Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 134–151

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 134–151

УДК 519.246

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ОЦІНОК МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ У ДРОБОВІЙ МОДЕЛІ ВАСІЧЕКА

С. С. ЛОГВІНЕНКО, К. В. РАЛЬЧЕНКО

Анотація. Розглянуто дробову модель Васічека вигляду $dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dB_t^H$, яка породжується дробовим броунівським рухом B^H з індексом Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Досліджено асимптотичний розподіл оцінки максимальної вірогідності (ОМВ) для векторного параметра (α, β) та доведено її асимптотичну нормальність у випадку $\beta > 0$. Показано, що оцінки параметрів α та β є асимптотично незалежними.

Ключові слова і фрази. Дробовий броунівський рух, дробова модель Васічека, оцінки максимальної вірогідності, генератриса моментів, асимптотичний розподіл.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60G22, 62F10, 62F12 .

1. Вступ

У 1977 році О. Васічек [37] запропонував математичну модель для відсоткової ставки, яка згодом стала називатися його ім'ям. Вона описувалася таким стохастичним диференціальним рівнянням

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dW_t,$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, а W — це стандартний вінерівський процес. Ця модель знайшла своє застосування в багатьох сферах науки, однак найчастіше вона використовується в економіці та фінансовій математиці, де її параметри мають таку інтерпретацію: β — параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, α/β — середній (довготерміновий) рівень процентної ставки, γ — параметр волатильності.

У даній роботі досліджується дробова модель Васічека вигляду

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dB_t^H, \tag{1.1}$$

де вінерівський процес W замінений дробовим броунівським рухом B^H. Вона стала корисною вже для ширшого кола задач із фінансової математики (див. [6–10, 14, 15, 34, 42]), гідрології, телекомунікаційних технологій та навіть обробки зображень, оскільки дозволяє моделювати процеси з довготерміновою залежністю («пам'яттю»).

У [28] вивчалися оцінки методу найменших квадратів та ергодичного типу для параметрів α та β. Було доведено їх строгу консистентність у випадку $\beta > 0$ та розглянуто дискретизацію оцінки ергодичного типу. У [29] запропоновано оцінки максимальної вірогідності (ОМВ) для параметрів α та β і встановлено їх консистентність та асимптотичну нормальність кожної з них окремо. У цій роботі буде доведено асимптотичну нормальність спільного розподілу ОМВ із [29] для векторного параметра (α, β), яка показала важливий результат — асимптотичну незалежність цих двох оцінок. Також буде сформульовано аналогічний результат у випадку іншої параметризації:

$$dY_t = \kappa(\mu - Y_t)dt + \sigma dB_t^H.$$

У такому вигляді дробова модель Васічека досліджувалася в [39–41], де було запропоновано оцінки методу найменших квадратів та ергодичного типу для параметрів

κ та μ і встановлено їх строгу консистентність та асимптотичні розподіли для довільних значень κ.

Варто відзначити, що у випадку $\alpha = 0$ модель (1.1) є дробовим процесом Орнштейна – Уленбека, оцінювання параметра зсуву β якого вивчалося в багатьох роботах, зокрема [2, 16, 19, 20, 33, 35, 36].

Більш загальні задачі оцінювання параметрів у моделях, породжених дробовим броунівським рухом, розглядалися у [12, 23, 26, 30, 31].

Дана робота побудована таким чином. У розділі 2 наведено формальний опис моделі, що розглядається, та необхідні позначення. Розділ 3 присвячений обчисленню спільної генератриси моментів чотирьох допоміжних статистик. У розділі 4 досліджується асимптотична поведінка ОМВ. Результати у випадку альтернативної параметризації містяться в розділі 5. У розділі 6 зібрано необхідні факти і доведено допоміжні результати для модифікованої функції Бесселя першого роду, яка виникає у виразах для генератрис моментів.

2. Опис моделі

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}, \mathsf{P})$ — повний імовірнісний простір з фільтрацією. Нехай $B^H = \{B_t^H,\ t \ge 0\}$ — дробовий броунівський рух на цьому просторі, тобто, центрований гауссів процес із коваріаційною функцією

$$\mathsf{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

У подальшому будемо розглядати неперервну модифікацію B^H, яка існує за теоремою Колмогорова.

Надалі припускається, що $H \in (1/2, 1)$. У цьому випадку дробовий броунівський рух має властивість довготермінової залежності, важливу з точки зору застосувань. Зауважимо, що через нерегулярність траєкторій випадок короткотермінової залежності $H \in (0, 1/2)$ потребує інших методів дослідження й оцінювання та не розглядається в цій роботі.

Досліджується дробова модель Васічека, яка описується таким стохастичним диференціальним рівнянням:

$$X_t = x_0 + \int_0^t (\alpha - \beta X_s)\,ds + \gamma B_t^H, \quad t \ge 0. \tag{2.1}$$

Задача полягає в оцінюванні параметрів $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\beta > 0$ за неперервними спостереженнями траєкторії процесу X на інтервалі $[0, T]$. Припускається, що параметри $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ та $H \in (1/2, 1)$ відомі. Зауважимо, що оцінюванню параметра H у стохастичних диференціальних рівняннях із дробовим броунівським рухом присвячено багато робіт. Більш детальну інформацію можна знайти, зокрема, у книгах [3, 23] та статтях [4, 17, 21, 22, 24, 43]. Параметр γ можна оцінити точно за допомогою квадратичних варіацій, див. зауваження 2.1 нижче, щодо інших методів див. книгу [3].

Рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, що задається

$$X_t = x_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,dB_s^H, \quad t \ge 0, \tag{2.2}$$

де $\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,dB_s^H$ — потраєкторний інтеграл Рімана – Стілтьєса. Він існує за [5, твердження A.1].

Аналогічно до [18], для $0 < s < t \le T$ визначимо

$$\kappa_H = 2H\Gamma(3/2 - H)\Gamma(H + 1/2), \qquad \lambda_H = \frac{2H\Gamma(3 - 2H)\Gamma(H + 1/2)}{\Gamma(3/2 - H)},$$

$$k_H(t,s) = \kappa_H^{-1} s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}, \qquad w_t^H = \lambda_H^{-1} t^{2-2H}.$$

Крім того, уведемо три випадкові процеси:

$$P_H(t) = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dw_t^H}\int_0^t k_H(t,s)X_s\,ds,$$
$$Q_H(t) = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dw_t^H}\int_0^t k_H(t,s)(\alpha-\beta X_s)\,ds,$$
$$S_t = \frac{1}{\gamma}\int_0^t k_H(t,s)\,dX_s.$$

Зауважимо, що за [29, лема 4.1] маємо

$$Q_H(t) = \frac{\alpha}{\gamma} - \beta P_H(t). \tag{2.3}$$

Процес S називається фундаментальним семімартингалом та має такі властивості [18, теорема 1]:

(1) процес S є $(\mathfrak{F}_t)$-семімартингалом із розкладом

$$S_t = \int_0^t Q_H(s)\,dw_s^H + M_t^H, \tag{2.4}$$

де $M_t^H = \int_0^t k_H(t,s)\,dB_s^H$ — гауссівський мартингал із квадратичною варіацією $\langle M^H\rangle = w^H$;

(2) процес X допускає зображення

$$X_t = \int_0^t K_H(t,s)\,dS_s, \tag{2.5}$$

де

$$K_H(t,s) = \gamma H(2H-1)\int_s^t r^{H-1/2}(r-s)^{H-3/2}\,dr;$$

(3) натуральні фільтрації процесів S та X збігаються.

Зауваження 2.1. Позначимо $Z_t = \int_0^t k_H(t,s)\,dX_s = \gamma S_t$. Із (2.4) випливає, що квадратична варіація Z на $[0,t]$ є такою:

$$\langle Z\rangle_t = \gamma^2 w_t^H \quad \text{м. н.}$$

Звідси параметр γ можна оцінити за допомогою такої границі:

$$\left(w_t^H\right)^{-1}\lim_n \sum_i \left(Z_{t_{i+1}^{(n)}} - Z_{t_i^{(n)}}\right)^2 = \gamma^2 \quad \text{м. н.},$$

де $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ — розбиття відрізка $[0,t]$, таке що $\sup_i \left|t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right| \to 0$ при $n\to\infty$.

