Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 187–202

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 187–202

УДК 519.21

ВЛАСТИВОСТІ ТА РОЗПОДІЛИ ЗНАЧЕНЬ ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ Q_2-ЗОБРАЖЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ, С. П. РАТУШНЯК

Анотація. При заданому Q_2-зображенні чисел $x \in [0;1]$, визначеному параметром $q_0 \in (0;1)$ і розкладом числа $x \in [0;1]$ у ряд

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_k \in \{0,1\} \equiv A$, $q_1 \equiv 1 - q_0$, вивчаються структурні, локальні та глобальні тополого-метричні і фрактальні властивості функції f_φ, означеної рівністю

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\ldots\varphi(\alpha_{n-1},\alpha_n)\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots},$$

де φ — наперед задана функція ($\varphi\colon A^2 \to A$).

Для випадкової величини $Y = f_\varphi(X)$, де X — випадкова величина з відомим розподілом, вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) та спектральні властивості (властивості множини точок зростання функції розподілу).

Ключові слова і фрази. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа, класичне двійкове зображення чисел, оператор лівостороннього зсуву цифр зображення, інверсор цифр зображення, сингулярна функція, фрактальна функція, множина рівня функції, розподіл значень функції.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60E05, 28A80, 97F50, 26A30.

1. Вступ

Засоби теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), ідеї самоподібності, самоафінності та автомодельності суттєво розширили можливості вивчати функції і розподіли ймовірностей, що мають іррегулярну локальну будову («поведінку») і складні (неоднорідні) локальні тополого-метричні властивості. Ефективним засобом їх аналітичного задання та дослідження є різні системи зображення (кодування) дійсних чисел [2, 4, 5, 11, 20, 21, 23], які можуть тонко «відчувати» локальну структуру об'єкта. Це власне фрактальні системи координат [19].

Ми кажемо, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: функція має

(1) хоча б одну фрактальну множину рівня [17],
(2) самоподібний, самоафінний, автомодельний або фрактальний графік (як множину в R^2) [15],
(3) фрактальну множину точок несталості (зростання, спадання) [17],
(4) фрактальну множину особливостей (диференціального [3, 13, 14] або іншого характеру),
(5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, зосереджений на фракталі [16];
(6) трансформує фрактальну розмірність [1] принаймні однієї борелівської підмножини $[0;1]$.

Навіть у метричному просторі $C[0;1]$ більшість (у топологічному сенсі) функцій має фрактальні властивості. Одним із продуктивних методів задання таких функцій є задання їх перетворювачами цифр або автоматами зі скінченною пам'яттю [6].

Основним об'єктом нашого інтересу є розподіл випадкової величини $Y = f(X)$, де f – фрактальна функція (функція із фрактальними властивостями), а X — випадкова величина з відомим розподілом. Його змістовний теоретичний аналіз можливий при умові, що задання f і X є узгодженими.

Серед різноманіття систем кодування (зображення) дійсних чисел [2, 5, 11, 20] окреме місце займають двосимвольні системи [4, 8, 10, 12, 22]. У цій роботі, використовуючи самоподібну двосимвольну систему зображення чисел – Q_2-зображення, тополого-метрична та ймовірнісна теорії якої є достатньо розвинутими [8, 11, 12, 18], ми вивчаємо клас об'єктів, що мають фрактальні властивості.

Нехай $A \equiv \{0,1\}$ — алфавіт, $L \equiv A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; $0 < q_0$ — задане дійсне число (параметр), менше 1, $q_1 \equiv 1-q_0$. Відома теорема [8, 11] стверджує: *для довільного* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L$ *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

$\beta_0 \equiv 0$, $\beta_1 \equiv q_0$, тобто $\beta_i = iq_{1-i}$. При цьому ряд (1) називається Q_2-*представленням* числа x, а формальний запис $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — Q_2-*зображенням* числа x і ряду (1). При цьому число $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається *n-ю цифрою* даного зображення. Зауважимо, що Q_2-представлення є узагальненням класичного двійкового розкладу числа і збігається з ним при $q_0 = \frac{1}{2}$.

Нагадаємо, що зліченна множина чисел має два Q_2-представлення. Це числа із зображеннями

$$\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n 1(0)} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n 0(1)}.$$

Такі називаються Q_2-*раціональними* числами, решта чисел мають єдине зображення і називаються Q_2-*ірраціональними*. Цифра $\alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією для Q_2-ірраціональних значень x. Заради коректності означення основного об'єкта дослідження і функцій $\alpha_n(x)$ для Q_2-раціональних значень x домовимося використовувати лише перше із зображень Q_2-раціональних чисел.

Нагадаємо [8, 11], що *циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх тих чисел відрізка $[0;1]$, що мають Q_2-зображення, перші m цифр яких відповідно рівні $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком

$$\left[\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}; \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(1)}\right],$$

довжина якого обчислюється за формулою $|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{j=1}^{m} q_{c_j}$. Циліндри одного рангу не перекриваються і в об'єднанні утворюють весь відрізок $[0;1]$. Кінці кожного із циліндрів є Q_2-раціональними числами. Ключовими поняттями метричної теорії Q_2-зображення дійсних чисел є *основне метричне відношення*, яке виражає рівність

$$|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i}| = q_i |\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m}|.$$

Зауваження 1. Далі, враховуючи введену вище домовленість, під циліндром $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ ми розуміємо піввідрізок $[\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}; \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(1)})$.

Нагадаємо [7], що лебегівською структурою міри μ і відповідної їй функції розподілу $F_\mu(x) = \mu\{(-\infty; x)\}$ називаються розклади

$$\mu(\cdot) = \alpha_1\mu_d(\cdot) + \alpha_2\mu_{ac}(\cdot) + \alpha_3\mu_s(\cdot), \quad F_\mu(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, μ_d, μ_{ac}, μ_s — дискретна (чисто атомарна), абсолютно неперервна, сингулярна (ортогональна мірі Лебега) ймовірнісні міри (компоненти); F_d — функція стрибків, F_{ac} — абсолютно неперервна функція, F_s — сингулярно неперервна функції розподілу.

Якщо один із коефіцієнтів $\alpha_i = 1$, то кажуть, що ймовірнісна міра (функція розподілу) має чистий лебегівський тип. У протилежному випадку, кажуть, що міра (функція розподілу) є нетривіальною сумішшю тих компонент, коефіцієнти при яких відмінні від нуля.

Ще донедавна сингулярні міри (як і сингулярні функції) представляли найменш вивчений клас із трьох існуючих класів чистих лебегівських типів мір. Сьогодні є актуальною задача знайти природну нішу існування нетривіальних сумішей сингулярних розподілів (ймовірнісних мір) з іншими. «Перспективними» в цьому відношенні є розподіли значень фрактальних функцій випадкових величин [17]. Разом із цим, методологія дослідження таких об'єктів бідна. На цьому шляху ми пропонуємо результати дослідження об'єктів цієї роботи.

2. Об'єкт дослідження

Розглядається функція f_φ, означена на $[0;1)$ рівністю

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\ldots\varphi(\alpha_{n-1},\alpha_n)\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots}, \qquad (2)$$

де φ— фінітна функція, яка визначена на чотириелементній множині $A^2 \equiv A \times A$ і набуває значень із множини A, а $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Q_2-зображення числа $x \in [0,1)$, означене рівністю (1).

