Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 203–211

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 203–211

УДК 519.21

НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ, КЕРОВАНОГО СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

В. М. РАДЧЕНКО, Н. О. СТЕФАНСЬКА

Анотація. Розглянуто м'який розв'язок хвильового рівняння, керованого загальною стохастичною мірою. Доведено теорему про збіжність розв'язків цього рівняння при збіжності траєкторій стохастичних мір.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, м'який розв'язок, ряд Фур'є – Хаара.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60H05, 60G57.

1. Вступ

У цій роботі розглядається задача Коші для одновимірного стохастичного хвильового рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0$, $a > 0$, та μ – стохастична міра, визначена на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}((0,T])$ (див. означення 1).

Ми досліджуємо м'який розв'язок задачі (1) (див. рівність (3) нижче). Наша мета – показати збіжність розв'язків хвильового рівняння при рівномірній збіжності траєкторій стохастичних мір.

Існування та єдиність розв'язку рівняння (1) отримано в [1]. В [2] одержано аналогічний результат для хвильового рівняння, керованого стохастичною мірою, залежною від просторової змінної. Цікаві випадки таких рівнянь, керованих випадковими шумами зі стійкими розподілами, вивчено у статтях [3], [4], де досліджено властивості узагальнених розв'язків.

Задача апроксимації розв'язків стохастичного хвильового рівняння при наближенні стохастичного інтегратора досліджувалась у [5], [6]. При цьому розглядалися м'які розв'язки рівняння, керованого гауссівським випадковим полем у просторі розмірності три.

Наближення стохастичних мір можна отримувати, використовуючи ряди Фур'є та Фур'є – Хаара, відповідні результати отримано в [7]. Часткові суми отриманих рядів породжують випадкові функції множин, що є знакозмінними мірами при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$. Отримувані рівняння можна розв'язувати при кожному ω як невипадкові. Із результатів нашої роботи буде випливати, що при цьому ми будемо отримувати наближення розв'язку (1).

У статті [7] наведено приклад застосування рядів Фур'є стохастичних мір до збіжності розв'язків стохастичного рівняння теплопровідності. Аналогічне застосування перетворення Фур'є наведено у [8]. Близькими до вказаних є результати [1], [2], в яких отримано неперервну залежність розв'язків хвильового рівняння від даних задачі. У цій статті ми отримуємо неперервну залежність від значень стохастичного інтегратора рівняння.

Нашу роботу побудовано таким чином. Постановку задачі Коші для хвильового рівняння, керованого стохастичною мірою, сформульовано в розділі 2. Далі наведено додаткові відомості, які використовуються в подальшому дослідженні. Розділ 4 містить формулювання і доведення основного результату дослідження – теореми 1. У розділі 5 наведено приклади застосування основного результату.

2. Постановка задачі

Нехай X – довільна множина, $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ – σ-алгебра підмножин з X, $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – це збіжність за ймовірністю.

Означення 1. *Стохастичною мірою* (СМ) називається σ-адитивне відображення $\mu: \ \mathcal{B} \to L_0$.

Відмітимо, що на μ не накладається додаткових умов, таких як, мартингальність, невід'ємність, існування моментів тощо. Як приклади СМ ми можемо взяти $\mu(A) = \ \int_0^T \mathbf{1}_A(s)\, dX(s)$, де $X(s)$ — квадратично інтегровний мартингал або процес дробового броунівського руху з показником Хюрста $H > 1/2$. Ще одним прикладом СМ є α-стійкі міри, визначені на σ-алгебрі (див. [9, розділ 3]). Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують СМ, є в розділах 7 і 8 [10].

У [10, розділ 7] та [11, розділ 1] для невипадкової функції $g : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ визначений та досліджений інтеграл вигляду $\int_{\mathsf{X}} g\, d\mu$. Зокрема, будь яка вимірна обмежена функція інтегровна за μ. Крім того, для такого інтеграла справджується аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. [10, твердження 7.1.1], [11, наслідок 1.2]).