Застосовуючи аналог формули Гірсанова для дробового броунівського руху ([18, теорема 3], див. також [20]), отримуємо таке відношення вірогідностей:

$$\begin{aligned}\Lambda_H(T) &= \exp\left\{\int_0^T Q_H(t)\,dS_t - \frac{1}{2}\int_0^T (Q_H(t))^2\,dw_t^H\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha}{\gamma}S_T - \beta\int_0^T P_H(t)\,dS_t - \frac{\alpha^2}{2\gamma^2}w_T^H + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\int_0^T P_H(t)\,dw_t^H - \frac{\beta^2}{2}\int_0^T (P_H(t))^2\,dw_t^H\right\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

ОМВ параметрів α та β максимізують (2.6) та мають вигляд [29]:

$$\widehat{\alpha}_T = \frac{S_T K_T - I_T J_T}{w_T^H K_T - J_T^2}\,\gamma, \qquad \widehat{\beta}_T = \frac{S_T J_T - w_T^H I_T}{w_T^H K_T - J_T^2}, \tag{2.7}$$

де

$$I_T = \int_0^T P_H(t)\,dS_t, \qquad J_T = \int_0^T P_H(t)\,dw_t^H, \qquad K_T = \int_0^T (P_H(t))^2\,dw_t^H.$$

3. Обчислення сумісного розподілу статистик S_T, I_T, J_T, K_T

3.1. **Допоміжний дробовий процес Орнштейна – Уленбека.** Перепишемо (2.2) у вигляді

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta t} + \gamma U_t, \quad t \ge 0, \tag{3.1}$$

де

$$U_t = \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,dB_s^H, \quad t \ge 0.$$

Тоді U — це дробовий процес Орнштейна – Уленбека, уведений у [5]. Він є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dU_t = -\beta U_t\,dt + dB_t^H, \quad U_0 = 0.$$

Оцінювання параметра β методом максимальної вірогідності процесу U вивчалось у статтях [19, 35]. Зокрема, із результатів [19] випливає наступне твердження.

Лема 3.1. *Позначимо $\widetilde{S}_t = \int_0^t k_H(t,s)\,dU_s$. Тоді $\left(\widetilde{S}_T, \int_0^T r^{2H-1}\,d\widetilde{S}_r\right)'$ — центрований нормальний вектор із коваріаційною матрицею*

$$R(T) = \begin{bmatrix} R^{11}(T) & R^{12}(T) \\ R^{12}(T) & R^{22}(T) \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

де

$$R^{11}(T) = \frac{\Gamma(H)\Gamma(1-H)}{2\lambda_H^*} T^{2-2H} e^{-\beta T} I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \tag{3.3}$$

$$R^{22}(T) = \frac{\Gamma(H)\Gamma(1-H)}{2\lambda_H^*} T^{2H} e^{-\beta T} I_{H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \tag{3.4}$$

$$R^{12}(T) = \frac{\Gamma(H)\Gamma(1-H)}{2\lambda_H^*} T e^{-\beta T} I_{H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) + \frac{1-e^{-\beta T}}{\beta\lambda_H^*}, \tag{3.5}$$

тут $\lambda_H^* = \lambda_H/(2-2H)$, $I_\nu(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду, див. розділ 6.

Доведення. Із [19, формула (5.9)] з урахуванням (6.2) випливає, що випадковий вектор $\left(\widetilde{S}_T, \int_0^T r^{2H-1}\,d\widetilde{S}_r\right)'$ є нормальним із нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$R(T) = \frac{1}{\lambda_H^*}\Psi_1^{-1}(T)\int_0^T \Psi_1(s) B_H(s) \Psi_1'(s)\,ds \left(\Psi_1^{-1}(T)\right)', \tag{3.6}$$

де

$$B_H(t) = \begin{bmatrix} t^{1-2H} & 1 \\ 1 & t^{2H-1} \end{bmatrix}, \qquad \Psi_1(t) = e^{\frac{\beta t}{2}} \begin{bmatrix} \psi_1^{11}(t) & \psi_1^{12}(t) \\ \psi_1^{21}(t) & \psi_1^{22}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\psi_1^{11}(t) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^H \Gamma(1-H) t^H I_{-H}\left(\frac{\beta t}{2}\right), \tag{3.8}$$

$$\psi_1^{12}(t) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^H \Gamma(1-H) t^{1-H} I_{1-H}\left(\frac{\beta t}{2}\right), \tag{3.9}$$

$$\psi_1^{21}(t) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^{1-H} \Gamma(H) t^{H} I_{H}\left(\frac{\beta t}{2}\right), \tag{3.10}$$

$$\psi_1^{22}(t) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^{1-H} \Gamma(H) t^{1-H} I_{H-1}\left(\frac{\beta t}{2}\right). \tag{3.11}$$

Елементи матриці Ψ_1 задовольняють співвідношення (див. [19, зауваження 5.1])

$$\psi_1^{11}\psi_1^{22} - \psi_1^{12}\psi_1^{21} \equiv 1. \tag{3.12}$$

Із доведення [19, лема 5.1] маємо

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{-\beta}{2}\int_0^T \Psi_1(s) B_H(s) \Psi_1'(s)\, ds = \\ &= \begin{bmatrix} -\Psi_1^{11}\Psi_1^{12} & \frac{1}{2}\left(1 - \Psi_1^{11}\Psi_1^{22} - \Psi_1^{12}\Psi_1^{21}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \Psi_1^{11}\Psi_1^{22} - \Psi_1^{12}\Psi_1^{21}\right) & -\Psi_1^{22}\Psi_1^{21} \end{bmatrix}(T), \end{aligned} \tag{3.13}$$

де $\Psi_1^{ij} = e^{\frac{\beta t}{2}}\psi_1^{ij}$, $i,j = 1,2$ — це (i,j)-й елемент матриці Ψ_1. Комбінуючи (3.6), (3.7) і (3.13) із використанням (3.12), отримуємо

$$\begin{aligned} R(T) &= \frac{2}{-\beta\lambda_H^*}\Psi_1^{-1}(T) V(T) \left(\Psi_1^{-1}(T)\right)' = \\ &= \frac{e^{-\beta T}}{\beta\lambda_H^*}\begin{bmatrix} 2\psi_1^{12}(T)\psi_1^{22}(T) & -2\psi_1^{12}(T)\psi_1^{21}(T) + e^{\beta T} - 1 \\ -2\psi_1^{12}(T)\psi_1^{21}(T) + e^{\beta T} - 1 & 2\psi_1^{11}(T)\psi_1^{21}(T) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Підставляючи (3.8)–(3.11) у (3.14), отримуємо (3.3)–(3.5). □

3.2. **Сумісний розподіл S_T і I_T.** Тепер доведемо аналог леми 3.1 для процесу S.

Лема 3.2. *Вектор* $\left(S_T, \int_0^T r^{2H-1}\, dS_r\right)'$ *має нормальний розподіл із середнім* $a(T) = \left(a_1(T), a_2(T)\right)'$, *де*

$$a_1(T) = -\rho_H\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^H T^{1-H} e^{-\frac{\beta T}{2}} I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \tag{3.15}$$

$$a_2(T) = \rho_H\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^H T^H e^{-\frac{\beta T}{2}} I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{2^{2H}\rho_H}{\Gamma(1-H)}, \tag{3.16}$$

$\rho_H = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/2-H)}{\gamma\kappa_H}$, *та коваріаційною матрицею* $R(T)$, *визначеною в лемі 3.1.*

Доведення. Використовуючи (3.1), маємо

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{1}{\gamma}\int_0^t k_H(t,s)\, dX_s = \frac{1}{\gamma}\int_0^t k_H(t,s)\, d\left[\frac{\alpha}{\beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta s} + \gamma U_s\right] = \\ &= \frac{1}{\gamma}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^t k_H(t,s)\, de^{-\beta s} + \int_0^t k_H(t,s)\, dU_s = \\ &= F(t) + \widetilde{S}_t, \end{aligned} \tag{3.17}$$

де

$$F(t) = -\frac{\beta}{\gamma}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^t k_H(t,s) e^{-\beta s}\, ds.$$

Тому

$$\begin{bmatrix} S_T \\ \int_0^T r^{2H-1}\, dS_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{S}_T \\ \int_0^T r^{2H-1}\, d\widetilde{S}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(T) \\ \int_0^T r^{2H-1}\, dF(r) \end{bmatrix}.$$

Звідси, за лемою 3.1, вектор $\left(S_T, \int_0^T r^{2H-1}\,dS_r\right)'$ має нормальний розподіл із середнім

$$a(T) = (a_1(T), a_2(T))' = \left(F(T), \int_0^T r^{2H-1}\,dF(r)\right)'$$

та коваріаційною матрицею $R(T)$.

