Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 177–186

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 177–186

УДК 519.21

ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ЕНТРОПІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Ю. С. МІШУРА, Г. С. ЖЕЛЕЗНЯК

Анотація. Розглянемо суму двох незалежних вінерівських процесів зі зносом і побудуємо сім'ю ймовірнісних міри, відносно яких знос дорівнює нулю. Серед цих мір шукаємо ті, які мінімізують або максимізують певні функціонали, у тому числі функціонали ентропійного типу.

Ключові слова і фрази. Вінерівський процес, похідна Радона – Нікодима, ентропійний функціонал, мінімізація, максимізація.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G22, 60J65; Secondary 94A17.

1. Вступ та постановка задачі

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ — ймовірнісний простір із фільтрацією, на якому визначено всі об'єкти, що далі розглядаються. Зафіксуємо $T > 0$, та нехай P_1 — інша ймовірнісна міра на $(\Omega, \mathcal{F})$, причому міра P_1 абсолютно неперервна відносно міри P. Згідно з означенням [1, с. 121–130], у випадку коли P_1 абсолютно неперервна відносно міри P, ентропія ймовірнісної міри P_1 відносно P визначається як

$$\mathsf{H}(\mathsf{P}_1|\mathsf{P}) := \mathsf{E}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\log\frac{d\,\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right].$$

Основною властивістю функціонала $\mathsf{H}(\mathsf{P}_1|\mathsf{P})$ є те, що $\mathsf{H}(\mathsf{P}_1|\mathsf{P}) \geq 0$ та $\mathsf{H}(\mathsf{P}_1|\mathsf{P}) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}$.

Дійсно, функція $h(x) = x\log x$ є строго опуклою на $(0,\infty)$. Застосувавши нерівність Йєнсена до функції $h(x)$, отримаємо

$$\mathsf{H}(\mathsf{P}_1|\mathsf{P}) = \mathsf{E}\left[h\left(\frac{d\,\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] \geq h\left(\mathsf{E}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right]\right) \geq h(1) = 0,$$

та рівність справедлива тоді й тільки тоді, коли $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}$. Від стандартної ентропії перейдемо до інших функціоналів, заданих на щільностях імовірнісних мір. Вони виникають при розгляді, наприклад, такої задачі.

Припустимо, що на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ задано два незалежні вінерівські процеси $\mathrm{W}_1 = \{\mathrm{W}_1(t), t \in [0,T]\}$ та $\mathrm{W}_2 = \{\mathrm{W}_2(t), t \in [0,T]\}$, і нехай невипадкова невід'ємна функція $f \in L_2([0,T], \lambda_1)$, λ_1 — міра Лебега на прямій. Розглянемо суми цих вінерівських процесів зі зносом, тобто випадковий процес вигляду

$$S(t) = \mathrm{W}_1(t) + \mathrm{W}_2(t) + \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Незважаючи на те, що сума двох незалежних вінерівських процесів знову є вінерівським процесом, із точністю до сталого множника, ми будемо роглядати ці процеси окремо. Перейдемо до іншої ймовірнісної міри $\widetilde{\mathsf{P}}$, відносно якої сума $S(t)$ з (1) набуває вигляду

$$\widetilde{S}(t) = \widetilde{W}_1(t) + \widetilde{W}_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

де $\widetilde{W}_1$ та $\widetilde{W}_2$ — два незалежні вінерівські процеси відносно міри $\widetilde{\mathsf{P}}$. У силу незалежності вінерівських процесів $\widetilde{W}_1$ та $\widetilde{W}_2$, відношення вірогідностей розпадеться в добуток:

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\,\mathsf{P}} = \frac{d\,\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}} \times \frac{d\,\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}},$$

де міри P_1 та P_2 відповідають вінерівським процесам $\widetilde{W}_1$ та $\widetilde{W}_2$. Суму процесів W_1 та W_2 зі зносом розкладемо і будемо усувати знос $\int_0^t f(s)ds$ таким чином:

$$\widetilde{W}_1(t) = \mathrm{W}_1(t) + \int_0^t f_1(s)ds,$$
$$\widetilde{W}_2(t) = \mathrm{W}_2(t) + \int_0^t f_2(s)ds,$$
$$f_1(t) + f_2(t) = f(t), t \in [0,T],$$