Для випадкової величини ξ будемо використовувати позначення

$$\|\xi\| = \sup\{\alpha : \mathsf{P}\{|\xi| \geq \alpha\} \geq \alpha\}.$$

Легко бачити, що $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

Важливою для нас буде така нерівність з леми 1.2 [11]:

$$\left\| \int_{\mathsf{X}} g\, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{A \in \mathcal{B}} \| \sup_x |g(x)| \cdot \mu(A) \|. \tag{2}$$

Відомо, що множина значень будь-якої СМ обмежена за ймовірністю (тобто $\sup_{A \in \mathcal{B}} \|t\mu(A)\| \to 0, \ t \to 0$), див. [12].

Далі в роботі ми будемо досліджувати лише СМ, задані на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}([0, T])$.

Для задачі (1) ми розглядаємо м'який розв'язок, тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t, x) = u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, що

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x + at) - u_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(y)\, dy + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s, y, u(s, y))\, dy + \frac{1}{2a} \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$.

Далі будемо розглядати такі припущення.

A1. Функції $u_0(y) = u_0(y, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $v_0(y) = v_0(y, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(y, \omega)| \leq C_{u_0}(\omega)$, $|v_0(y, \omega)| \leq C_{v_0}(\omega)$.

A2. $f(s, y, v) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s, y, v)| \leq C_f$.

A3. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $y,v\in\mathbb{R}$, а саме,

$$|f(s,y_1,v_1)-f(s,y_2,v_2)|\le L_f(|y_1-y_2|+|v_1-v_2|)\,.$$

A4. $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C_\sigma$.
A5. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером, тобто,

$$|\sigma(s_1,y_1)-\sigma(s_2,y_2)|\le L_\sigma\big(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}\big),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1.$$

Надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ додатні константи, що можуть бути різними у різних формулах і точне значення яких не суттєве.

3. Додаткові відомості

Покладемо

$$\Delta_{kn}=((k-1)2^{-n}T,k2^{-n}T],\quad n\ge 0,\quad 1\le k\le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s):Z\times[0,T]\to\mathbb{R}$ така, що $\forall z\in Z:\ g(z,\cdot)$ неперервна на $[0,T]$, Z – довільна множина. Позначимо

$$g_n(z,s)=g(z,0)\mathbf{1}_{\{0\}}(s)+\sum_{1\le k\le 2^n}g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\mathbf{1}_{\Delta_{kn}}(s).$$

Тоді за [13, лема 3] випадкова функція

$$\eta(z)=\int_{(0,t]}g(z,s)d\mu(s),\quad z\in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z)=\int_{(0,t]}g_0(z,s)d\mu(s)+\sum_{n\ge 1}\bigg(\int_{(0,t]}g_n(z,s)d\mu(s)-\int_{(0,t]}g_{n-1}(z,s)d\mu(s)\bigg),\qquad (4)$$

що для всіх $\beta>0$, $\omega\in\Omega$, $z\in Z$ справджується

$$|\widetilde{\eta}(z)|\le|g(z,0)\mu((0,t])|+$$
$$+\left\{\sum_{n\ge1}2^{n\beta}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|g(z,k2^{-n}T\wedge t)-g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\right|^2\right\}^{\frac12}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\beta}\sum_{1\le k\le 2^n}|\mu(\Delta_{kn}\cap(0,t])|^2\right\}^{\frac12}.\qquad (5)$$

Відмітимо, що ряд зі значеннями СМ у (5) збіжний м. н., див. [14, лема 3.1].

Для отримання збіжності стохастичних інтегралів буде важливим таке твердження.

Лема 1. *Нехай* μ *та* μ_j *– СМ, множина значень* $\{\mu_j(A),\ A\in\mathcal{B}((0,T]),j\ge 1\}$ *обмежена за ймовірністю та*

$$\sup_{t\in[0,T]}|(\mu_j-\mu)((0,t])|\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\ j\to\infty.\qquad (6)$$

Тоді для кожного $\beta>0$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n\beta}\sum_{k=1}^{2^n}\big|(\mu_j-\mu)\big(\Delta_{kn}\cap(0,t]\big)\big|^2\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\quad j\to\infty.\qquad (7)$$

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $\mu = 0$. Нехай при кожному n взято k_n так, що $t \in \Delta_{k_n n}$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{kn} \cap (0,t]\bigr)\bigr|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_n\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{k_n n} \cap (0,t]\bigr)\bigr|^2.$$