За допомогою заміни $s = \frac{T}{2}(u+1)$ отримуємо

$$\begin{aligned} a_1(T) = F(T) &= -\frac{\beta}{\gamma}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^T k_H(T,s)e^{-\beta s}\,ds = \\ &= -\frac{\beta}{\gamma}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\kappa_H^{-1}\int_0^T s^{1/2-H}(T-s)^{1/2-H}e^{-\beta s}\,ds = \\ &= -\frac{\beta}{\gamma}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\kappa_H^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{2-2H}e^{-\frac{\beta T}{2}}\int_{-1}^1 (1-u^2)^{1/2-H}e^{-\frac{\beta T}{2}u}\,du. \end{aligned}$$

Враховуючи, що згідно з формулою (6.3) у додатку,

$$\int_{-1}^1 (1-u^2)^{1/2-H}e^{-\frac{\beta T}{2}u}\,du = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/2-H)}{(\beta T/4)^{1-H}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right),$$

одержуємо (3.15).

Далі, із (3.15) отримуємо

$$a_2(T) = \int_0^T r^{2H-1}\,da_1(r) = -\rho_H\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^H\int_0^T r^{2H-1}\,dg(r),$$

де $g(r) = r^{1-H}e^{-\frac{\beta r}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta r}{2}\right)$. За лемою 6.1 у додатку,

$$\int_0^T r^{2H-1}\,dg(r) = -T^H e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) + \frac{2^{2H}}{\beta^H\Gamma(1-H)},$$

звідки випливає (3.16). □

Лема 3.3. *Генератриса моментів пари* (S_T, I_T) *має вигляд*

$$m_1(\xi_1,\xi_2) = \mathsf{E}[\exp\{\xi_1 S_T + \xi_2 I_T\}] = D^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{8D} - \frac{\xi_2 T}{2}\right\}, \quad (3.18)$$

де

$$\begin{aligned} D = D(\xi_2) = &\left(1-\frac{\xi_2}{2\beta}\right)^2 + \frac{\xi_2^2}{4\beta^2}e^{-2\beta T} + \left(\frac{\xi_2}{\beta} - \frac{\xi_2^2}{2\beta^2}\right)\frac{\beta\pi T}{4\sin\pi H}e^{-\beta T}\times \\ &\times\left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) + I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$A_1 = A_1(\xi_1,\xi_2) = \xi_2(c_1\xi_1 - c_2\xi_2)\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \quad (3.20)$$

$$A_2 = A_2(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1^2c_3 - \xi_1\xi_2c_4 + \xi_2^2c_5)T^{2-2H}e^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \quad (3.21)$$

$$A_3 = A_3(\xi_1,\xi_2) = \xi_2(\xi_2 - 2\beta)c_6\beta^{2H-1}Te^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \quad (3.22)$$

$$A_4 = A_4(\xi_1,\xi_2) = (c_1\xi_1 - c_2\xi_2)(\xi_2 - 2\beta)\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right), \quad (3.23)$$

$$c_1 = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) 4\rho_H, \qquad c_4 = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \rho_H 2^{2H+1} \Gamma(H),$$
$$c_2 = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\lambda_H^* 2^{2H+1} \rho_H^2}{\Gamma(1-H)}, \qquad c_5 = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\lambda_H^* 2^{4H-1} \rho_H^2 \Gamma(H)}{\Gamma(1-H)},$$
$$c_3 = \frac{2\Gamma(H)\Gamma(1-H)}{\lambda_H^*}, \qquad c_6 = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 2\lambda_H^* \rho_H^2.$$

Областю визначення функції m_1 *є* $\left\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : D(\xi_2) > 0\right\}$.

Доведення. Аналогічно до [19, формули (3.3), (3.5)] визначимо

$$\phi(t, r) = \frac{d}{dw_t^H} \int_r^t k_H(t, s) K_H(s, r)\, ds = \frac{\lambda_H^* \gamma}{2} \left(t^{2H-1} + r^{2H-1}\right), \quad 0 \le r \le t \le T. \tag{3.24}$$

Звідси

$$\int_r^t k_H(t, s) K_H(s, r)\, ds = \int_r^t \phi(s, r)\, dw_s^H. \tag{3.25}$$

Використовуючи означення $P_H(t)$, зображення (2.5), зміну порядку інтегрування та (3.25), отримаємо

$$\begin{aligned}
\int_0^t P_H(s)\, dw_s^H &= \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left[\frac{d}{dw_s^H} \int_0^s k_H(s, r) X_r\, dr\right] dw_s^H = \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^t k_H(t, s) \left[\int_0^s K_H(s, r)\, dS_r\right] ds = \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left[\int_r^t k_H(t, s) K_H(s, r)\, ds\right] dS_r = \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left[\int_r^t \phi(s, r)\, dw_s^H\right] dS_r = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left[\int_0^s \phi(s, r)\, dS_r\right] dw_s^H,
\end{aligned}$$

звідки, з урахуванням (3.24),

$$P_H(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \phi(t, r)\, dS_r = \frac{\lambda_H^*}{2} \left(t^{2H-1} S_t + \int_0^t r^{2H-1}\, dS_r\right). \tag{3.26}$$

А отже, за допомогою інтегрування частинами одержимо

$$\begin{aligned}
I_T &= \int_0^T P_H(t)\, dS_t = \frac{\lambda_H^*}{2} \int_0^T \left[t^{2H-1} S_t + \int_0^t r^{2H-1}\, dS_r\right] dS_t = \\
&= \frac{\lambda_H^*}{2} \left(\int_0^T t^{2H-1} S_t\, dS_t + \int_0^T \left[\int_0^t r^{2H-1}\, dS_r\right] dS_t\right) = \\
&= \frac{\lambda_H^*}{2} \left(\int_0^T t^{2H-1} S_t\, dS_t + S_T \int_0^T r^{2H-1}\, dS_r - \int_0^T u^{2H-1} S_u\, dS_u - \frac{2(1-H)}{\lambda_H} T\right) = \\
&= \frac{\lambda_H^*}{2} S_T \int_0^T r^{2H-1}\, dS_r - \frac{T}{2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
m_1(\xi_1, \xi_2) &= \mathsf{E}\left[\exp\left\{\xi_1 S_T + \frac{\xi_2 \lambda_H^*}{2} S_T \int_0^T r^{2H-1}\, dS_r - \frac{\xi_2 T}{2}\right\}\right] = \\
&= \exp\left\{-\frac{\xi_2 T}{2}\right\} \mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{\xi_2 \lambda_H^*}{2} S_T G_T\right\}\right],
\end{aligned} \tag{3.28}$$

де $G_T = \frac{2\xi_1}{\xi_2\lambda_H^*} + \int_0^T r^{2H-1}\,dS_r$. За лемою 3.2 вектор

$$\begin{bmatrix} S_T \\ G_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_T \\ \int_0^T r^{2H-1}\,dS_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\xi_1}{\xi_2\lambda_H^*} \end{bmatrix}$$