Існує 16 різних функцій f_φ, породжених 16 різними функціями φ. Їх сім'ю позначимо через Φ. Функції φ, $\overline{\varphi}$ та їм відповідні f_φ і $f_{\overline{\varphi}}$ називаються попарно двоїстими, якщо для будь-якої пари $(i,j) \in A^2$ виконується рівність $\overline{\varphi}(i,j) = 1 - \varphi(i,j)$. Двоїстими є тривіальні ("вироджені") функції $f_\varphi = 0$, $f_{\overline{\varphi}} = 1$, породжені функціями $\varphi(i,j) = 0$ і $\overline{\varphi}(i,j) = 1$ відповідно. Серед решти 14 функцій існує 7 пар двоїстих функцій, які мають на перший погляд «схожі» властивості й визначаються з точністю до «симетрії» цифр зображення. Це функції f_φ, породжені наступними функціями φ:

$$\varphi_1(i,j) = i \cdot j; \quad \varphi_2(i,j) = |i-j|i; \quad \varphi_3(i,j) = i; \quad \varphi_4(i,j) = |i-j|j;$$
$$\varphi_5(i,j) = j; \quad \varphi_6(i,j) = |i-j|; \quad \varphi_7(i,j) = i \cdot j + |i-j|,$$

та їх "двійниками". Звернемо увагу на єдину в сім'ї Φ пару неперервних двоїстих функцій. Вони породжені функціями $\varphi_3(i,j) = i$ і $\overline{\varphi}_3(i,j) = 1 - i$. Легко бачити, що

$$f_{\varphi_3}(x) = f_{\varphi_3}(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x;$$
$$f_{\overline{\varphi}_3}(x) = f_{\overline{\varphi}_3}(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots} \equiv I(x).$$

Зауважимо, що функція $f_{\overline{\varphi}_3}$ називається *інверсором* цифр Q_2-зображення чисел. Її властивості вивчались у роботі [18], де доведено, що це строго спадна, а при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ сингулярна функція (неперервна функція, похідна якої майже скрізь у розумінні міри Лебега рівна нулю). Тому формальна схожість двоїстих функцій значною мірою є ілюзорною.

Для пари двоїстих функцій f_{φ_5} і $f_{\overline{\varphi}_5}$, породжених $\varphi_5(i,j) = j$ і $\overline{\varphi}_5(i,j) = 1 - j$ відповідно, справедливі рівності:

$$f_{\varphi_5}(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} \equiv w(x) = \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}}x - \frac{\beta_{\alpha_1(x)}}{q_{\alpha_1(x)}},$$

$$f_{\overline{\varphi}_5}(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_2][1-\alpha_3]\ldots[1-\alpha_n]\ldots} = I(w(x)),$$

де $I(x)-$ інверсор цифр Q_2-зображення чисел, $w(x)-$ оператор лівостороннього зсуву цифр Q_2-зображення чисел [9]. Функція $w(x)$ відіграє важливу роль у метричній та ймовірнісній теоріях чисел в їх Q_2-зображенні, а також в ергодичній теорії [11] та теорії функцій і перетворень простору, що зберігають хвости зображення чисел. Легко бачити істинність такого твердження.

Лема 1. *Для двоїстих функцій f_φ і $f_{\overline{\varphi}}$ справедлива рівність: $f_{\overline{\varphi}}(x) = I(f_\varphi(x))$.*

Зауваження 2. Указане твердження дає підстави частково обмежитись вивченням властивостей лише однієї із двоїстих функцій.

Один з аспектів властивостей функції f_φ розкривають властивості розподілу випадкової величини $Y = f_\varphi(X)$, де X — випадкова величина з наперед заданим розподілом, зокрема, рівномірним. Нас цікавить випадок, коли $X = \Delta^{Q_2}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ є випадковою величиною з незалежними цифрами Q_2-зображення із заданими розподілами

$$P\{\eta_n = i\} = p_{in} \geq 0, \quad i = 0, 1, \ \ p_{0n} + p_{1n} = 1,$$

який є рівномірним при $p_{0n} = q_0$. Структура і властивості розподілу випадкової величини X добре вивчено [8, 11]. Вираз її функції розподілу має вигляд

$$F_X(x) = \rho_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\rho_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)j}),$$

де $\alpha_k(x) - k$-та цифра Q_2-зображення числа x, $\rho_{0k} = 0, \rho_{1k} = p_{0k}$.

У цій роботі ми зосередимо увагу на випадку однакової розподіленості цифр випадкової величини X, а саме: $p_{0k} = p_0$, $p_{1k} = 1 - p_0$. У цьому випадку функція розподілу $F_X(x)$, при умові $0 < p_0 < 1$, породжує нове Q_2'-зображення ($Q_2' = \{p_0; p_1\}$) чисел відрізка $[0; 1]$.

Теорема 1. *[8, 11] Випадкова величина X має чистий лебегівський тип розподілу, а саме:*

(1) чисто дискретний (і навіть вироджений) тоді й тільки тоді, коли $p_0p_1 = 0$;
(2) абсолютно неперервний (навіть рівномірний) тоді й лише тоді, коли $p_0 = q_0$;
(3) чисто сингулярний тоді й тільки тоді, коли $p_0p_1 \neq 0$ і $p_0 \neq q_0$.

Основним об'єктом розгляду у цій роботі є дві функції f_{φ_2} і f_{φ_6} та розподіли їх значень.

3. Множини значень та рівнів функцій

3.1. Множина значень функції f_{φ_2}.

Лема 2. *Прообразом циліндра m-го рангу функції f_φ, при $\varphi = \varphi_2$ є або порожня множина, або циліндр $(m + 1)$-го рангу, або об'єднання циліндрів $(m + 1)$-го рангу.*

Доведення. Очевидно, що $f(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}) = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m}$ тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \varphi(\alpha_1, \alpha_2) = c_1, \\ \varphi(\alpha_2, \alpha_3) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(\alpha_m, \alpha_{m+1}) = c_m. \end{cases} \tag{3}$$

Ця система може не мати розв'язків, може мати один або декілька розв'язків, причому розв'язком є впорядкований набір з $(m + 1)$-ої цифри.

Якщо існує деяке $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ таке, що $c_k c_{k+1} = 11$, то система (3) не матиме розв'язків. Справді, враховуючи вираз функції $\varphi_2 = |i-j|i$, маємо систему

$$\begin{cases} |\alpha_k - \alpha_{k+1}|\alpha_k = 1, \\ |\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}|\alpha_{k+1} = 1, \end{cases}$$

яка несумісна. Отже, прообразом циліндра $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ буде порожня множина.

Якщо $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, то кожен з упорядкованих наборів

$$(\underbrace{0\ldots0}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{m+1-k}), \quad k = \overline{0, m+1},$$

є розв'язком системи (3). Отже, прообразом циліндра m-го $\Delta^{Q_2}_{00\ldots0}$ є об'єднання $m+2$ циліндрів.

Таким чином, система може не мати розв'язків або ж мати їх скінченну кількість. $\square$

Теорема 2. *При $\varphi(i,j) = \varphi_2(i,j) = |i-j|i$ множиною значень E_{f_φ} функції f_φ є самоподібна множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега)*

$$E_{f_\varphi} = C \equiv C[Q_2, \overline{11}] \equiv \{x : \alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x) \neq 11, k \in N\},$$

яка має самоподібну розмірність, що є розв'язком рівняння

$$q_0^x + (q_0 q_1)^x = 1 \tag{4}$$

і збігається з розмірністю Гаусдорфа–Безиковича.