причому функції f_i задовольняють умови

$$f_i \in L_2([0,T], \lambda_1),\ 0 \le f_i(t) \le f(t), t \in [0,T].$$

Тоді за теоремою Гірсанова

$$\frac{d\,\mathsf{P}_i}{d\,\mathsf{P}} = \exp\left\{\int_0^T f_i(s)dW_i(s) - 1/2\int_0^T f_i^2(s)ds\right\},\ i = 1,2.$$

Наша мета — підібрати функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ таким чином, щоб вони мінімізували або максимізували функціонали виду

$$\mathsf{E}\left[F\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}, \frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right],$$

де $F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ — деяка невід'ємна вимірна функція. Зауважимо, що інший підхід до мінімізації ентропійних функціоналів реалізовано у статті [2]. Щоб розв'язати поставлену задачу, розглянемо два випадки — коли функція F є диференційовною і до неї можна застосувати стандартну формулу Іто, і випадок, коли F задає функціонал ентропійного типу, що містить логарифми. Далі статтю організовано таким чином. У розділі 2 сформульовано теорему про точки максимуму та мінімуму для функціонала від трьох імовірнісних мір, в якому задіяно двічі диференційовну функцію. У розділі 3 знайдено точки екстремуму для ентропійного функціонала від трьох ймовірнісних мір, що містить логарифми. Висновки розміщено у розділі 4.

2. Екстремуми функціоналів для диференційовних функцій

Отже, розглянемо випадок, коли функція $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ і при цьому має, разом зі своїми похідними, зростання не вище степеневого. Уведемо в розгляд невід'ємні мартингали

$$M_i(t) = \exp\left\{\int_0^t f_i(s)dW_i(s) - 1/2\int_0^t f_i^2(s)ds\right\},\ i = 1,2.$$

Очевидно $\frac{d\mathsf{P}_i}{d\,\mathsf{P}} = M_i(T), i = 1,2.$

Лема 2.1. *Нехай $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ та існують такі сталі $k \in \mathbb{N}$ та $C > 0$, що*

$$|F(x_1,x_2)|, \left|\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_i^2}\right| \le C\|x\|^k,\ i = 1,2,$$

де $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. *Тоді*

$$\mathsf{E}\left[F\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}, \frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] = F(1,1) + 1/2\left(\int_0^T \left(\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2}\right) f_1^2(s) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2}\right) f_2^2(s)\right) ds\right). \quad (3)$$

Доведення. Застосуємо стандартну формулу Іто до функції F та мартингалів M_i, $i = 1, 2$. При цьому, у силу умови зростання не вище степеневого, усі стохастичні інтеграли, наведені нижче, існують і мають моменти всіх порядків. Отже,

$$F\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}, \frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right) = F(M_1(T), M_2(T)) = F(1,1) +$$
$$+ \sum_{i=1,2} \int_0^T \frac{\partial F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_i} f_i(s) dW_i(s) + 1/2 \sum_{i=1,2} \int_0^T \frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_i^2} f_i^2(s) ds,$$

звідки безпосередньо випливає доведення. □

Тепер, задачу відшукання екстремумів функціонала $\mathsf{E}\big[F\big(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}} \frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\big)\big]$ доречно звести до випадків, коли математичне сподівання у правій частині (3) можна явно обчислити. Наприклад, розглянемо функціонал вигляду

$$F(x_1, x_2) = x_1^{k+2} + x_2^{l+2},$$

де k і l — цілі невід'ємні числа. У цьому разі

$$\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2}\right) = (k+2)(k+1)\mathsf{E}(M_1(s))^k =$$
$$= (k+2)(k+1)\mathsf{E}\exp\left\{k\int_0^s f_1(u)dW_1(u) - \frac{1}{2}k\int_0^s f_1^2(u)du\right\} =$$
$$= (k+2)(k+1)\exp\left\{\frac{1}{2}(k^2-k)\int_0^s f_1^2(u)du\right\}, \quad (4)$$

і, цілком аналогічно,

$$\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2}\right) = (l+2)(l+1)\mathsf{E}(M_2(s))^l =$$
$$= (l+2)(l+1)\mathsf{E}\exp\left\{l\int_0^s f_2(u)dW_2(u) - \frac{1}{2}l\int_0^s f_2^2(u)du\right\} =$$
$$= (l+2)(l+1)\exp\left\{\frac{1}{2}(l^2-l)\int_0^s f_2^2(u)du\right\}. \quad (5)$$