має нормальний розподіл $\mathcal{N}(b(T), R(T))$, де

$$b(T) = \begin{bmatrix} b_1(T) \\ b_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(T) \\ a_2(T) + \frac{2\xi_1}{\xi_2\lambda_H^*} \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

а вектор $a(T)$ і матриця $R(T)$ визначаються формулами (3.15)–(3.16) та (3.2)–(3.5). Далі за формулою для перетворення Лапласа добутку двох нормальних випадкових величин (див., наприклад, [11]) маємо

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{\xi_2\lambda_H^*}{2} S_T G_T\right\}\right] = \\ &= D^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{\left[b_1^2(T)R^{22}(T) + b_2^2(T)R^{11}(T) - 2b_1(T)b_2(T)R^{12}(T)\right]\left(\frac{\xi_2\lambda_H^*}{2}\right)^2}{2D} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{2b_1(T)b_2(T)\left(\frac{\xi_2\lambda_H^*}{2}\right)}{2D} \right\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

де

$$D = \det\left[I - \frac{\xi_2\lambda_H^*}{2} JR(T)\right], \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажемо, що D можна подати у вигляді (3.19). За [19, формула (5.12)],

$$\begin{aligned} D = \frac{\beta\pi T}{4\sin\pi H}\Bigg[&\left(1 + \frac{\xi_2}{\beta} e^{-\frac{\beta T}{2}} \sinh\left(-\frac{\beta T}{2}\right)\right)^2 I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - \\ &- \left(1 - \frac{\xi_2}{\beta} e^{-\frac{\beta T}{2}} \cosh\left(-\frac{\beta T}{2}\right)\right)^2 I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Використовуючи означення гіперболічних синуса та косинуса, одержуємо

$$\begin{aligned} D &= \frac{\beta\pi T}{4\sin\pi H}\Bigg[\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta} + \frac{\xi_2}{2\beta} e^{-\beta T}\right)^2 I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - \\ &\quad - \left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta} - \frac{\xi_2}{2\beta} e^{-\beta T}\right)^2 I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\Bigg] = \\ &= \frac{\beta\pi T}{4\sin\pi H}\Bigg(\left[\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta}\right)^2 + \frac{\xi_2^2}{4\beta^2} e^{-2\beta T} + \frac{\xi_2}{\beta} e^{-\beta T}\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta}\right)\right] I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - \\ &\quad - \left[\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta}\right)^2 + \frac{\xi_2^2}{4\beta^2} e^{-2\beta T} - \frac{\xi_2}{\beta} e^{-\beta T}\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta}\right)\right] I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\Bigg) = \\ &= \frac{\beta\pi T}{4\sin\pi H}\Bigg(\left[\left(1 - \frac{\xi_2}{2\beta}\right)^2 + \frac{\xi_2^2}{4\beta^2} e^{-2\beta T}\right] \times \\ &\quad \times \left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{\xi_2}{\beta}e^{-\beta T}\left(1-\frac{\xi_2}{2\beta}\right)\left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)+I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]\Bigg).$$

Звідси випливає (3.19), якщо врахувати, що за формулою (6.5) у додатку,

$$I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)-I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)=\frac{4\sin\pi H}{\beta\pi T}. \tag{3.31}$$

Далі з (3.30) з урахуванням співвідношення (3.29) маємо

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{\xi_2\lambda_H^*}{2}S_TG_T\right\}\right]=D^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{1}{8D}\sum_{i=1}^{8}B_i\right\}, \tag{3.32}$$

де

$$\begin{aligned}
B_1&=\xi_2^2(\lambda_H^*)^2R^{22}(T)(a_1(T))^2, & B_5&=-4\xi_1\xi_2\lambda_H^*R^{12}(T)a_1(T),\\
B_2&=4\xi_1^2R^{11}(T), & B_6&=-2\xi_2^2(\lambda_H^*)^2R^{12}(T)a_1(T)a_2(T),\\
B_3&=4\xi_1\xi_2\lambda_H^*R^{11}(T)a_2(T), & B_7&=8\xi_1a_1(T),\\
B_4&=\xi_2^2(\lambda_H^*)^2R^{11}(T)(a_2(T))^2, & B_8&=4\xi_2\lambda_H^*a_1(T)a_2(T).
\end{aligned}$$

Позначимо додатково

$$c_7=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\lambda_H^*\rho_H^2\Gamma(H)\Gamma(1-H), \tag{3.33}$$

$$c_8=\left(x_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)2\rho_H\Gamma(H)\Gamma(1-H), \tag{3.34}$$

$$c_9=\left(x_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\lambda_H^*2^{2H}\rho_H^2\Gamma(H). \tag{3.35}$$

Тоді за допомогою формул для $R(T)$ і $a(T)$ із лем 3.1 та 3.2, доданки B_i, $i=1,\dots,8$, можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
B_1&=\xi_2^2c_7\beta^{2H}T^2e^{-2\beta T}I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\left[I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]^2,\\
B_2&=\xi_1^2c_3T^{2-2H}e^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right),\\
B_3&=\xi_1\xi_2c_8\beta^HT^{2-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)-\\
&\quad-\xi_1\xi_2c_4T^{2-2H}e^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)=:B_{31}+B_{32},\\
B_4&=\xi_2^2c_7\beta^{2H}T^2e^{-2\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]^2-\\
&\quad-\xi_2^2c_9\beta^HT^{2-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)+\\
&\quad+\xi_2^2c_5T^{2-2H}e^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right)=:B_{41}+B_{42}+B_{43},\\
B_5&=-\xi_1\xi_2c_8\beta^HT^{2-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\left[I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]^2-\\
&\quad-\xi_1\xi_2c_1\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)+
\end{aligned}$$

$$+ \xi_1\xi_2\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) =: B_{51}+B_{52}+B_{53},$$

$$B_6 = -\xi_2^2 2c_7\beta^{2H}T^2e^{-2\beta T}I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\left[I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]^2 +$$
$$+ \xi_2^2c_9\beta^H T^{2-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)\left[I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right]^2 -$$
$$- \xi_2^2c_6\beta^{2H-1}Te^{-2\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) +$$
$$+ \xi_2^2c_2\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) +$$
$$+ \xi_2^2c_6\beta^{2H-1}Te^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) -$$
$$- \xi_2^2c_2\beta^{H-1}T^{1-H}e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) =:$$
$$=: B_{61}+B_{62}+B_{63}+B_{64}+B_{65}+B_{66},$$

$$B_7 = -\xi_1 2c_1\beta^H T^{1-H}e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{1-H}\left(-\frac{\beta T}{2}\right),$$

$$B_8 = -\xi_2 2c_6\beta^{2H}Te^{-\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) +$$
$$+ \xi_2 2c_2\beta^H T^{1-H}e^{-\frac{\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) =: B_{81}+B_{82}.$$

Тепер спростимо доданки однакового порядку. За рахунок тотожності

$$\Gamma(H)\Gamma(1-H) = \frac{\pi}{\sin\pi H}$$

маємо такі співвідношення:

$$c_7\frac{4\sin\pi H}{\pi} = c_6, \qquad c_8\frac{2\sin\pi H}{\pi} = c_1, \qquad c_9\frac{2\sin\pi H}{\pi} = c_2. \tag{3.36}$$

Використовуючи (3.31) та (3.33), отримаємо

$$B_1+B_{41}+B_{61} = \xi_2^2c_7\beta^{2H}T^2e^{-2\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\times$$
$$\times\left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right] =$$
$$= \xi_2^2c_7\beta^{2H-1}\frac{4\sin\pi H}{\pi}Te^{-2\beta T}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right),$$

звідки, з урахуванням (3.36),

$$B_1+B_{41}+B_{61}+B_{63} = 0.$$

Використовуючи (3.31), (3.34) та (3.35), отримаємо

$$B_{31}+B_{42}+B_{51}+B_{62} = \left(\xi_1\xi_2c_8-\xi_2^2c_9\right)\beta^H T^{2-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\times$$
$$\times\left[I_{-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - I_H\left(\frac{\beta T}{2}\right)I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right] =$$
$$= \left(\xi_1\xi_2c_8-\xi_2^2c_9\right)\beta^{H-1}\frac{4\sin\pi H}{\pi}T^{1-H}e^{-\frac{3\beta T}{2}}I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right),$$