Доведення. Число $y_0 \in C$ має вигляд

$$\left[\begin{aligned} & y_0 = \Delta^{Q_2}_{(0)}, \\ & y_0 = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_m}1(0)}, \\ & y_0 = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k}1\ldots}, \quad c_k \in N. \end{aligned}\right.$$

Очевидно, що

$$f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(0)}) = \Delta^{Q_2}_{(0)};$$

$$f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2+1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k+1}1(0)}) = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k}1(0)};$$

$$f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2+1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k+1}1\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k}1\ldots}.$$

Отже, $C \subset E_{f_\varphi}$.

Покажемо, що $E_{f_\varphi} \setminus C = \emptyset$. Припустимо супротивне. Нехай $E_{f_\varphi} \setminus C \neq \emptyset$, тобто існує таке $y = \Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$, що для деякого $k \in N$ $\gamma_k(y)\gamma_{k+1}(y) = 11$. Тоді для прообразу $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ значення y маємо систему рівностей

$$\begin{cases} \gamma_k = |\alpha_k - \alpha_{k+1}|\alpha_k = 1, \\ \gamma_{k+1} = |\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}|\alpha_{k+1} = 1, \end{cases}$$

яка несумісна. Це говорить про хибність припущення. Отже, $E_{f_\varphi} = C$.

Оскільки $C = \Delta'_0 \cup \Delta'_{10}$, де $\Delta'_0 = \Delta^{Q_2}_0 \cap C$, $\Delta'_{10} = \Delta^{Q_2}_{10} \cap C$, причому C подібна Δ'_0 з коефіцієнтом подібності q_0, а C подібна Δ'_{10} з коефіцієнтом подібності $q_0 q_1$, то C є самоподібною множиною, розмірність якої є розв'язком рівняння (4). Оскільки множина C задовольняє умову відкритої множини, то її самоподібна розмірність збігається з розмірністю Гаусдорфа–Безиковича. $\square$

Наслідок 1. *При* $q_0 = \frac{1}{2}$ *самоподібна розмірність множини* $E_{f_{\varphi_2}}$ *дорівнює* $\log_2(\sqrt{5}+1)-1$.

3.2. **Множина значень функції** f_{φ_6}.

Теорема 3. *При* $\varphi(i,j)=\varphi_6(i,j)=|i-j|$ *множиною значень* E_{f_φ} *функції* f_φ *є відрізок* $[0;1]$, *причому*

1) $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(0)})=\{\Delta^{Q_2}_{(0)}\}$, $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(1)})=\{\Delta^{Q_2}_{(01)},\Delta^{Q_2}_{(10)}\}$;

2) для Q_2*-ірраціонального значення* y_0 *рівень функції* f_φ *складається із двох точок:*

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}1\ldots})=$$
$$=\{\Delta^{Q_2}_{\underbrace{a\ldots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_2}\underbrace{a\ldots a}_{c_3}\ldots\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_k}\ldots}, a\in\{0;1\}\}, c_i\in N;$$

3) для Q_2*-раціонального значення* y_0 *рівень функції* f_φ *складається із трьох точок:*

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}0(1)})=$$
$$=\{\Delta^{Q_2}_{\underbrace{a\ldots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_2}\ldots\underbrace{a\ldots a}_{c_k}(a[1-a])}, a\in\{0;1\}\}, c_i\in N,$$

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}1(0)})=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{c_k}(0)}, c_i\in N.$$

Доведення. 1) Легко показати, що $f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(10)})=f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(01)})=\Delta^{Q_2}_{(1)}=1$ і $f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(0)})==\Delta^{Q_2}_{(0)}=0$.

2) Будь-яке Q_2-ірраціональне число $y_0\in(0;1]$ можна подати у вигляді

$$[0;1]\ni y_0=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_3-1}1\ldots},\quad \text{де } c_i\in N.$$

Воно, як легко бачити, є образом чисел вигляду

$$x=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{a\ldots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_2}\underbrace{a\ldots a}_{c_3}\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_4}\ldots},\quad \text{де } a\in\{0;1\}.$$

3) Якщо ж y_0 є Q_2-раціональним числом, то його можна зобразити як

$$y_0=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}1(0)}=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}0(1)},\quad \text{де } c_i\in N.$$

Тоді очевидно, що

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}1(0)})=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{c_1}\underbrace{0\ldots0}_{c_2}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{c_k}(0)};$$

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_k-1}0(1)})=$$
$$=\{\Delta^{Q_2}_{\underbrace{a\ldots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\ldots[1-a]}_{c_2}\ldots\underbrace{a\ldots a}_{c_k}(a[1-a])}, a\in\{0;1\}\}.$$

Тоді $E_{f_\varphi} = [0;1]$ і теорему доведено в силу єдиності вказаних зображень. $\square$

3.3. Множини рівнів функції f_{φ_2}.

Теорема 4. *Кожна множина Q_2-раціонального рівня функції f_φ, де $\varphi = \varphi_2(i;j) = |i-j|i$ є скінченною, причому*

1) множини рівнів $y_0 = \Delta^{Q_2}_{(0)}$ і $y_0 = \Delta^{Q_2}_{1(0)}$ одноточкові, а саме:

$$f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(0)}) = \Delta^{Q_2}_{(0)}, \quad f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{1(0)}) = \Delta^{Q_2}_{1(0)};$$

2) множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}1(0)}$ складається із $S = (s_1+1)s_2\ldots s_m$ точок, а саме: з точок

$$x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{k_1}\underbrace{1\cdots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}\underbrace{1\cdots1}_{s_2-k_2}1\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{k_m}\underbrace{1\cdots1}_{s_m-k_m}1(0)}, k_1 = \overline{0,s_1}, k_{i+1} = \overline{1,s_{i+1}}, s_i \in N;$$

3) множина рівня $y_1 = \Delta^{Q_2}_{1\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{s_m}1(0)}$ складається із $S = s_1s_2\ldots s_m$ точок, а саме:

$$f_\varphi^{-1}(y_1) =$$
$$= \{x\colon x = \Delta^{Q_2}_{1\underbrace{0\ldots0}_{k_1}\underbrace{1\ldots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\ldots0}_{k_2}\underbrace{1\ldots1}_{s_2-k_2}\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{k_m}\underbrace{1\ldots1}_{s_m-k_m}1(0)}, k_i = \overline{1,s_i}, s_i \in N, i = \overline{1,m}\}.$$

Доведення. 1) Перше твердження є очевидним.

2) Очевидною також є рівність $f_\varphi(x) = y_0$. Те, що інших прообразів число y_0 не має, випливає з того, що прообразом y_0 є число, Q_2-зображення якого містить рівно m пар послідовних цифр 10, причому їхні місця визначено заданим упорядкованим набором натуральних чисел:

$$s_1+1, s_1+s_2+2, \ldots, s_1+s_2+\ldots+s_m+m.$$

Кількість прообразів числа y_0 є наслідком комбінаторного правила множення.