Тепер, з урахуванням формул (3)–(5), задача зводиться до оптимізації (відшукання максимумів або мінімумів) функціонала

$$G := \int_0^T \left[\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2}\right) f_1^2(s) + \mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2}\right) f_2^2(s)\right] ds =$$
$$= (k+2)(k+1)\int_0^T \exp\left\{\frac{1}{2}(k^2-k)\int_0^s f_1^2(u)du\right\} f_1^2(s)ds +$$
$$+ (l+2)(l+1)\int_0^T \exp\left\{\frac{1}{2}(l^2-l)\int_0^s f_2^2(u)du\right\} f_2^2(s)ds =$$
$$= k_1\left(\exp\left\{\frac{1}{2}(k^2-k)\int_0^T f_1^2(u)du\right\} - 1\right) + l_1\left(\exp\left\{\frac{1}{2}(l^2-l)\int_0^T f_2^2(u)du\right\} - 1\right), \quad (6)$$

де $k_1 = \frac{2(k+2)(k+1)}{k^2-k}$, $l_1 = \frac{2(l+2)(l+1)}{l^2-l}$. У свою чергу, формулу (6) доречно переписати таким чином: введемо позначення $f_1(t) = \alpha(t)f(t)$, де $\alpha(t) \in [0,1]$ — вимірна функція, при цьому $f_2(t) = (1-\alpha(t))f(t)$, і задачу (6) зведемо до наступної: відшукати екстремуми функціонала

$$G(\alpha) := k_1 \exp\left\{k_2 \int_0^T \alpha^2(u) f^2(u)du\right\} + l_1 \exp\left\{l_2 \int_0^T (1-\alpha(u))^2 f^2(u)du\right\}, \quad (7)$$

де $k_2 = \frac{1}{2}(k^2-k)$, $l_2 = \frac{1}{2}(l^2-l)$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $k > l$.

Теорема 2.1. *1) Існує єдина функція $\alpha(s) = \alpha_0$, яка мінімізує функціонал $G(\alpha)$, причому α_0 задовольняє рівняння*

$$\alpha_0 = \frac{l_1 l_2 \exp\{l_2 c(1-\alpha_0)^2\}}{k_1 k_2 \exp\{k_2 c\alpha_0^2\} + l_1 l_2 \exp\{l_2 c(1-\alpha_0)^2\}}, \text{ де } c = \|f\|^2_{L_2([0,T],\lambda_1)}.$$

2) При $k = l$ $\alpha_0 = \frac{1}{2}$.
3) Максимум $G(\alpha)$ дорівнює $\max\{k_1 + l_1\exp\{l_2 c\}, k_1\exp\{k_2 c\} + l_1\}$.

Доведення. Доведемо перше твердження. Із цією метою, підставимо в (7) замість $\alpha(u)$ функцію $\alpha(u)+\varepsilon\beta(u)$, де $\varepsilon \in \mathbb{R}$, β — будь-яка обмежена вимірна функція. Тобто, розглянемо функціонал $G(\alpha,\varepsilon) := G(\alpha+\varepsilon\beta)$. Позначимо

$$G_1(\alpha,\varepsilon) = \exp\left\{k_2 \int_0^T (\alpha(u)+\varepsilon\beta(u))^2 f^2(u)du\right\},$$
$$G_2(\alpha,\varepsilon) = \exp\left\{l_2 \int_0^T (1-\alpha(u)-\varepsilon\beta(u))^2 f^2(u)du\right\}.$$

Тоді $G(\alpha,\varepsilon) = k_1 G_1(\alpha,\varepsilon) + l_1 G_2(\alpha,\varepsilon)$. Візьмемо похідну по ε:

$$G'_\varepsilon(\alpha,\varepsilon) = k_1 G'_1(\alpha,\varepsilon) + l_1 G'_2(\alpha,\varepsilon) = 2k_1k_2 G_1(\alpha,\varepsilon)\int_0^T (\alpha(u)+\varepsilon\beta(u))\beta(u)f^2(u)du -$$
$$- 2l_1 l_2 G_2(\alpha,\varepsilon)\int_0^T (1-\alpha(u)-\varepsilon\beta(u))\beta(u)f^2(u)du. \quad (8)$$

Оскільки зараз ми шукаємо точки мінімуму, то має бути $G(\alpha,0) \le G(\alpha,\varepsilon)$ для всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Тому похідну, обчислену у (8), прирівняємо в нулі до нуля:

$$k_1k_2G_1(\alpha,0)\int_0^T \alpha(u)\beta(u)f^2(u)du - l_1l_2G_2(\alpha,0)\int_0^T (1-\alpha(u))\beta(u)f^2(u)du = 0,$$

або

$$\int_0^T [k_1k_2G_1(\alpha,0)\alpha(u) - l_1l_2G_2(\alpha,0) + l_1l_2G_2(\alpha,0)\alpha(u)]\beta(u)f^2(u)du = 0$$

для будь-якої обмеженої функції β.