звідки, з урахуванням (3.36),

$$B_{31}+B_{42}+B_{51}+B_{62}+B_{52}+B_{64}=A_1.$$

Далі безпосередніми підрахунками встановлюємо співвідношення

$$B_2+B_{32}+B_{43}=A_2, \qquad B_{81}+B_{65}=A_3, \qquad B_7+B_{82}+B_{53}+B_{66}=A_4.$$

Таким чином, $\sum_{i=1}^{8} B_i = A_1+A_2+A_3+A_4$. Лему доведено. $\square$

3.3. **Сумісний розподіл S_T, I_T, J_T, K_T.** Уведемо допоміжний процес

$$X_t^{(\alpha_1,\beta_1)} = x_0^{(\alpha_1,\beta_1)} + \int_0^t \Big(\alpha_1 - \beta_1 X_s^{(\alpha_1,\beta_1)}\Big) ds + \gamma B_t^H, \quad t \geq 0,$$

для якого $P_H^{(\alpha_1,\beta_1)}(t), S_t^{(\alpha_1,\beta_1)}, \Lambda_H^{(\alpha_1,\beta_1)}(T)$, $I_T^{(\alpha_1,\beta_1)}, J_T^{(\alpha_1,\beta_1)}, K_T^{(\alpha_1,\beta_1)}, m_1^{(\alpha_1,\beta_1)}(\xi_1,\xi_2)$ визначаються аналогічно до $P_H(t), S_t, \Lambda_H(T), I_T, J_T, K_T, m_1(\xi_1,\xi_2)$ за допомогою підстановки α_1 і β_1 замість α і β відповідно.

Теорема 3.4. *Генератриса моментів четвірки (S_T, I_T, J_T, K_T) має вигляд*

$$\begin{aligned} m_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) &= \mathsf{E}[\exp\{\theta_1 S_T + \theta_2 I_T + \theta_3 J_T + \theta_4 K_T\}] = \\ &= m_1^{(\alpha_1,\beta_1)}\left(\theta_1 + \frac{\alpha-\alpha_1}{\gamma}, \theta_2 - \beta + \beta_1\right) \exp\left\{\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{2\gamma^2} w_T^H\right\}, \end{aligned}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\gamma\theta_3 + \alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\theta_4}}, \qquad \beta_1 = \sqrt{\beta^2 - 2\theta_4}. \tag{3.37}$$

Область визначення функції m_2 має вигляд

$$\Big\{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) \in \mathbb{R}^4 : \theta_4 < \beta^2/2, D\Big(\theta_2 - \beta + \sqrt{\beta^2 - 2\theta_4}\Big) > 0\Big\},$$

де D визначено за допомогою (3.19).

Доведення. Із теореми Гірсанова для дробових процесів (див. [18, теорема 3]), з урахуванням (3.37), випливає

$$\begin{aligned} m_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) &= \mathsf{E}[\exp\{\theta_1 S_T + \theta_2 I_T + \theta_3 J_T + \theta_4 K_T\}] = \\ &= \mathsf{E}\left[\exp\Big\{\theta_1 S_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + \theta_2 I_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + \theta_3 J_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + \theta_4 K_T^{(\alpha_1,\beta_1)}\Big\} \frac{\Lambda_H(T)}{\Lambda_H^{(\alpha_1,\beta_1)}(T)}\right] = \\ &= \mathsf{E}\left[\exp\left\{\left(\theta_1 + \frac{\alpha-\alpha_1}{\gamma}\right) S_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + (\theta_2 - \beta + \beta_1) I_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\theta_3 + \frac{\alpha\beta - \alpha_1\beta_1}{\gamma}\right) J_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + \left(\theta_4 - \frac{\beta^2-\beta_1^2}{2}\right) K_T^{(\alpha_1,\beta_1)} - \frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{2\gamma^2} w_T^H\right\}\right] = \\ &= \mathsf{E}\left[\exp\left\{\left(\theta_1 + \frac{\alpha-\alpha_1}{\gamma}\right) S_T^{(\alpha_1,\beta_1)} + (\theta_2 - \beta + \beta_1) I_T^{(\alpha_1,\beta_1)} - \frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{2\gamma^2} w_T^H\right\}\right] = \\ &= m_1^{(\alpha_1,\beta_1)}\left(\theta_1 + \frac{\alpha-\alpha_1}{\gamma}, \theta_2 - \beta + \beta_1\right) \times \exp\left\{\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{2\gamma^2} w_T^H\right\}. \end{aligned}$$

$\square$

Зауваження 3.5. У випадку $x_0 = \alpha = 0$, сумісний розподіл I_T та K_T було знайдено у [35]. Ми узагальнюємо цей результат, знаходячи сумісний розподіл четвірки (S_T, I_T, J_T, K_T) для довільних $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. Асимптотична поведінка ОМВ

Установимо спочатку асимптотику кожної зі статистик S_T, I_T, J_T, K_T.

Лема 4.1. *При* $T \to \infty$

$$T^{H-\frac{1}{2}} S_T \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(-\frac{c_1 \beta^{H-1/2}}{4\sqrt{\pi}}, \frac{c_3}{4\pi\beta}\right), \tag{4.1}$$

$$\frac{I_T}{T} \xrightarrow{\mathsf{P}} -\frac{1}{2}, \tag{4.2}$$

$$\frac{J_T}{w_T^H} \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \tag{4.3}$$

$$\frac{K_T}{T} \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{1}{2\beta}. \tag{4.4}$$

Доведення. Використовуючи лему 3.3, обчислимо генератрису моментів величини $T^{H-\frac{1}{2}} S_T$ та перейдемо до границі за допомогою (6.4). Одержимо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\theta T^{H-\frac{1}{2}} S_T\right\} = m_1\left(\theta T^{H-\frac{1}{2}}, 0\right) =$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{8}\theta^2 c_3 T e^{-\beta T} I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right) I_{H-1}\left(\frac{\beta T}{2}\right) - \frac{1}{4} c_1 \theta \beta^H T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta T}{2}} I_{1-H}\left(\frac{\beta T}{2}\right)\right\} \to$$
$$\to \exp\left\{\frac{c_3}{8\pi\beta}\theta^2 - \frac{c_1\beta^{H-1/2}}{4\sqrt{\pi}}\theta\right\}, \qquad T \to \infty,$$

звідки випливає (4.1).

Аналогічно, за лемою 3.3 обчислюємо генератрису моментів

$$\mathsf{E}\exp\left\{\theta \frac{I_T}{T}\right\} = m_1\left(0, \frac{\theta}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{D(\theta/T)}} \exp\left\{\frac{1}{8D(\theta/T)} \sum_{i=1}^{4} A_i(0, \theta/T) - \frac{\theta}{2}\right\}.$$

За допомогою (6.4) установлюємо, що при $T \to \infty$

$$D(\theta/T) \to 1, \qquad A_i(0, \theta/T) \to 0, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Отже, $\mathsf{E}\exp\{\theta \frac{I_T}{T}\} \to \exp\{-\frac{\theta}{2}\}$, що рівносильно (4.2).

Збіжності (4.3) та (4.4) доведено в [29, леми 4.6 і 4.7]. □

Тепер сформулюємо основний результат статті.