3) Твердження для значення y_1 функції f_φ обгрунтовується аналогічно. Більше того, друге твердження є окремим випадком третього. Але ми для більшої прозорості викладу віддали перевагу такому формулюванню теореми. $\square$

Теорема 5. *Якщо $\varphi = \varphi_2(i,j) = |i-j|i$ й у зображенні Q_2-ірраціонального числа $\widetilde{y} \in E_{f_\varphi}$ кількість серій нулів із довжиною більшою 1 скінченна, то множина рівня $\widetilde{y}$ функції f_φ є скінченною, у протилежному випадку – континуальною, причому*

1) $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(01)}) = \{\Delta^{Q_2}_{11(01)}, \Delta^{Q_2}_{0(10)}\}$, $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(10)}) = \Delta^{Q_2}_{1(01)}$;

2) $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}(10)\ldots}) =$

$$= \{x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{k_1}\underbrace{1\cdots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}\underbrace{1\cdots1}_{s_2-k_2}1\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{k_m}\underbrace{1\cdots1}_{s_m-k_m}(10)}\},\ k_1 = \overline{0,s_1},\ k_m = \overline{1,s_m},$$
$s_i \in N$, $i = \overline{1,m}$;

3) Q_2-зображення прообразу x числа $y_\bullet = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}1\ldots}$ має вигляд

$$x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{k_1}\underbrace{1\cdots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}\underbrace{1\cdots1}_{s_2-k_2}1\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{k_m}\underbrace{1\cdots1}_{s_m-k_m}1\ldots},$$

$k_1 = \overline{0,s_1}$, $k_m = \overline{1,s_m}$, $s_m \in N, m = 2,3\ldots$;

4) Q_2-зображення прообразу числа $y_* = \Delta^{Q_2}_{1\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}1\ldots}$ *має вигляд*

$$x = \Delta^{Q_2}_{1\underbrace{0\cdots0}_{k_1}\underbrace{1\cdots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}\underbrace{1\cdots1}_{s_2-k_2}1\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{k_m}\underbrace{1\cdots1}_{s_m-k_m}1\ldots}, k_m = \overline{1, s_m},\ s_m \in N, m = 1, 2, \ldots$$

Доведення. Рівності 1) є очевидними. Зрозуміло, що прообраз $x = f_\varphi^{-1}(\widetilde{y})$ значення $\widetilde{y} = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}(10)\ldots}$ містить період (10), який починається із $(s_1+\cdots+s_m+$ $+m)$-го місця. У цьому випадку потужність множини рівня $\widetilde{y}$ обчислюється за формулою $S = (s_1+1)s_2\cdot\ldots\cdot s_m$, обгрунтування якої аналогічне до наведеного при доведенні попередньої теореми.

Нехай тепер кількість серій нулів із потужністю, більшою за 1, є нескінченною.

Зауважимо, що структура Q_2-зображення числа $y_\bullet$ однозначно визначається послідовністю натуральних чисел (s_m). Тому легко бачити, що у Q_2-зображенні прообразу $x = x(s_m)$ числа $y_\bullet$ серії нулів та одиниць чергуються, причому переходи серій одиниць у серії нулів здійснюються лише на такій послідовності місць:

$$l_m = s_1 + s_2 + .. + s_m + m,\ m = 1, 2, \ldots$$

Отже, $f_\varphi(x) = y_\bullet$.

Розглянемо спочатку випадок, коли серії нулів однакові й містять дві цифри, тобто $s_m = 2$. Тоді маємо наступне Q_2-зображення $y = \Delta^{Q_2}_{(001)}$. Очевидно, що

$$f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(001)}) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(011)}) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{1(110)}) = \Delta^{Q_2}_{(001)}.$$

Але тоді й $f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(001011)}) = \Delta^{Q_2}_{(001)}$, проте $f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{(001110)}) \neq \Delta^{Q_2}_{(001)}$. Тобто різні варіанти комбінацій трійок цифр "001" і "011"даватимуть $\Delta^{Q_2}_{(001)}$. Тоді рівень $\Delta^{Q_2}_{(001)}$ складатиметься принаймні з точок, що у своєму Q_2-зображенні матимуть послідовність трійок "001" і "011". Тобто $f_\varphi^{-1}(\Delta^{Q_2}_{(001)}) \supset \{x\colon x = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}, c_{3m-2}c_{3m-1}c_{3m} \in$ $\in \{\overline{001}, \overline{011}\}, i \in N\}$. Остання множина має потужність континууму, оскільки на нескінченній кількості місць у зображенні прообразу значення $y_\bullet$ існує альтернатива (два різні можливі варіанти). Отже, континуальною є і множина $f_\varphi^{-1}(y_\bullet)$.

Якщо окремі серії нулів мають більшу довжину, то на «їхніх місцях» кількість альтернатив лише збільшується (дивись міркування при доведенні 2-го твердження). Якщо $s_m = 1$, тобто $y_\bullet = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_{m-1}}101\underbrace{0\cdots0}_{s_{m+1}}1\ldots}$, то для прообразу x числа $y_\bullet$ не існує альтернатив для $(j-1)$, j, $(j+1)$-ї цифр, а саме: $\alpha_{j-1}(x) = 1 = \alpha_{j+1}(x)$, $\alpha_j(x) = 0$, коли $j = s_1 + s_2 + \ldots + s_m + m - 1$. Але альтернативи існують на нескінченній кількості місць, коли $s_m > 1$ для нескінченної множини значень m. Тому в цьому випадку множина рівня $y_\bullet$ є континуальною.

Доведення рівності 4) аналогічне до наведеного. □

4. Властивості графіка функції

Нагадаємо, що множина $E \subset R^2$ називається N-самоафінною множиною, якщо $E = g_1(E) \cup g_2(E) \cup \cdots \cup g_n(E) \cup \cdots$, де g_n — афінне перетворення площини, причому $g_i \neq g_j$, коли $i \neq j$.

Якщо $E \subset R^2$ є самоафінною множиною, причому

$$g_n\colon \begin{cases} x = a^{(n)}_{11}x + a^{(n)}_{12}y + a^{(n)}_{10}, \\ y = a^{(n)}_{21}x + a^{(n)}_{22}y + a^{(n)}_{20}, \end{cases}$$

то число $\alpha_a(E) = \sup_k\{x\colon \sum_{n=1}^{k} |\begin{vmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} \end{vmatrix}|^{\frac{x}{2}} = 1\}$ називається самоафінною розмірністю множини E.

4.1. **Властивості графіка функції f_{φ_2}.**

Теорема 6. *Графік $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = \{(x;y)\colon x \in [0;1), y = f_{\varphi_2}(x)\}$ функції f_{φ_2} є N-самоафінною множиною, причому*

$$\Gamma_{f_{\varphi_2}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_n(\Gamma_{f_{\varphi_2}}),$$

де δ_0 та δ_n — афінні перетворення

$$\delta_0\colon \begin{cases} x' = q_0 x; \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad \delta_n\colon \begin{cases} x' = q_1^n q_0 x + q_0 \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_1^i; \\ y' = q_0^n q_1 y + q_0^n, \quad n \in N. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $G \equiv \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_1(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_2(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \ldots \cup \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \ldots$ Доведемо, що $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = G$. Спочатку покажемо, що $G \subset \Gamma_{f_{\varphi_2}}$. Розглянемо довільну точку $M'(x_{M'}; y_{M'}) \in G$. Тоді існує такий номер k, що $M' \in \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$, де $M' = \delta_k(M)$, $M \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$. Якщо $k = 0$, то

$$\begin{cases} x_{M'} = x' = q_0 x = \Delta^{Q_2}_{0\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}, \\ y_{M'} = y' = q_0 y = \Delta^{Q_2}_{0\alpha_1(y)\alpha_2(y)\ldots\alpha_n(y)\ldots}. \end{cases}$$

Очевидно, що $f(x_{M'}) = y_{M'}$, а отже, $M' \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$. Нехай $k \in N$, тобто

$$\begin{cases} x_{M'} = x' = q_1^k q_0 x + q_0 \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_1^i = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}, \\ y_{M'} = y' = q_0^k q_1 y + q_0^k = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}10\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}. \end{cases}$$

Легко бачити, що $y_{M'} = f_{\varphi_2}(x_{M'})$, тобто $M' \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$. Отже, $G \subset \Gamma_{f_{\varphi_2}}$.