Покладемо $\beta(u) = (k_1k_2G_1(\alpha_1,0) + l_1l_2G_2(\alpha,0))\alpha(u) - l_1l_2G_2(\alpha,0)$, й одержимо рівняння для $\alpha(u)$:

$$\alpha(u) = \frac{l_1l_2G_2(\alpha,0)}{k_1k_2G_1(\alpha,0) + l_1l_2G_2(\alpha,0)}. \quad (9)$$

Рівняння (9) означає, що $\alpha(u) = \alpha \in (0,1)$ — деяка стала, яка задовольняє рівняння

$$\alpha = \frac{l_1l_2\exp\{l_2(1-\alpha)^2c\}}{k_1k_2\exp\{k_2\alpha^2c\} + l_1l_2\exp\{l_2(1-\alpha)^2c\}}, \quad (10)$$

де $c := \|f\|^2_{L_2([0,T],\lambda_1)}$, $k_1k_2 = (k+2)(k+1)$, $l_1l_2 = (l+2)(l+1)$. Ліва частина (10) зростає від 0 до 1. Праву частину (10) спростимо до дробу

$$\frac{1}{r\exp\{(k_2\alpha^2 - l_2(1-\alpha)^2)c\}+1}, \text{ де } r = \frac{k_1k_2}{l_1l_2},$$

і дослідимо поведінку функції $\varphi(\alpha) = \exp\{c(k_2-l_2)\alpha^2 + 2l_2c\alpha\}$. Оскільки $k > l$, то $k_2 > l_2$, і значить, функція $\varphi(\alpha)$ зростає по α. Тому дріб спадає від

$$\frac{l_1l_2\exp\{l_2c\}}{k_1k_2 + l_1l_2\exp\{l_2c\}} \text{ до } \frac{l_1l_2}{k_1k_2\exp\{k_2c\}+l_1l_2},$$

причому обидва значення з інтервалу $(0,1)$. Із неперервності функцій у лівій і правій частинах (10) випливає, що рівняння (10) має єдиний розв'язок. Позначимо його α_0. Тепер обчислимо другу похідну $G''_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha,\varepsilon)$ і встановимо її знак при $\varepsilon = 0$.

Очевидно, що $G''_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha,\varepsilon) = k_1G''_1(\alpha,\varepsilon) + l_1G''_2(\alpha,\varepsilon)$, тому достатньо дослідити знак кожного доданка. Наприклад, для $G''_1(\alpha,\varepsilon)$ одержимо за допомогою (8):

$$\begin{aligned} G''_1(\alpha,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} &= \Big[2k_2G'_1(\alpha,\varepsilon)\int_0^T (\alpha(u)+\varepsilon\beta(u))\beta(u)f^2(u)du \\ &+ 2k_2G_1(\alpha,\varepsilon)\int_0^T \beta^2(u)f^2(u)du\Big]\Big|_{\varepsilon=0} = 4k_2^2G_1(\alpha,0)\Big(\int_0^T \alpha(u)\beta(u)f^2(u)du\Big)^2 + \\ &+ 2k_2G_1(\alpha,0)\int_0^T \beta^2(u)f^2(u)du > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} G''_2(\alpha,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 4l_2^2G_2(\alpha,0)\Big(\int_0^T (1-\alpha(u))\beta(u)f^2(u)du\Big)^2 + \\ &+ 2l_2G_2(\alpha,0)\int_0^T \beta^2(u)f^2(u)du > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, у точці α_0 справді досягається мінімум функціонала $G(\alpha)$, звідки випливає перше твердження. Твердження 2) і 3) є очевидними. □

3. Екстремуми функціоналів ентропійного типу

Як було сказано у вступі, ентропія однієї ймовірнісної міри відносно іншої є невід'ємним функціоналом від похідної Радона–Нікодима цих мір, який дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли міри однакові. Такі функціонали будемо називати функціоналами ентропійного типу. Продовжуючи розглядати задачу про усунення зсуву для суми двох незалежних вінерівських процесів, знайдемо ті міри P_1 і P_2, які доставляють екстремуми сумі двох функціоналів ентропійного типу:

$$\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2) = \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\mathsf{P}}\right)\right] + \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_2}{d\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_1}{d\mathsf{P}}\right)\right]. \tag{13}$$

Вибір функціонала (13) умотивовано таким чином: з одного боку, цікаво розглянути функціонал, який має нетривіальні точки мінімізації. З іншого боку, бажано спочатку підібрати такий функціонал, для якого точки мінімізації можна обчислити. Властивості функціонала $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$, згідно з якими його справді можна вважати ентропійним, розглянуто в лемі 3.1.