Теорема 4.2. *ОМВ* $\left(\widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\right)$ *параметра* (α, β) *є асимптотично нормальною:*

$$\begin{bmatrix} T^{1-H}(\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ \sqrt{T}\left(\widehat{\beta}_T - \beta\right) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_H \gamma^2 & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}\right), \quad T \to \infty, \tag{4.5}$$

тобто оцінки $\widehat{\alpha}_T$ *та* $\widehat{\beta}_T$ *— асимптотично незалежні.*

Для доведення теореми визначимо

$$V_1(T) = \frac{1}{\sqrt{w_T^H}}\left(J_T - \frac{\alpha}{\beta\gamma} w_T^H\right),$$
$$V_2(T) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(I_T - \frac{\alpha}{\gamma} J_T + \beta K_T\right),$$
$$V_3(T) = \frac{K_T}{T} - \frac{J_T^2}{w_T^H T},$$

та перепишемо ОМВ (2.7) у вигляді

$$T^{1-H}(\widehat{\alpha}_T-\alpha)=\frac{\beta\gamma\sqrt{\lambda_H}\,\frac{K_T}{T}V_1(T)+R_1(T)}{V_3(T)}, \tag{4.6}$$

$$\sqrt{T}\Big(\widehat{\beta}_T-\beta\Big)=\frac{-V_2(T)+R_2(T)}{V_3(T)}, \tag{4.7}$$

де

$$R_1(T)=\frac{\gamma\sqrt{\lambda_H}}{T\sqrt{w_T^H}}\big(S_TK_T-J_TV_2(T)\big),$$

$$R_2(T)=\frac{\beta J_TV_1(T)}{\sqrt{Tw_T^H}}+\frac{S_TJ_T}{\sqrt{T}w_T^H}.$$

Знайдемо асимптотичний розподіл вектора $(V_1(T),V_2(T))'$.

Лема 4.3. *При* $T\to\infty$

$$\mathsf{E}\exp\{\mu_1V_1(T)+\mu_2V_2(T)\}\to\exp\left\{\frac{\mu_1^2}{2\beta^2}+\frac{\mu_2^2}{4\beta}\right\}, \tag{4.8}$$

тобто

$$\begin{bmatrix}V_1(T)\\V_2(T)\end{bmatrix}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta^2}&0\\0&\frac{1}{2\beta}\end{bmatrix}\right). \tag{4.9}$$

Доведення. За теоремою 3.4,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\{\mu_1V_1(T)+\mu_2V_2(T)\}=\\
&\quad=\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}I_T+\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{w_T^H}}-\frac{\alpha\mu_2}{\gamma\sqrt{T}}\right)J_T+\frac{\beta\mu_2}{\sqrt{T}}K_T-\frac{\alpha\mu_1\sqrt{w_T^H}}{\beta\gamma}\right\}=\\
&\quad=\exp\left\{-\frac{\alpha\mu_1\sqrt{w_T^H}}{\beta\gamma}\right\}m_2\left(0,\frac{\mu_2}{\sqrt{T}},\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{w_T^H}}-\frac{\alpha\mu_2}{\gamma\sqrt{T}}\right),\frac{\beta\mu_2}{\sqrt{T}}\right)=\\
&\quad=\exp\{\eta(T)\}m_1^{(\alpha_1(T),\beta_1(T))}(\xi_1(T),\xi_2(T)),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

де

$$\beta_1(T)=\sqrt{\beta^2-2\beta\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}},\qquad \alpha_1(T)=\frac{\frac{\gamma\mu_1}{\sqrt{w_T^H}}-\frac{\alpha\mu_2}{\sqrt{T}}+\alpha\beta}{\beta_1(T)},$$

$$\xi_1(T)=\frac{\alpha-\alpha_1(T)}{\gamma},\qquad \xi_2(T)=\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}-\beta+\beta_1(T),$$

$$\eta(T)=\frac{\alpha_1(T)^2-\alpha^2}{2\gamma^2}w_T^H-\frac{\alpha\mu_1\sqrt{w_T^H}}{\beta\gamma}.$$

Зауважимо, що генератриса моментів (4.10) визначена для всіх $\mu_1\in\mathbb{R}$ та таких μ_2, що $\mu_2<\beta\sqrt{T}/2$ і $D\Big(\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}-\beta+\sqrt{\beta^2-2\frac{\beta\mu_2}{\sqrt{T}}}\Big)>0$. При досить великих T ці нерівності виконуються, оскільки $D\Big(\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}-\beta+\sqrt{\beta^2-2\frac{\beta\mu_2}{\sqrt{T}}}\Big)\to D(0)=1>0$ при $T\to\infty$.

Використовуючи розклад за формулою Тейлора, маємо

$$\beta_1(T)=\beta-\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}-\frac{\mu_2^2}{2\beta T}+o\big(T^{-1}\big),\quad T\to\infty. \tag{4.11}$$

Звідси
$$\xi_2(T) = -\frac{\mu_2^2}{2\beta T} + o\big(T^{-1}\big), \quad T \to \infty. \tag{4.12}$$
Крім того, очевидно, що при $T \to \infty$
$$\alpha_1(T) \to \alpha, \qquad \xi_1(T) \to 0. \tag{4.13}$$
Далі,
$$\eta(T) = \frac{w_T^H}{2\gamma^2} \cdot \frac{\left(\frac{\gamma\mu_1}{\sqrt{w_T^H}} - \frac{\alpha\mu_2}{\sqrt{T}} + \alpha\beta\right)^2 - \alpha^2\left(\beta^2 - 2\beta\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}\right)}{\beta^2 - 2\beta\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}} - \frac{\alpha\mu_1\sqrt{w_T^H}}{\beta\gamma}.$$
Після спрощень одержимо
$$\eta(T) = \frac{\gamma^2\mu_1^2 + \alpha^2\mu_2^2\frac{w_T^H}{T} + 2\alpha\gamma\mu_1\mu_2\frac{\sqrt{w_T^H}}{\sqrt{T}}}{2\gamma^2\left(\beta^2 - 2\beta\frac{\mu_2}{\sqrt{T}}\right)} \to \frac{\mu_1^2}{2\beta^2}, \quad T \to \infty. \tag{4.14}$$

Використовуючи (4.11)–(4.13) та (6.4), неважко показати, що при $T \to \infty$
$$D(\xi_2(T)) \to 1, \qquad A_i(\xi_1(T), \xi_2(T)) \to 0,\ 1 \le i \le 4.$$
(Тут D та A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, визначено за допомогою формул (3.19)–(3.23), в які підставлено $\alpha_1(T)$, $\beta_1(T)$ замість α, β.) Тому з (3.18) та (4.12) випливає, що
$$m_1^{(\alpha_1(T), \beta_1(T))}(\xi_1(T), \xi_2(T)) \sim \exp\left\{-\frac{\xi_2(T)T}{2}\right\} \to \exp\left\{\frac{\mu_2^2}{4\beta}\right\}, \quad T \to \infty.$$
Підставляючи цю збіжність разом із (4.14) у рівність (4.10), одержуємо твердження леми. □

Доведення теореми 4.2. Із лем 4.1 і 4.3 одержуємо, що при $T \to \infty$
$$\frac{K_T}{T} \to \frac{1}{2\beta}, \qquad V_3(T) \to \frac{1}{2\beta}, \qquad R_1(T) \to 0, \qquad R_2(T) \to 0$$
за ймовірністю. Отже, твердження теореми випливає із зображень (4.6)–(4.7), збіжності (4.9) та теореми Слуцького. □

5. Альтернативна параметризація

Розглянемо процес Y, який еквівалентний X із (2.1), але з іншою параметризацією. А саме, він описується таким стохастичним диференціальним рівнянням:
$$dY_t = \kappa(\mu - Y_t)dt + \gamma dB_t^H. \tag{5.1}$$
Визначимо
$$P_H^Y(t) = \frac{1}{\gamma}\,\frac{d}{dw_t^H}\int_0^t k_H(t,s)Y_s\,ds,$$
$$S_t^Y = \frac{1}{\gamma}\int_0^t k_H(t,s)\,dY_s.$$
Аналогічно до попередніх розділів можна одержати, що ОМВ параметрів μ і κ мають вигляд
$$\widehat{\mu}_T = \frac{S_T^Y\int_0^T (P_H^Y(t))^2\,dw_t^H - \int_0^T P_H^Y(t)\,dS_t^Y\int_0^T P_H^Y(t)\,dw_t^H}{S_T^Y\int_0^T P_H^Y(t)\,dw_t^H - w_T^H\int_0^T P_H^Y(t)\,dS_t^Y}\,\gamma, \tag{5.2}$$
$$\widehat{\kappa}_T = \frac{S_T^Y\int_0^T P_H^Y(t)\,dw_t^H - w_T^H\int_0^T P_H^Y(t)\,dS_t^Y}{w_T^H\int_0^T (P_H^Y(t))^2\,dw_t^H - \left(\int_0^T P_H^Y(t)\,dw_t^H\right)^2}. \tag{5.3}$$

