\int_0^\tau\left(\int_0^y\lambda(u)du\right)^2|f_{T_{1,n}}(y|X)-f_T(y|X)|G_C(y)dy+$$
$$+\mathsf{E}\|g(W,\beta+a)g^\top(W,\beta+a)\|\int_0^\tau\left(\int_0^y\lambda(u)du\right)^2|G_{T_{1,n}}(y|X)-G_T(y|X)|d\mu_C(y)\to 0,$$

при $n\to\infty$, якщо $\mathsf{E}\|g(W,\beta+a)g^\top(W,\beta+a)\|<\infty$, що виконується за умов (ix)–(x).

Оскільки

$$\mathsf{Cov}S_{H_{1,n}}(Y,\Delta,W)=\mathsf{E}_{H_{1,n}}s(Y,\Delta,W)s^\top(Y,\Delta,W)-$$
$$-\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s(Y,\Delta,W)]\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s^\top(Y,\Delta,W)]$$

та $\mathsf{E}_{H_{1,n}}[s(Y,\Delta,W)]\to 0$ за доведеним у пункті (a), то

$$\mathsf{Cov}s_{H_{1,n}}(Y,\Delta,W)\to\Sigma,$$

коли $n\to\infty$. □

Лема 4. *Нехай виконуються умови (i)–(x). Тоді за локальних альтернатив* $\boldsymbol{H}_{1,n}$ *при* $n,m\to\infty,\ n^2m^{-1}\to 0$,

$$\sqrt{n}T^0_{n,m}\xrightarrow{d}N(K,\Sigma),$$

де K визначене в (10), *Σ – матриця з леми 2.*

Доведення. Застосуємо центральну граничну теорему Ляпунова для схеми серій. Покажемо, що при достатньо малому додатному δ моменти $\mathsf{E}\|s(Y_{in},\Delta_{in},W)\|^{2+\delta}$ обмежені. Скористаємося нерівністю Мінковського:

$$\left(\mathsf{E}\|s(Y_{in},\Delta_{in},W_i)\|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}}\leq\left(\mathsf{E}\|g(W_i,a)\|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}}+$$
$$+\left(\mathsf{E}\|g(W_i,\beta+a)\|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(\int_0^{Y_{in}}\lambda(u)du\right)^{2+\delta}|X\right]\right)^{\frac{1}{2+\delta}}\leq$$
$$\leq\left(\mathsf{E}\|g(W_i,a)\|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}}+\left(\mathsf{E}\|g(W_i,\beta+a)\|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}}\left(\int_0^\tau\left(\int_0^y\lambda(u)du\right)^{2+\delta}dy\right)^{\frac{1}{2+\delta}}.$$

Умова (ix) гарантує скінченність $\mathsf{E}\|g(W_i, \beta + a)\|^{2+\delta}$, якщо $\|a\|$ та δ достаньо маленькі. $\square$

Означення 2. *Для $k \geq 1$ та $\mu \geq 0$, $\chi_k^2(\mu)$ називається нецентральним χ^2-розподілом із k ступенями вільності та параметром нецентральності μ, якщо $\chi_k^2(\mu) \overset{d}{=} \overset{d}{=} (\gamma_1 + \tau)^2 + \sum_{i=2}^n \gamma_i^2$, де $\{\gamma_i\}$ – незалежні однаково розподілені стандартні нормальні випадкові величини.*

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (i)–(x). Тоді за локальних альтернатив $\boldsymbol{H}_{1,n}$ при $n, m \to \infty$, $n^2 m^{-1} \to 0$,*

$$T_{n,m}^2 \xrightarrow{d} \chi_k^2(\mu), \quad \mu := \|\Sigma^{-1/2} K\|,$$

де K визначене в (10).

Теорема 4 дозволяє знайти асимптотичну потужність тесту за локальних альтернатив $\mathbf{H}_{1,n}$. Чим більше μ, тим потужніший тест.

Зауважимо, що при заданому ненульовому збуренні h бажано підібрати параметр критерію a так, щоб параметр нецентральності був відмінний від 0. Це гарантовано можна зробити у випадку, коли $h(X) \geq 0$ м. н. та $h(X) > 0$ з додатною ймовірністю; таке збурення збільшує тривалість життя, підвищуючи функцію інтенсивності (існування a випливає з нерівності $K'(0) \neq 0$). Аналогічно це гарантовано можна зробити тоді, коли $h(X) \leq 0$ м. н. та $h(X) < 0$ із додатною ймовірністю (при цьому функція інтенсивності зменшується).

Розглянемо випадок гауссівського регресора $X \sim N(m, \Sigma_X)$ у моделі (1)–(2), із невідомими параметрами розподілу та невиродженою коваріаційною матрицею $m \cdot m^\top + \Sigma_X$. Тоді умову (viii) можна замінити на слабшу:

(viii*) $|h(u)| \leq c_1 + c_2 \cdot ||u||^2$ для всіх $u \in \mathbb{R}^k$, де c_1 та c_2 – деякі додатні сталі.