Лема 3.1. *Функціонал* $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$, *який задано формулою* (13), *задовольняє нерівність* $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2) \ge 0$, *причому* $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2) = 0$ *тоді й тільки тоді, коли* $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}$ *та* $\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}$.

Доведення. Функціонал $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$ є сумою доданків

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] \text{та } \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)\right].$$

Далі,

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)\right]^2\left(-\mathsf{E}\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right).$$

Використовуючи угнутість функції $\log x$, отримуємо, що

$$\mathsf{E}\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}} \le \log\mathsf{E}\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}} = \log 1 = 0,$$

а отже, $\mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)^2\left(-\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] \ge 0$. Аналогічні властивості має другий доданок. □

Зауважимо, що за допомогою формули Іто і з урахуванням незалежності вінерівських процесів, функціонал $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$ можна переписати у вигляді

$$\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2) = \frac{1}{2}\left(\exp\left\{\int_0^T f_1^2(t)dt\right\}\int_0^T f_2^2(t)dt + \right. \\ \left. + \exp\left\{\int_0^T f_2^2(t)dt\right\}\int_0^T f_1^2(t)dt\right).$$

У статті [3] знайдено мінімуми і максимуми функціонала (13) за умови, що $f_1(t) = \alpha f(t)$ та $f_1(t) = (1-\alpha)f(t)$, тобто ми шукали точку α, в якій цей мінімум досягався. Зараз будемо шукати мінімуми і максимуми цього ж функціонала в ширшому класі функцій

$$f_1(t) = \alpha(t)f(t) \quad \text{та} \quad f_2(t) = (1-\alpha(t))f(t), \tag{14}$$

де $\alpha(t) \in [0,1]$ – вимірна обмежена функція. Нагадаємо позначення $c = \|f\|_{L_2([0,T],\lambda_1)}$.

Теорема 3.1. *1) Якщо $c \le 2$, то функціонал $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$ досягає свого мінімуму при $f_1(t) = f_2(t) = \frac{f(t)}{2}$, і це мінімальне значення дорівнює $\frac{c}{4}e^{c/4}$, а максимуму, наприклад при $f_1(t) = 1$, і це максимальне значення дорівнює $c/2$.*

2) Якщо $2 < c < 4$, то функціонал досягає свого мінімуму при $f_1(t) = x_1 f(t)$ та $f_2(t) = (1-x_1)f(t)$, де x_1 — той єдиний корінь рівняння

$$x\exp\{c(1-2x)\} + x - 1 = 0,$$

який належить до інтервалу $(0, 1/c)$. Це мінімальне значення дорівнює $\frac{1-x_1}{2}\exp\{cx_1^2\}$. У силу симетрії функціонал досягає свого мінімуму також при $f_1(t) = (1-x_1)f(t)$ та $f_2(t) = x_1 f(t)$. Щодо максимуму, при $2 < c < \ln 16$ він дорівнює $c/2$, а при $\ln 16 \le c < 4$ він дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$.

3) Якщо $c \ge 4$, то мінімум, як і у попередньому випадку, досягається коли $f_1(t) = x_1 f(t)$ та $f_2(t) = (1-x_1)f(t)$, де x_1 — той єдиний корінь рівняння

$$x\exp\{c(1-2x)\} + x - 1 = 0,$$

який належить до інтервалу $(0, 1/c)$. При $c = 4$ максимум дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$, а коли $c > 4$ максимум досягається при $f_1(t) = x_{4,5}f(t)$ та $f_2(t) = (1-$

$-x_{4,5})f(t)$, *де* $x_{4,5}$ — *корені квадратного полінома* $1-xc+x^2c=0$, *які дорівнюють відповідно* $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{c}}$. *Значення максимуму рівне*

$$\frac{1}{4}\exp\left\{\frac{(c-2)-\sqrt{c(c-4)}}{2}\right\}\Big((c-2)-\sqrt{c(c-4)}-$$
$$-\Big(\sqrt{c(c-4)}-(c-2)\Big)\exp\Big\{\sqrt{c(c-4)}\Big\}\Big).$$