Покажемо, що $\Gamma_{f_{\varphi_2}} \subset G$. Нехай $M(x,y) \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$, тобто $y = f_{\varphi_2}(x)$, $x \in [0;1)$.

Якщо $x = \Delta^{Q_2}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots} = q_0\widetilde{x}$, де $\widetilde{x} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}$, то $y = f_\varphi(x) = \Delta^{Q_2}_{0\gamma_2\gamma 3} = q_0\widetilde{y}$, де $\widetilde{y} = \Delta^{Q_2}_{\gamma_2\gamma_3\ldots}$, і $M \in \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$, а отже, $M \in G$. Якщо

$$x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{i}0\alpha_{i+2}\alpha_{i+3}\ldots} = q_1^i q_0 \widetilde{x} + q_0 \sum_{j=0}^{i} q_1^j, \text{ де } \widetilde{x} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_{i+2}\alpha_{i+3}\ldots},$$

то

$$f_{\varphi_2}(x) = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{i-1}10\gamma_{i+2}\gamma_{i+3}\ldots} = q_0^i q_1 \widetilde{y} + q_0^i, \text{ де } \widetilde{y} = \Delta^{Q_2}_{\gamma_{i+2}\gamma_{i+3}\ldots}.$$

Отже, $M \in \delta_i(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$, $\Gamma_{f_{\varphi_2}} \subset G$. Що й вимагалося довести. □

Наслідок 2. *N-самоафінна розмірність графіка $\Gamma_{f_{\varphi_2}}$ функції f_{φ_2} є розв'язком рівняння*

$$q_0^x + \frac{(q_0 q_1)^x}{1 - (q_0 q_1)^{\frac{x}{2}}} = 1. \qquad (5)$$

Вона при $q_0 = \frac{1}{2}$ дорівнює 1.

Справді рівняння для визначення N-самоафінної розмірності графіка функції має вигляд
$$\begin{vmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} q_1^n q_0 & 0 \\ 0 & q_0^n q_1 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} = 1.$$
Воно після згортання лівої частини набуває вигляду (5).

4.2. **Властивості графіка функції f_{φ_6}.**

Лема 3. *Графік $\Gamma_{f_{\varphi_6}}$ функції f_{φ_6} на множині Q_2-ірраціональних точок має таку "симетрію":*
$$f_{\varphi_6}(x) = f_{\varphi_6}(I(x)), \text{ де } I(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]\ldots}.$$

Доведення. Згідно з означенням функції для довільного Q_2-ірраціонального числа $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\ldots}$ маємо
$$f_{\varphi_6}(x) = \Delta^{Q_2}_{|\alpha_1-\alpha_2||\alpha_2-\alpha_3|\ldots|\alpha_{k-1}-\alpha_k|\ldots},$$
$$I(x) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_{k-1}][1-\alpha_k]\ldots}.$$
Тоді
$$f_{\varphi_6}(I(x)) = \Delta^{Q_2}_{|1-\alpha_1-1+\alpha_2||1-\alpha_2-1+\alpha_3|\ldots|1-\alpha_{k-1}-1+\alpha_k|\ldots} = \\ = \Delta^{Q_2}_{|\alpha_2-\alpha_1||\alpha_3-\alpha_2|\ldots|\alpha_k-\alpha_{k-1}|\ldots} = f_{\varphi_6}(x).$$
Лему доведено. □

Теорема 7. *Для графіка $\Gamma_{f_{\varphi_6}}$ функції f_{φ_6} справедлива така властивість автомодельної симетрії:*
$$\Gamma_{f_{\varphi_6}} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = (\Gamma_{00} \cup \Gamma_{10}) \cup (\Gamma_{01} \cup \Gamma_{11}), \tag{6}$$
де
$$\Gamma_i = \{M(x, f_{\varphi_6}(x)) \colon x = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}, (\alpha_n) \in L\}, i \in \{0,1\},$$
$$\Gamma_{ij} = \{M(x, f_{\varphi_6}(x)) \colon x = \Delta^{Q_2}_{ij\alpha_3\ldots\alpha_n}, (\alpha_n) \in L\}, i, j \in \{0,1\},$$
$$\Gamma_{ij} = g_{ij}(\Gamma_j), \tag{7}$$
$$g_{00} \colon \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_0 y; \end{cases} \quad g_{10} \colon \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = q_1 y + q_0; \end{cases} \quad g_{01} \colon \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_1 y + q_0; \end{cases} \quad g_{11} \colon \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = q_0 y. \end{cases}$$

Доведення. Рівність (6) очевидна. Доведемо рівність (7).

1. Нехай $M(x; y) \in \Gamma_0$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $y = f_{\varphi_6}(x) = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$. Тоді

1) для $M'(x'; y') = g_{00}(M)$, тобто
$$\begin{cases} x' = q_0 x = \Delta^{Q_2}_{00\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = q_0 y = \Delta^{Q_2}_{0c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \end{cases}$$
очевидно, що $y' = f_{\varphi_6}(x')$ і $M' \in \Gamma_{00}$. А отже, $g_{00}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{00}$.

2) для $M'(x'; y') = g_{10}(M)$, тобто
$$\begin{cases} x' = q_1 x + q_0 = \Delta^{Q_2}_{10\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = q_1 y + q_0 = \Delta^{Q_2}_{1c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \end{cases}$$
маємо $y' = f_{\varphi_6}(x')$ і $M' \in \Gamma_{10}$. А отже, $g_{10}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{10}$.

2. Нехай $M(x; y) \in \Gamma_1$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $y = f_{\varphi_6}(x) = \Delta^{Q_2}_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$. Тоді

1) для $M'(x'; y') = g_{01}(M)$, тобто
$$\begin{cases} x' = q_0 x = \Delta^{Q_2}_{01\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = q_1 y + q_0 = \Delta^{Q_2}_{1d_1d_2\ldots d_n\ldots}, \end{cases}$$
очевидно, що $y' = f_{\varphi_6}(x')$ і $M' \in \Gamma_{01}$. А отже, $g_{01}(\Gamma_1) \subset \Gamma_{01}$.

2) Для $M'(x';y') = g_{11}(M)$, тобто
$$\begin{cases} x' = q_1 x + q_0 = \Delta^{Q_2}_{11\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = q_0 y = \Delta^{Q_2}_{0d_1d_2\ldots d_n\ldots}, \end{cases}$$
маємо $y' = f_{\varphi_6}(x')$ і $M' \in \Gamma_{11}$. А отже, $g_{11}(\Gamma_1) \subset \Gamma_{11}$.