Зауважимо, що в цьому випадку можна повторити доведення леми 3. Зокрема, завдяки умові (viii*) при $n \geq n_0$ (тут n_0 достатньо велике) виконується

$$\sqrt{n}\mathsf{E}_{H_{1,n}}||s(Y, \Delta, W)|| \leq c_3 \cdot \mathsf{E}\left[||X|| \exp\left(\frac{c_2||X||^2}{\sqrt{n_0}} + ||a|| \cdot ||X||\right)\right] + \\ + c_4 \cdot \mathsf{E}\left[||X||^2 \exp\left(\frac{c_2||X||^2}{\sqrt{n_0}} + ||a|| \cdot ||X||\right)\right] < \infty,$$

де c_3 та c_4 – додатні сталі.

Лема 4 і теорема 4 також залишаються справедливими при заміні умови (viii) на (viii*) у випадку нормального розподілу X.

5. Висновки

Побудовано критерій згоди на основі строго консистентної сумісної оцінки параметрів моделі з роботи [6]. За нульової гіпотези тестова статистика має асимптотичний χ^2-розподіл. Знайдено потужність критерію за відповідних локальних альтернатив. Недоліком запропонованої процедури є надто великий обсяг навчальної вибірки. У подальших дослідженнях ми будемо намагатись зменшити її обсяг, тобто послабити умову $n^2 m^{-1} \to 0$ із теореми 3.

Список літератури

1. T. Augustin, *An exact corrected log-likelihood function for Cox's proportional hazards model under measurement error and some extensions*, Scand. J. Stat., **31** (2004), no. 1, 43–50.
2. H. Cartan, *Differential Calculus*, Hermann/Houghton Mifflin Co., Paris/Boston, MA, 1971. (Translated from French)

3. O. Chernova, A. Kukush, *Confidence regions in Cox proportional hazards model with measurement errors and unbounded parameter set*, Mod. Stoch. Theory Appl., **5** (2018), no. 1, 37–52.
4. C. Chimisov and A. Kukush, *Asymptotic normality of corrected estimator in Cox proportional hazards model with measurement error*, Mod. Stoch. Theory Appl., **1** (2014), no. 1, 13–32.
5. A. Kukush, S. Baran, I. Fazekas, and E. Usoltseva, *Simultaneous estimation of baseline hazard rate and regression parameters in Cox proportional hazards model with measurement error*, J. Statist. Res., **45** (2011), no. 2, 77–94.
6. О. Г. Кукуш, О. О. Чернова, *Консистентне оцінювання в моделі Кокса із пропорційними ризиками та похибками вимірювання за умови необмеженості параметричної множини.* Теор. ймовір. та мат. статист., **96** (2017), 100–109.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, м. Київ, Україна, 03127

Адреса електронної пошти: alexander_kukush@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, м. Київ, Україна, 03127

Адреса електронної пошти: chernovaoksan@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 31.07.2018

GOODNESS-OF-FIT TEST IN COX PROPORTIONAL HAZARDS MODEL WITH MEASUREMENT ERRORS

A. G. KUKUSH, O. O. CHERNOVA

Abstract. Cox proportional hazards model with measurement errors is studied, in which baseline hazard rate $\lambda(\cdot)$ belongs to a parameter set consisting of nonnegative Lipschitz functions, with fixed constant, and regression parameter β belongs to a compact parameter set. Censored lifetime and regressors with additive errors are observed. We construct a goodness-of-fit test based of strongly consistent simultaneous estimator for $\lambda(\cdot)$ and β derived in parer of Kukush and Chernova (2017) [6]. The test statistic is asymptotically chi-squared under null hypothesis. The power of the test under local alternatives is evaluated.

КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ В МОДЕЛИ КОКСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ РИСКАМИ И ОШИБКАМИ ИЗМЕРЕНИЙ

А. Г. КУКУШ, О. А. ЧЕРНОВА

Аннотация. Исследуется модель Кокса с пропорциональными рисками и ошибками измерений, в которой базовая функция риска $\lambda(\cdot)$ принадлежит множеству, состоящему из неотрицательных функций, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, а векторный параметр регрессии β принадлежит компактному параметрическому множеству. Наблюдаются цензурированная продолжительность жизни и значения регрессора с аддитивной ошибкой. Построен критерий согласия на основе строго состоятельной совместной оценки для $\lambda(\cdot)$ и β из работы Кукуша и Черновой (2017 г.) [6]. При выполнении нулевой гипотезы тестовая статистика имеет асимптотическое хи-квадрат распределение. Найдена мощность критерия при локальных альтернативах.