Доведення. Використовуючи формулу (14), перепишемо функціонал $\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)$ у вигляді

$$\mathsf{H}(\mathsf{P},\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)=\frac{1}{2}\exp\left\{\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt\right\}\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt+$$
$$+\frac{1}{2}\exp\left\{\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt\right\}\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt.$$

Як і при доведенні теореми 2.1, для довільної функції $\beta\in L_2[0,T]$ та $\varepsilon\in\mathbb{R}$ розглянемо значення функціонала H при $\alpha(t)+\varepsilon\beta(t)$:

$$\mathsf{H}(\alpha+\varepsilon\beta)=\frac{1}{2}\exp\left\{\int_0^T f^2(t)(\alpha(t)+\varepsilon\beta(t))^2dt\right\}\int_0^T f^2(t)(1-(\alpha(t)+\varepsilon\beta(t)))^2dt+$$
$$+\frac{1}{2}\exp\left\{\int_0^T f^2(t)(1-(\alpha(t)+\varepsilon\beta(t)))^2dt\right\}\int_0^T f^2(t)(\alpha(t)+\varepsilon\beta(t))^2dt. \quad (15)$$

Позначимо $I_1=\exp\left\{\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt\right\}$ та $I_2=\exp\left\{\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t)^2)dt\right\}$. Якщо шукаємо таку функцію α, яка мінімізує (15), то зрозуміло, що $\mathsf{H}(\alpha)\le\mathsf{H}(\alpha+\varepsilon\beta)$, тому $\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\forall\beta\in L_2[0,T]$ $\mathsf{H}(\alpha+\varepsilon\beta)$ досягає мінімуму при $\varepsilon=0$. Знаходимо першу похідну функціонала $\mathsf{H}(\alpha+\varepsilon\beta)$ по ε:

$$\mathsf{H}'(\alpha+\varepsilon\beta)\big|_{\varepsilon=0}=I_1\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt-$$
$$-I_1\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt-I_2\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt+$$
$$+I_2\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt. \quad (16)$$

Спростимо праву частину (16), прирівняємо її до нуля й отримаємо таке рівняння:

$$I_1\left[\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt-\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\right]-$$
$$-I_2\left[\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt-\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt\right]=0. \quad (17)$$

Позначимо $K=\frac{I_1}{I_2}$.Тоді рівність (17) можна переписати у вигляді

$$K:=\frac{\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt-\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt}{\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt-\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt},$$

або, що те саме,

$$\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt-\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt=$$
$$=K\left(\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2dt-\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))\beta(t)dt\right). \quad (18)$$

Тепер перегрупуємо доданки у (18) таким чином, щоб відокремити множники, що містять $\beta(t)$:

$$\left[\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt + K\right]\int_0^T f^2(t)\beta(t)(1-\alpha(t))dt = \\ = \left[1 + K\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2 dt\right]\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt. \quad (19)$$

Уведемо позначення для такого коефіцієнта L:

$$L := \frac{\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt + K}{1 + K\int_0^T f^2(t)(1-\alpha(t))^2 dt},$$

тоді рівність (19) можна переписати у вигляді

$$\int_0^T f^2(t)\beta(t)[\alpha(t) - L(1-\alpha(t))]dt = 0. \quad (20)$$

Оскільки рівність (20) виконується для довільної обмеженої функції $\beta = \beta(t)$, то можна покласти:

$$\beta(t) = (1+L)\alpha(t) - L.$$

Тоді рівняння (20) набуває вигляду

$$\int_0^T f^2(t)(\alpha(t) - L(1-\alpha(t)))^2 dt = 0, \quad (21)$$

звідки $\alpha(t) = \alpha := \frac{L}{1+L}$, тобто $L = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. При сталому α маємо рівності

$$K = \exp\{c(2\alpha-1)\},\ L = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha^2 c + \exp\{c(2\alpha-1)\}}{1+\exp\{c(2\alpha-1)\}c(1-\alpha)^2},$$

й остання рівність еквівалентна такому трансцендентному рівнянню:

$$(\alpha^2 c - \alpha c + 1)((1-\alpha)\exp\{c(2\alpha-1)\} - \alpha) = 0. \quad (22)$$