Включення $\Gamma_{ij} \subset g_{ij}(\Gamma_j)$ є очевидним. Тому рівність (7) доведено. □

5. Розподіл значень функції

5.1. **Розподіл значень функції** $f_{\varphi_2}(x)$**.** Нехай (η_k)– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення 0 і 1 з імовірностями p_0 і p_1 відповідно, тобто
$$P\{\eta_k = 0\} = p_0, \qquad P\{\eta_k = 1\} = p_1, p_0 + p_1 = 1,\ \forall k \in N.$$

Лема 4. *Випадкова величина* $\xi_k \equiv \varphi_2(\eta_k, \eta_{k+1})$ *набуває значень* 0 *і* 1 *з імовірностями* $1 - p_0p_1$ *і* p_0p_1 *відповідно.*

Доведення. Враховуючи незалежність випадкових величин η_k, маємо
$$P\{\xi_k = 1\} = P\{\eta_k > \eta_{k+1}\} = P\{\eta_k = 1\}P\{\eta_{k+1} = 0\} = p_0p_1;$$
$$P\{\xi_k = 0\} = 1 - P\{\xi_k = 1\} = 1 - p_0p_1 = p_0^2 + p_0p_1 + p_1^2.$$
□

Зауваження 3. Коректність задання випадкової величини обґрунтовується аналогічно як і в лемі 5.

Теорема 8. *Нехай* $\varphi = \varphi_2(i;j) = |i-j|i$. *Якщо розподіл* X *не є виродженим, тобто є неперервним, то випадкова величина* $Y = f_\varphi(X)$ *має сингулярно неперервний розподіл канторівського типу.*

Доведення. Для обґрунтування висновку теореми досить довести, що розподіл випадкової величини Y не має атомів. Згідно з означенням неперервності розподілу для цього досить довести, що ймовірність кожної одноточкової множини рівна 0.

Зазначимо, що $P\{Y = y_0\} = P\{X \in f_\varphi^{-1}(y_0)\}$. Тому, якщо множина рівня y_0 є скінченною або зліченною, то точка y_0 не є атомом у силу неатомарності розподілу випадкової величини X.

Нехай множина рівня y_0 є континуальною. Тоді y_0 є Q_2-ірраціональним числом, а отже, його зображення містить нескінченну кількість як нулів, так і одиниць. Можливі випадки:

1. Q_2–зображення числа y_0 починається цифрою 0;
2. Q_2–зображення числа y_0 починається цифрою 1;

які варто розглядати окремо.

Нехай $y_0 = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{s_1}1\underbrace{0\cdots0}_{s_2}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{s_m}1\ldots}$, $s_m \in N$. Тоді множина $f_\varphi^{-1}(y_0)$ складається з точок вигляду
$x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\cdots0}_{k_1}\underbrace{1\cdots1}_{s_1-k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}\underbrace{1\cdots1}_{s_2-k_2}1\ldots1\underbrace{0\cdots0}_{k_m}\underbrace{1\cdots1}_{s_m-k_m}1\ldots}$, $k_1 = \overline{0, s_1}$, $k_m = \overline{1, s_m}$, $s_m \in N$. Оскільки
$$P\{Y = y_0\} = P\{X \in f_\varphi^{-1}(y_0)\} =$$
$$= \left(\sum_{k_1=0}^{s_1} p_0^{k_1} p_1^{s_1-k_1}\right) \prod_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{k_m=1}^{s_m} p_0^{k_m} p_1^{s_m-k_m}\right),$$

а $\sum\limits_{k_m}^{s_m} p_0^{k_m} p_1^{s_m-k_m} \leq \frac{1}{4}$, то останній нескінченний добуток розбігається до нуля в силу того, що не виконується необхідна умова його збіжності. Тому $P\{Y = y_0\} = 0$. А отже, розподіл випадкової величини Y є неперервним.

Оскільки $P\{Y \in E_{f_\varphi}\} = 1$, а міра Лебега $\lambda(E_{f_\varphi}) = 0$, то розподіл випадкової величини Y є сингулярним розподілом канторівського типу.

У другому випадку доведення проводиться аналогічно. □

5.2. **Розподіл значень функції f_{φ_6}.** Нехай (η_k) – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з імовірностями p_0 і p_1 відповідно, тобто

$$P\{\eta_n = 0\} = p_0, P\{\eta_n = 1\} = p_1, p_0 + p_1 = 1, n \in N. \tag{8}$$

Лема 5. *Функція f_{φ_6} є вимірною, а саме: для будь-якого числа $y \in R$ множина $D_y \equiv \{x\colon f_{\varphi_6}(x) < y\}$ є борелівською.*

Доведення. Для $y \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ твердження є очевидним. Нехай тепер $x = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$ – будь-яке число з $(0; 1)$. Можливі випадки:

1) $y - Q_2$-раціональне число;
2) $y - Q_2$-ірраціональне число.

Якщо $y - Q_2$-раціональне число і $y = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}1(0)}$, то множина $D_y \equiv \{x\colon f_{\varphi_6}(x) < y\}$ є скінченним об'єднанням попарно неперетинних множин, а саме:

$$D_y = \{|\alpha_1 - \alpha_2| < c_1\} \cup \{|\alpha_1 - \alpha_2| = c_1 \wedge |\alpha_2 - \alpha_3| < c_2\} \cup \ldots$$
$$\cup \{|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = c_i, \quad i = \overline{1, k-1} \wedge |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < c_k\}.$$

Кожен з елементів об'єднання є або порожньою множиною, або об'єднанням циліндричних піввідрізків. Тому D_y є борелівською множиною (як скінченне об'єднання борелівських множин).

Якщо $y - Q_2$-ірраціональне число і $y = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$, то множина $D_y \equiv \{x\colon f_{\varphi_6}(x) < y\}$ є зліченним об'єднанням попарно неперетинних множин, а саме:

$$D_y = \{|\alpha_1 - \alpha_2| < c_1\} \cup \{|\alpha_1 - \alpha_2| = c_1 \wedge |\alpha_2 - \alpha_3| < c_2\} \cup \ldots$$
$$\cup \{|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = c_i, i, i = \overline{1, k-1} \wedge |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < c_k\} \cup \ldots$$

Кожен з елементів об'єднання є або порожньою множиною, або об'єднанням циліндричних піввідрізків. Тому D_y є борелівською множиною (як зліченне об'єднання борелівських множин). Лему доведено. □

Наслідок 3. *Якщо ζ– випадкова величина, то $Y = f_{\varphi_6}(\zeta)$ є випадковою величиною.*

Лема 6. *Спектром S_Y розподілу значень функції $Y = f_{\varphi_6}(X)$, коли $p_1p_0 \neq 0$, є множина значень $E_{f\varphi_6}$ функції f_{φ_6}.*

Доведення. Оскільки спектром розподілу є мінімальна замкнена множина, на якій зосереджена ймовірність (зосереджений розподіл), і кожна точка множини $E_{f_{\varphi_6}}$ значень функції f_{φ_6} є можливим значенням випадкової величини Y, то $S_Y = E_{f_{\varphi_6}}$. □

Теорема 9. *Для того, щоб випадкові величини $Y = f_{\varphi_6}(X)$ та X мали однакові неперервні розподіли, необхідно і достатньо, щоб $p_0 = \frac{1}{2}$.*

Доведення. Необхідність. Скористаємось методом від супротивного.