Очевидно, що
$$\widehat{\mu}_T = \frac{\widehat{\alpha}_T}{\widehat{\beta}_T}, \qquad \widehat{\kappa}_T = \widehat{\beta}_T, \qquad \mu = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \kappa = \beta.$$
Отже,
$$\begin{bmatrix} T^{1-H}(\widehat{\mu}_T - \mu) \\ \sqrt{T}(\widehat{\kappa}_T - \kappa) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^{1-H}(\widehat{\alpha}_T - \alpha)}{\widehat{\beta}_T} \\ \sqrt{T}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha T^{1-H}}{\widehat{\beta}_T \beta}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$
Позначимо $\widehat{\xi}_T = T^{1/2-H}(\widehat{\alpha}_T - \alpha)$. Тоді
$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \widehat{\xi}_T - 0 \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{1-H}(\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ \sqrt{T}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_H \gamma^2 & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}\right), \quad T \to \infty.$$
Звідси, застосувавши дельта-метод до $\Big(\widehat{\xi}_T, \widehat{\beta}_T\Big)'$ із перехідною функцією $g(x, y) = (x/y, y)'$, одержимо
$$\begin{bmatrix} \frac{T^{1-H}(\widehat{\alpha}_T - \alpha)}{\widehat{\beta}_T} \\ \sqrt{T}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) \end{bmatrix} = \sqrt{T}\begin{bmatrix} \frac{\widehat{\xi}_T}{\widehat{\beta}_T} - 0 \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix} = \sqrt{T}\Big(g(\widehat{\xi}_T, \widehat{\beta}_T) - g(0, \beta)\Big) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\lambda_H \gamma^2}{\beta^2} & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}\right), \quad T \to \infty. \tag{5.5}$$
Із теореми 4.2 випливає, що для $H > 1/2$
$$-\frac{\alpha T^{1-H}}{\widehat{\beta}_T \beta}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) = -\frac{\alpha T^{1/2-H}}{\widehat{\beta}_T \beta}\sqrt{T}\Big(\widehat{\beta}_T - \beta\Big) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad T \to \infty. \tag{5.6}$$
Тоді за теоремою Слуцького з (5.4), (5.5) і (5.6) маємо, що
$$\begin{bmatrix} T^{1-H}(\widehat{\mu}_T - \mu) \\ \sqrt{T}(\widehat{\kappa}_T - \kappa) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\lambda_H \gamma^2}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 2\kappa \end{bmatrix}\right), \tag{5.7}$$
тобто ОМВ параметрів μ і κ також є асимптотично нормальними та асимптотично незалежними.

6. Додаток. Модифікована функція Бесселя першого роду

У цьому додатку наведемо деякі властивості модифікованої функції Бесселя першого роду $I_\nu(x)$, які використовуються при доведенні основних результатів статті. Для більш детальної інформації із цієї теми радимо читачеві книгу [38]. Ми обмежимось випадком $\nu > -1$, $x \in \mathbb{R}$, у якому функцію $I_\nu(x)$ можна визначити як суму степеневого ряду [32, формула 50:6:1]:
$$I_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+\nu}}{j!\Gamma(j+1+\nu)}. \tag{6.1}$$
Зауважимо, що при нецілих від'ємних значеннях x функція $I_\nu(x)$ набуває комплексних значень. Проте значення функції $I_\nu(x)/x^\nu$ завжди є дійсними. Ця функція дорівнює $2^{-\nu}/\Gamma(1+\nu)$ при $x = 0$ та є парною, тобто
$$\frac{I_\nu(-x)}{(-x)^\nu} = \frac{I_\nu(x)}{x^\nu}, \tag{6.2}$$
див. [32, формула 50:2:1]. При $\nu > -\frac{1}{2}$ функцію $I_\nu(x)$ можна також визначити за допомогою інтеграла (див. [1, формула 9.6.18] або [32, формула 50:3:1]):
$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\big(\nu + \frac{1}{2}\big)} \int_{-1}^{1} \big(1 - t^2\big)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-xt}\, dt. \tag{6.3}$$

При великих значеннях x функція $I_\nu(x)$ має таку асимптотичну поведінку [1, формула 9.7.1]:

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} + O\big(x^{-2}\big)\right), \qquad x \to \infty. \tag{6.4}$$

Крім того, справедливе співвідношення [32, формула 50:5:5]:

$$I_{-\nu}(x)I_{\nu-1}(x) - I_{1-\nu}(x)I_\nu(x) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi x}. \tag{6.5}$$

Лема 6.1. *Нехай* $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, $\theta > 0$, $g(r) = r^\nu e^{-\theta r} I_\nu(\theta r)$. *Тоді*

$$\int_0^T r^{1-2\nu}\, dg(r) = -T^{1-\nu} e^{-\theta T} I_{\nu-1}(\theta T) + \frac{2^{1-\nu}}{\theta^{1-\nu}\Gamma(\nu)}. \tag{6.6}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, одержимо

$$\int_0^T r^{1-2\nu}\, dg(r) = T^{1-\nu} e^{-\theta T} I_\nu(\theta T) - \lim_{r\to 0} r^{1-\nu} e^{-\theta r} I_\nu(\theta r) - \\ - (1-2\nu)\int_0^T r^{-\nu} e^{-\theta r} I_\nu(\theta r)\, dr. \tag{6.7}$$

За формулою (6.1),

$$I_\nu(\theta r) = \frac{(\theta r/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} + O\big(r^{2+\nu}\big), \qquad r \to 0,$$

а тому

$$r^{1-\nu} e^{-\theta r} I_\nu(\theta r) = \frac{(\theta/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} r e^{-\theta r} + O\big(r^3\big) \to 0, \qquad r \to 0. \tag{6.8}$$

Із [32, формула 50:10:9] маємо

$$\int_0^x t^{-\nu} e^{-t} I_\nu(t)\, dt = -\frac{x^{1-\nu} e^{-x}}{2\nu - 1}\left[I_{\nu-1}(x) + I_\nu(x)\right] + \frac{2^{1-\nu}}{(2\nu-1)\Gamma(\nu)}.$$

Звідси за допомогою заміни $\theta r = t$ отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^T r^{-\nu} e^{-\theta r} I_\nu(\theta r)\, dr &= \theta^{\nu-1}\int_0^{\theta T} t^{-\nu} e^{-t} I_\nu(t)\, dt = \\ &= \theta^{\nu-1}\left(-\frac{(\theta T)^{1-\nu} e^{-\theta T}}{2\nu-1}\left[I_{\nu-1}(\theta T) + I_\nu(\theta T)\right] + \frac{2^{1-\nu}}{(2\nu-1)\Gamma(\nu)}\right) = \\ &= \frac{1}{1-2\nu}\left(T^{1-\nu} e^{\theta T}\left[I_\nu(\theta T) + I_{\nu-1}(\theta T)\right] - \frac{2^{1-\nu}}{\theta^{1-\nu}\Gamma(\nu)}\right). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Підставляючи (6.8) і (6.9) у (6.7), одержуємо (6.6). □

Подяка

Автори висловлюють подяку анонімному рецензентові за корисні зауваження. Дослідження другого автора виконано в рамках та за підтримки проекту ToppForsk nr. 274410 Науково-дослідної ради Норвегії під назвою «STORM: Stochastics for Time-Space Risk Models».

Список літератури

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover publications, New York, 1965.
2. R. Belfadli, K. Es-Sebaiy, Y. Ouknine, *Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes: non-ergodic case*, Frontiers in Science and Engineering (An International Journal Edited by Hassan II Academy of Science and Technology), **1** (2011), 1–16.
3. C. Berzin, A. Latour, J.R. León, *Inference on the Hurst Parameter and the Variance of Diffusions Driven by Fractional Brownian Motion*, Springer, 2014.