У статті [3] доведено, що ліва частина рівняння (22) — це похідна нашого ентропійного функціонала з точністю до множника $e^{c\alpha^2}$, якщо розглядати його тільки при сталих $\alpha \in [0,1]$. Оскільки ми довели, що екстремальні значення нашого ентропійного функціонала досягаються саме при сталих α, тепер потрібно знайти корені рівняння (22), з'ясувати, які з них відповідають максимумам або мінімумам, і порівняти відповідні значення зі значеннями ентропійного функціонала при $\alpha = 0, 1$. Позначимо $x = 1-\alpha$, при цьому перший множник у (22) не зміниться, а другий буде дорівнювати $x\exp\{c(1-2x)\} + x - 1$. Сам функціонал виглядатиме так:

$$\mathsf{H}(\mathsf{P}, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) = c/2((1-x)^2\exp\{cx^2\} + x^2\exp\{c(1-x)^2\}). \quad (23)$$

Його значення в точках 0 та 1/2 дорівнюють, відповідно, $c/2$ та $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$. Розглянемо окремо рівняння

$$x\exp\{c(1-2x)\} + x - 1 = 0. \quad (24)$$

У статті [3] рівняння (22) проаналізовано, при цьому одержано такі результати. Перший множник має корені лише при $c \geq 4$. У випадку, коли $c \leq 2$, другий множник має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$, це точка мінімуму. Відповідно максимум досягається на кінцях відрізка та дорівнює $c/2$. Звідси випливає перше твердження.

Випадок, коли $c > 2$, розглянемо більш детально. Нехай $c \in (2, 4)$. Позначимо

$$z(x) = x\exp\{c(1-2x)\} + x - 1.$$

Для відшукання точок екстремуму функції z знайдемо першу та другу похідні:

$$z'(x) = \mathrm{e}^{c-2xc}(1-2xc)+1,$$
$$z''(x) = 4c(xc-1)\mathrm{e}^{c-2xc}.$$

Друга похідна змінює знак у точці $\frac{1}{c}$, а саме $z''(x)<0$, якщо $x\in[0,\frac{1}{c})$, та $z''(x)\geq 0$, якщо $x\in(\frac{1}{c},1]$. Для знаку першої похідної $z'(x)$ маємо такі випадки:

$$z'(x)>0 \text{ при } x\in[0,x_1), \quad \text{де} \quad x_1\in\left(0,\frac{1}{c}\right),$$
$$z'(x)<0 \text{ при } x\in[x_1,x_2), \quad \text{де} \quad x_2\in\left(1-\frac{1}{c},1\right),$$
$$z'(x)>0 \text{ при } x\in[x_2,1].$$

Як наслідок, функція $z(x)$ не спадає на інтервалі $[0,x_1)$, потім не зростає на інтервалі $[x_1,x_2)$ та знову не спадає на $[x_2,1]$. Оскільки $z(0)=-1<0, z(1/2)=0$ та $z(1)= =e^{-c}>0$, ми робимо висновок про те, що $z(x)$ має три корені: $x_1\in(0,1/c)$, $x_2=\frac{1}{2}$ та $x_3\in(1-1/c,1)$. Отже, при $2<c<4$ функціонал набуває мінімального значення в точках x_1,x_3, і воно дорівнює $\frac{1-x_1}{2}\exp\{cx_1^2\}$. Порівнюючи значення функціонала в x_2 та на кінцях відрізка, отримуємо, що максимальне значення дорівнює $c/2$, коли $c\in(2,\ln 16)$, та $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$, коли $c\in[\ln 16,4)$.

Нехай тепер $c\geq 4$. На цьому проміжку рівняння (22) має 5 коренів:

$$x_1\in(0,1/c), \quad x_2=\frac{1}{2}, \quad x_3\in(1-1/c,1), \quad \text{та} \quad x_{4,5}=\frac{\sqrt{c}\pm\sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

Позначимо ліву частину рівняння (22) через y. Враховуючи антисиметричність функції y відносно $x=\frac{1}{2}$, отримуємо, що точками локального мінімуму є $x_1\in(0,1/c)$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3\in(1-1/c,1)$. Досить порівняти значення функціонала в точках x_1 та $x_2=\frac{1}{2}$. Для цього розглянемо функцію $g(x)=e^{cx^2}(1-x),\quad x\in[0,1]$. Її перша похідна є $g'(x)=e^{cx^2}(2cx-2cx^2-1)$ та має два корені $\tilde{x}_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{c}}$. Дійсно, $\tilde{x}_1<\frac{1}{2}<\tilde{x}_2$, та $g'(x)>0$ для $x\in(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$, $g'(x)<0$ для $x\in(0,\tilde{x}_1)\cup(\tilde{x}_2,1)$.