Припустимо, що випадкові величини X та Y мають однакові розподіли і при цьому $p_0 \neq \frac{1}{2}$. Оскільки, випадкові величини X та Y мають однакові розподіли, то

$$P\{Y \in \Delta_0^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2} \cup \Delta_{11}^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2}\} + P\{X \in \Delta_{11}^{Q_2}\} = p_0^2 + p_1^2.$$

Тоді $p_0 = p_0^2 + p_1^2$. Остання рівність виконується лише при $p_0 = 1$ і $p_0 = \frac{1}{2}$. Але розподіл X неперервний, отже, $p_0 \neq 1$, а тому $p_0 = \frac{1}{2}$. Отримали суперечність. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай маємо $X = \Delta_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}^{Q_2}$, $P\{\eta_n = i\} = \frac{1}{2}$ і $Y = f_{\varphi_6}(X) = \Delta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}^{Q_2}$, $|\eta_n - \eta_{n+1}| = \xi_n$. Тоді

$$P\{Y \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}^{Q_2}\} + P\{X \in \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_m][1-\alpha_{m+1}]}^{Q_2}\},$$

де $|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = c_k, k = \overline{1, m}$,

$$P\{Y \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}^{Q_2}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} = P\{X \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}^{Q_2}\}.$$

Достатність і всю теорему доведено. □

Лема 7. *Якщо виконується нерівність*

$$\max\{p_0, p_1\} \equiv p_{\max} < {q_0}^{q_0}{q_1}^{q_1}, \tag{9}$$

то $p_0 \neq q_0$.

Доведення. Припустимо супротивне, а саме: при виконанні умови (9) справедлива рівність $p_0 = q_0$. Розглянемо випадки:

1) $p_{\max} = p_0$;
2) $p_{\max} = 1 - p_0$.

Тоді у першому випадку маємо

$$p_0 < p_0^{p_0}(1-p_0)^{1-p_0} \Leftrightarrow 1 < p_0^{p_0-1}(1-p_0)^{1-p_0} = \left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^{1-p_0}.$$

Оскільки $p_{\max} = p_0$, то $\frac{1-p_0}{p_0} < 1$ і $\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^{1-p_0} < 1$. Отримали протиріччя. У другому випадку маємо

$$1 - p_0 < p_0^{p_0}(1-p_0)^{1-p_0} \Leftrightarrow 1 < p_0^{p_0}(1-p_0)^{-p_0} = \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{p_0}.$$

Оскільки $p_{\max} = 1 - p_0$, то $\frac{p_0}{1-p_0} < 1$ і $\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{p_0} < 1$. Знову отримали протиріччя, яке доводить твердження. Отже, якщо виконується нерівність (9), то і виконується $p_0 \neq q_0$. Лему доведено. □

Зауваження 4. Для будь-якого $q_0 \in (0; 1)$ справджується подвійна нерівність $\frac{1}{2} < q_0^{q_0}q_1^{q_1} < 1$, причому $q_0^{q_0}q_1^{q_1} \to \frac{1}{2}$, коли $q_0 \to \frac{1}{2}$, і $q_0^{q_0}q_1^{q_1} \to 1$, коли $q_0 \to 0$ або $q_0 \to 1$.

Теорема 10. *1) Розподіл випадкової величини $Y = f_{\varphi_6}(X)$ є неперервним тоді й тільки тоді, коли таким є розподіл випадкової величини X.*

2) Якщо виконуються умови $0 < p_0 < 1$ і

$$p_{\max} < q_0^{q_0}q_1^{q_1}, \ \textit{де } p_{\max} = \max\{p_0, p_1\},$$

то випадкові величини X і Y мають сингулярно неперервні розподіли салемівського типу.

Доведення. 1. Це твердження є наслідком того, що розподіл випадкової величини X є неперервним, а кожен рівень функції f_{φ_6} містить не більше трьох точок.

2. Відомо з [8], що при $p_0 \neq q_0$ розподіл випадкової величини X є сингулярним розподілом салемівського типу. Виконання цієї умови гарантують умови теореми і леми 7. Отже, випадкова величина X має вказаний розподіл.

Нагадаємо, що Q_2-нормальним числом називається число x, для якого частоти $\nu_1(x) = q_1$, $\nu_0(x) \equiv 1 - \nu_1(x)$, де

$$\nu_1(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{N_1(x,n)}{n}, \quad N_1(x,n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x).$$

Відомо [8, 11], що множина H_{Q_2} всіх Q_2-нормальних чисел відрізку $[0;1]$ є множиною повної міри Лебега, тобто $\lambda(H_{Q_2}) = 1$. Нехай W_Y – множина, в точках якої існує скінченна похідна функції розподілу F_Y випадкової величини Y (відома теорема Лебега констатує повноту міри Лебега цієї множини). Тоді множина $V \equiv H_{Q_2} \cap W_Y$ є множиною повної міри Лебега (тобто $\lambda(V) = 1$). Розглянемо точку $t \in V$. У ній існує скінченна похідна $F'_Y(t)$, яка обчислюється за формулою

$$F'_Y(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{P\{Y \in \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\ldots\alpha_n(t)}\}}{|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\ldots\alpha_n(t)}|},$$

причому $|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_n(t)}| = q_0^{N_0(t,n)} q_1^{N_1(t,n)}$. Число $t = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\ldots\alpha_n(t)\ldots}$ є образом двох точок x_1, x_2 при відображенні f_{φ_6}, а саме: якщо $t = f(x_1)$, де $x_1 = \Delta^{Q_2}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, то $x_2 = \Delta^{Q_2}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]\ldots}$. Тоді

$$P\{Y \in \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\ldots\alpha_n(t)}\} = \\ = P\{X \in \Delta^{Q_2}_{a_1a_2\ldots a_n a_{n+1}}\} + P\{X \in \Delta^{Q_2}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n][1-a_{n+1}]}\}.$$

Якщо позначити через $c_1(x_1, n+1)$ кількість переходів від серії «нулів» до серії «одиниць» серед перших $n+1$ символів і навпаки у Q_2-зображенні числа x_1, а саме:

$$c_1(x_1, n+1) = \#\{j : a_j \neq a_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, n\},$$

то матимемо $c_1(x_1, n+1) = c_1(x_2, n+1) = N_1(t,n)$. Тоді $\frac{N_1(t,n)}{n} = \frac{c_1(x_1,n+1)}{n} = \frac{c_1(x_2,n+1)}{n}$,

$$\nu_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{N_1(t,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1(x_1,n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1(x_2,n+1)}{n}.$$

Нехай $s_1(x_i, n+1)$ – кількість цифр «1» серед перших $(n+1)$-ї цифри у Q_2-зображенні чисел x_i, $s_0(x_i, n+1) \equiv n+1 - s_1(x_i, n+1)$, $i = 0, 1$. Тоді $\frac{1}{2}N_1(x_1, t) \leq s_0(x_1, n+1)$,

$$\frac{N_1(t,n)}{2} \leq s_1(x_1, n+1) = n+1 - s_0(x_1, n+1) \leq n+1 - \frac{N_1(t,n)}{2},$$

$$P\{Y \in \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\ldots\alpha_n(t)}\} = p_1^{s_1} p_0^{n+1-s_1} + p_0^{s_1} p_1^{n+1-s_1} \leq p_{\max}^{n+1}.$$