4. C. Berzin, J.R. León, *Estimation in models driven by fractional Brownian motion*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **44** (2008), no. 2, 191–213.
5. P. Cheridito, H. Kawaguchi, M. Maejima, *Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes*, Electron. J. Probab., **8** (2003).
6. A. Chronopoulou, F. G. Viens, *Estimation and pricing under long-memory stochastic volatility*, Annals of Finance, **8** (2012), no. 2-3, 379–403.
7. A. Chronopoulou, F. G. Viens, *Stochastic volatility and option pricing with long-memory in discrete and continuous time*, Quantitative Finance, **12** (2012), no. 4, 635–649.
8. F. Comte, L. Coutin, E. Renault, *Affine fractional stochastic volatility models*, Annals of Finance, **8** (2012), no. 2-3, 337–378.
9. F. Comte, E. Renault, *Long memory in continuous-time stochastic volatility models*, Mathematical Finance, **8** (1998), no. 4, 291–323.
10. S. Corlay, J. Lebovits, J. L. Lévy Véhel, *Multifractional stochastic volatility models*, Mathematical Finance, **24** (2014), no. 2, 364–402.
11. C. C. Craig, *On the frequency function of xy*, The Annals of Mathematical Statistics, **7** (1936), no. 1, 1–15.
12. L. Decreusefond, A. S. Üstünel, *Stochastic analysis of the fractional Brownian motion*, Potent. Anal., **10** (1999), 177–214.
13. M. El Machkouri, K. Es-Sebaiy, Y. Ouknine, *Least squares estimator for non-ergodic Ornstein–Uhlenbeck processes driven by Gaussian processes*, Journal of the Korean Statistical Society, **45** (2016), 329–341.
14. H. Fink, C. Klüppelberg, M. Zähle, *Conditional distributions of processes related to fractional Brownian motion*, J. Appl. Probab., **50** (2013), no. 1, 166–183.
15. R. Hao, Y. Liu, S. Wang, *Pricing credit default swap under fractional Vasicek interest rate model*, Journal of Mathematical Finance, **4** (2014), no. 1, 10–20.
16. Y. Hu, D. Nualart, *Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes*, Stat. Probab. Lett., **80** (2010), no. 11–12, 1030–1038.
17. J. Istas, G. Lang, *Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **33** (1997), no. 4, 407–436.
18. M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud, *Parameter estimation and optimal filtering for fractional type stochastic systems*, Stat. Inference Stoch. Process., **3** (2000), 173–182.
19. M. Kleptsyna, A. Le Breton, *Statistical analysis of the fractional Ornstein–Uhlenbeck type process*, Stat. Inference Stoch. Process., **5** (2002), no. 3, 229–248.
20. Y. Kozachenko, A. Melnikov, Y. Mishura, *On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion*, Statistics, **49** (2015), no. 1, 35–62.
21. K. Kubilius, D. Melichov, *Quadratic variations and estimation of the Hurst index of the solution of SDE driven by a fractional Brownian motion*, Lith. Math. J., **50** (2010), no. 4, 401–417.
22. K. Kubilius, Y. Mishura, *The rate of convergence of Hurst index estimate for the stochastic differential equation*, Stochastic Process. Appl., **122** (2012), no. 11, 3718–3739.
23. K. Kubilius, Y. Mishura, K. Ralchenko, *Parameter Estimation in Fractional Diffusion Models*, Springer, 2017.
24. K. Kubilius, V. Skorniakov, K. Ralchenko, *The rate of convergence of the Hurst index estimate for a stochastic differential equation*, Nonlinear Anal. Model. Control, **22**(2017), no. 2, 273–284.
25. Y. A. Kutoyants, *Statistical inference for ergodic diffusion processes*, Springer, London, 2004.
26. A. Le Breton, *Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by a fractional Brownian motion*, Statist. Probab. Lett., **38** (1998), no. 3, 263–274.
27. R. Liptser, A. Shiryayev, *Theory of Martingales*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1989.
28. S. Lohvinenko, K. Ralchenko, O. Zhuchenko, *Asymptotic properties of parameter estimators in fractional Vasicek model*, Lithuanian J. Statist., **55** (2016), no. 1, 102–111.
29. S. Lohvinenko, K. Ralchenko, *Maximum likelihood estimation in the fractional Vasicek model*, Lithuanian J. Statist., **56** (2017), no. 1, 77–87.
30. Y. Mishura, K. Ralchenko, *Drift Parameter Estimation in the Models Involving Fractional Brownian Motion*, In International Conference on Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics, (2016), 237–268.
31. I. Norros, E. Valkeila, J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli, **5** (1999), no. 4, 571–587.
32. K. B. Oldham, J. C. Myland, J. Spanier, *An atlas of functions: with Equator, the atlas function calculator*, Springer-Verlag, New York, 2009.
33. B. Prakasa Rao, *Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes*, Wiley, Chichester, 2010.

34. L. Song, K. Li, *Pricing Option with Stochastic Interest Rates and Transaction Costs in Fractional Brownian Markets*, Discrete Dynamics in Nature and Society, **2018** (2018).
35. K. Tanaka, *Distributions of the maximum likelihood and minimum contrast estimators associated with the fractional Ornstein–Uhlenbeck process*, Stat. Inference Stoch. Process., **16** (2013), no. 3, 173–192.
36. K. Tanaka, *Maximum likelihood estimation for the non-ergodic fractional Ornstein–Uhlenbeck process*, Statistical Inference for Stochastic Processes, **18** (2015), no. 3, 315–332.
37. O. Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, J. Finance Econ., **5** (1977), no. 2, 177–188.
38. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
39. W. Xiao, J. Yu, *Asymptotic theory for estimating the persistent parameter in the fractional Vasicek model*, CSR for Sustainability and Success: Corporate Social Responsibility in Singapore. Research Collection School Of Economics, (2016), 1–27. Available at: `http://ink.library.smu.edu.sg/soe_research/1861`
40. W. Xiao, J. Yu, *Asymptotic theory for estimating drift parameters in the fractional Vasicek model*, Research Collection School Of Economics, (2017). Available at: `https://ink.library.smu.edu.sg/soe_research/1966`
41. W. Xiao, J. Yu, *Asymptotic theory for rough fractional vasicek models*, Research Collection School Of Economics, (2018), 1–15. Available at: `https://ink.library.smu.edu.sg/soe_research/2158`
42. W. Xiao, W. Zhang, X. Zhang, X. Chen, *The valuation of equity warrants under the fractional Vasicek process of the short-term interest rate*, Phys. A, **394** (2014), 320–337.
43. F. Yerlikaya-Özkurt, C. Vardar-Acar, Y. Yolcu-Okur, G.W. Weber, *Estimation of the Hurst parameter for fractional Brownian motion using the CMARS method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **259** (2014), 843–850.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: `stanislav.lohvinenko@gmail.com`

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: `k.ralchenko@gmail.com`

Стаття надійшла до редколегії 8.10.2018

ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR IN FRACTIONAL VASICEK MODEL

S. S. LOHVINENKO, K. V. RALCHENKO

Abstract. We consider the fractional Vasicek model of the form $dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dB_t^H$ driven by fractional Brownian motion B^H with Hurst index $H \in (1/2, 1)$. We study asymptotic distribution of maximum likelihood estimator of vector parameter (α, β) and prove its asymptotic normality in the case $\beta > 0$. We show that the estimators of α and β are asymptotically independent.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ В ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ВАСИЧЕКА

С. С. ЛОГВИНЕНКО, К. В. РАЛЬЧЕНКО

Аннотация. В работе рассматривается дробная модель Васичека вида $dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dB_t^H$, порожденная дробным броуновским движением B^H с индексом Хюрста $H \in (1/2, 1)$. Исследуется асимптотическое распределение оценки максимального правдоподобия для векторного параметра (α, β) и доказывается ее асимптотическая нормальность в случае $\beta > 0$. Показано, что оценки параметров α и β являются асимптотически независимыми.