Крім того, у точці $\tilde{x}_1$ $z(\tilde{x}_1)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{c}}\right)\left(e^{c\sqrt{1-\frac{2}{c}}}+1\right)-1>0$. Ця нерівність еквівалентна такій

$$e^{\sqrt{c^2-2c}}>\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{c}}}{1-\sqrt{1-\frac{2}{c}}}.$$

Перепишемо праву частину у вигляді

$$\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{c}}}{1-\sqrt{1-\frac{2}{c}}}=\left(c-1-\sqrt{c^2-2c}\right),$$

тоді для $u=\sqrt{c^2-2c}$ маємо

$$e^u>1+u+\frac{u^2}{2}=1+\sqrt{c^2-2c}+\frac{c^2}{2}-c>c-1-\sqrt{c^2-2c} \quad \text{при} \quad c\geq 4.$$

Це означає, що $\tilde{x}_1>x_1$. Зауважимо, що $g(1)=1$ та до $\tilde{x}_1$ $g'(x)<0$.

Порівнюючи значення $g'(x)$ у точках 0 та $\frac{1}{2}$, ми отримуємо, що $g'(0)<g'\left(\frac{1}{2}\right)$. Більше того, маємо, що значення функціонала в точці x_1 менше за значення в $\frac{1}{2}$.

У випадку, коли $c=4$, $x_2=x_4=x_5=\frac{1}{2}$ та максимальне значення дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$. При $c>4$ максимум досягається в точках, які є коренями квадратного полінома, а саме $x_{4,5}=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4c}}{2c}=\frac{\sqrt{c}\pm\sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}$. Визначимо, у яких інтервалах містяться корені

x_4 та x_5. Порівняємо x_4 з $\frac{1}{c}$, маємо $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{c}} > \frac{1}{c}$. Отже, корінь $x_4 \in (\frac{1}{c}, \frac{1}{2})$ та $x_5 \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{c})$. Максимальне значення дорівнює

$$\frac{1}{4}\exp\left\{\frac{(c-2) - \sqrt{c(c-4)}}{2}\right\}\Big((c-2) - \sqrt{c(c-4)} -$$
$$-\Big(\sqrt{c(c-4)} - (c-2)\Big)\exp\Big\{\sqrt{c(c-4)}\Big\}\Big).$$

Це справді є найбільшим значенням функціонала, що випливає з наступних міркувань: між точками максимуму x_4 та x_5 міститься точка локального мінімуму $x = 1/2$. Отже, значення функції в точці $x_2 = 1/2$ менше, ніж значення в точках x_4 та x_5, а, як уже було сказано, при $c > 4$ значення в точці $x = 1/2$, яке дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$, перевищує значення на кінцях, яке дорівнює $c/2$. Отже, теорему доведено. □

4. Висновки

У статті доведено теорему про екстремуми функціонала, побудованого на трьох імовірнісних мірах, і такого, що містить двічі неперервно диференційовну функцію, а також знайдено екстремуми функціоналу ентропійного типу, побудованого на трьох імовірнісних мірах.

Список літератури

1. H. Follmer, A. Schied, *Stochastic finance: an introduction in discrete time*, Walter de Gruyte, Berlin (2002), 121–130.
2. C. Leonard, *Minimization of entropy functionals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2008), Volume 346, Issue 1, 183–204.
3. Y. Mishura, H. Zhelezniak, *Extreme measures for entropy functionals*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics (2017), no. 4, 15–20.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: hanna.zhelezniak@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 15.10.2018

CALCULATION OF EXTREMUMS OF ENTROPY FUNCTIONALS

Y. S. MISHURA, H. S. ZHELEZNIAK

Abstract. We consider a sum of two independent Wiener processes with a drift and construct new probabilistic measures, with respect to which the drift is zero. Among these measures, we are looking for those that minimize or maximize certain including entropy functionals.

ОТЫСКАНИЕ ЭСТРЕМУМОВ ЭНТРОПИЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ю. С. МИШУРА, А. С. ЖЕЛЕЗНЯК

Аннотация. Рассмотрим сумму двух независимых винеровских процессов со сносом и построим семью вероятностных мер, относительно которых снос равен нулю. Среди этих мер ищем те, которые минимизируют или максимизируют определенные функционалы, в том числе функционалы энтропийного типа.