Враховуючи, що $|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_n(t)}| = q_0^{N_0(t,n)} q_1^{N_1(t,n)}$, маємо

$$F'_Y(t) \leq p_{\max} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} p_{\max}}{q_0^{\frac{N_0}{n}} q_1^{\frac{N_1}{n}}} \right)^n.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} p_{\max}}{q_0^{\frac{N_0}{n}} q_1^{\frac{N_1}{n}}} = \frac{p_{\max}}{q_0^{q_0} q_1^{q_1}} < 1,$$

то при $n > -\log_a 2$, де $a = \frac{p_{\max}}{q_0^{q_0} q_1^{q_1}}$, виконується $\frac{2^{\frac{1}{n}} p_{\max}}{q_0^{q_0} q_1^{q_1}} < 1$. Отже, $F'_Y(t) = 0$ і $Y = f_{\varphi_6}(X)$ є сингулярно розподіленою випадковою величиною. Теорему доведено. $\square$

Список літератури

1. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension*, Ergod.Th. & Dynam. Sys. (2000), no. 24, 1–16.
2. O. M. Baranovskyi, M. V. Pratsiovytyi, G. M. Torbin, *Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series and their applications*, Naukova Dumka, Kyiv, 2013. (in Ukrainian)
3. N. A. Vasylenko, M. V. Pratsiovytyi, *One family of continuous nowhere monotonic functions with fractal properties*, Trans. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math. (2013), no. 14, 176–189. (in Ukrainian)
4. S. O. Dmitrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Pratsiovytyi, *A_2-continued fraction representation of real number and it's geometry*, Ukrainian Math. J., **4** (2009), vol. 61, 452–463. (in Ukrainian)
5. T. M. Isaeva, M. V. Pratsiovytyi, *Encoding of real numbers with an infinite alphabet and a base 2*, Trans. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math. (2013), no. 15, 6–23. (in Ukrainian)
6. Lisovik D. P., *Application of finite transducers to defining fractal curves*, Cybernetics and systems analysis (1994), no. 3, 11–22. (in Russian)
7. E. Lukach, *Characteristic functions*, 2nd ed., Hafner, New York, 1970.
8. M. V. Pratsiovytyi, *Random variables with independent Q_2-symbols*, Asymptotic methods in the study of stochastic models, Inst. Math. Natl. Acad. Sci. Ukraine, (1987) 92–102 (in Russian).
9. M. V. Pratsiovityi, *Geometry of classic binary representation of real numbers*, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 2012. (in Ukrainian)
10. M. V. Pratsiovytyi, D.V.Kyurchev, *Singularity of distributions of the random variable represented by A_2-continued fraction with independent elements*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, (2009), no. 81, 139–154. (in Ukrainian)
11. M. V. Pratsiovytyi, *Fractal approach to investigation of singular probability distributions*, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 1998. (in Ukrainian)
12. M. V. Pratsiovityi, *Fractal properties of distributions of random variables such that their Q_2-symbols form a homogeneous Markov chain*, Asymptotic analysis of random evolutions, (1995), 245–254. (in Ukrainian)
13. M. V. Pratsiovytyi, N. A. Vasylenko, *Probability distributions on graphs of one class of nowhere differentiable functions*, Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. (2013), no. 24 159–171. (in Ukrainian)
14. M. V. Pratsiovytyi, O. B. Panasenko, *Fractal properties of a class of one-parameter continuous non-differentiated functions* , Trans. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math. (2006), no. 7, 160–167.
15. M. V. Pratsiovytyi, A. V. Kalashnikov, *Self-affine singular and nowhere monotone functions related to the Q-representation of real numbers*, Ukrainian Mathematical Journal, **3** (2013), no. 65, 405–417.
16. M. V. Pratsiovytyi and S. P. Ratushniak, *Distribution of values of one fractal function with random argument*, Trans. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math., **2** (2014), no. 16, 150–160. (in Ukrainian)
17. M. V. Pratsiovytyi, O. V. Svynchuk, *Dispersion of the values of one fractal continuous nonmonotonic function of the Cantor type*, Nonlinear Oscillations **1** (2018), no. 21, 116–130.
18. M. V. Pratsiovytyi, S. V. Skrypnyk, *Q_2-representation of the fractional part of a real number and the inversor of its digits*, Trans. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math., **17** (2000), no. 1, 111–113.
19. M. V. Pratsiovytyi, G. M. Torbin, *An analytic (symbol) representation of continuous transformations R^1 preserving the Hausdorff-Besikovich dimension*, Proceedings of Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Ser. 1. Phys. Math. (2003), no. 4, 207–215. (in Ukrainian)
20. A. Turbin, M. Pratsiovytyi, *Fractal sets, functions, and distributions*, Naukova Dumka, Kyiv, 1992. (in Russian)
21. J. Galambos, *Representations of real numbers by infinite series*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 502, Springer, Berlin, 1976.
22. M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev, *Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements*, Random Oper. Stochastic Equations **1** (2009), vol. 17, 91–101.

23. F. Schweiger, *Ergodic theory of fibred system and metric number theory*, Oxford Sci.Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1995.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, вул. Пирогова 9, 01601, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: prats4444@gmail.com

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська 3, 01004, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: ratush404@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 16.08.2018

PROPERTIES AND DISTRIBUTIONS OF VALUES OF FRACTAL FUNCTIONS RELATED TO Q_2-REPRESENTATION OF REAL NUMBERS

M. V. PRATSIOVYTYI, S. P. RATUSHNIAK

Abstract. We consider Q_2-representation of numbers $x \in [0,1]$ defined by one parameter $q_0 \in (0;1)$ and expansion of numbers $x \in [0,1]$ in series

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

where $\alpha_k \in \{0,1\} \equiv A$, $q_1 \equiv 1-q_0$. We study structural, local and global topological, metric and fractal properties of the function defined by equality

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\ldots\varphi(\alpha_{n-1},\alpha_n)\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots},$$

where φ is a given function ($\varphi : A^2 \to A$).

Let X be a random variable with a given distribution. For random variable $Y = F(X)$, Lebesgue structure (i.e., content of discrete, absolutely continuous and singular components) and spectral properties (properties of the set of points of increasing for the probability distribution function) are studied.

СВОЙСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С Q_2-ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Н. В. ПРАЦЕВИТЫЙ , С. П. РАТУШНЯК

Аннотация. Для заданого Q_2-представления чисел $x \in [0;1]$, определённого параметром $q_0 \in (0;1)$ и разложением числа $x \in [0;1]$ в ряд

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

где $\alpha_k \in \{0,1\} \equiv A$, $q_1 \equiv 1-q_0$, изучаются структурные, локальные и глобальные тополого-метрические и фрактальные свойства функции f_φ, определённой равенством

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\ldots\varphi(\alpha_{n-1},\alpha_n)\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots},$$

где φ – заданная функция ($\varphi : A^2 \to A$).

Для случайной величины $Y = f_\varphi(X)$, где X – случайная величина с заданным распределением, изучается лебеговская структура (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент) и спектральные свойства (свойства множества точек роста функции распределения).