Із (6) отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{k_n n} \cap (0,t]\bigr)\bigr|^2 \le 4 \sup_{t\in[0,T]} |\mu_j((0,t])|^2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad j \to \infty.$$

Далі залишається довести

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad j \to \infty. \tag{8}$$

Якщо твердження (8) неправильне, існує $\alpha_0 > 0$, для якого є нескінченно багато таких номерів j, що

$$\Bigl\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 \Bigr\| > \alpha_0.$$

Маємо

$$\bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr| = \bigl|\mu_j\bigl((0, k2^{-n}T]\bigr) - \mu_j\bigl((0,(k-1)2^{-n}T]\bigr)\bigr| \le 2 \sup_{t\in[0,T]} |\mu_j((0,t])|.$$

З умови (6) випливає, що при фіксованому m

$$\Bigl\| \sum_{n=1}^{m-1} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_j\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 \Bigr\| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Тому для кожного $m \ge 1$ можемо взяти j_m таке, що

$$\Bigl\| \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_{j_m}\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 \Bigr\| > \alpha_0.$$

Виберемо n_m такі, що

$$\Bigl\| \sum_{n=m}^{n_m} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} \bigl|\mu_{j_m}\bigl(\Delta_{kn}\bigr)\bigr|^2 \Bigr\| > \alpha_0. \tag{9}$$

Позначимо $\lambda_{mkn}(\omega) = 2^{-n\beta/2}\mu_{j_m}\bigl(\Delta_{kn}\bigr)$, розглянемо

$$\Omega_m = \Biggl\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_{mkn}^2(\omega) > \alpha_0 \Biggr\},$$

маємо $\mathsf{P}(\Omega_m) > \alpha_0$.

Далі ми використаємо незалежні випадкові величини ε_{mkn}, визначені на іншому ймовірнісному просторі $(\Omega', \mathcal{F}', \mathsf{P}')$, і такі, що $\mathsf{P}'(\varepsilon_{mkn} = 1) = \mathsf{P}'(\varepsilon_{mkn} = -1) = 1/2$. Лема V.4.3 (a) з [15] дає, що при фіксованому $\omega \in \Omega$

$$\mathsf{P}' \Biggl[\Biggl(\sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_{mkn}\varepsilon_{mkn} \Biggr)^2 \ge \frac{1}{4} \sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_{mkn}^2 \Biggr] \ge \frac{1}{8}.$$

Тому для кожного $\omega \in \Omega_m$ маємо

$$\mathsf{P}' \Biggl[\omega' : \Biggl(\sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{mkn}(\omega')\lambda_{mkn}(\omega) \Biggr)^2 \ge \frac{\alpha_0}{4} \Biggr] \ge \frac{1}{8}.$$

Зінтегрувавши по множині Ω_m, отримаємо

$$\mathsf{P} \times \mathsf{P}' \left[(\omega,\ \omega') :\ \left(\sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{mkn}(\omega') \lambda_{mkn}(\omega) \right)^2 \geq \frac{\alpha_0}{4} \right] \geq \frac{\alpha_0}{8}.$$

Тому знайдеться $\omega'_0 \in \Omega'$, для якого виконується

$$\mathsf{P} \left[\omega :\ \left(\sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{mkn}(\omega'_0) \lambda_{mkn}(\omega) \right)^2 \geq \frac{\alpha_0}{4} \right] \geq \frac{\alpha_0}{8}.$$

Оскільки $\varepsilon_{mkn}(\omega'_0) = \pm 1$, для цього фіксованого ω'_0 для вимірних обмежених функцій

$$h_m(x) = \sum_{n=m}^{n_m} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{mkn}(\omega'_0) 2^{-n\beta} \mathbf{1}_{\Delta_{kn}}(x)$$

маємо для всіх $m \geq 1$

$$|h_m(x)| \leq C 2^{-m\beta}, \quad \left\| \int_{(0,T]} h_m \, d\mu_{j_m} \right\| \geq \frac{\alpha_0}{8}.$$

Із (2) дістаємо

$$\left\| \int_{(0,T]} h_m \, d\mu_{j_m} \right\| \leq 16 \sup_{A \in \mathcal{B}((0,T])} \| C 2^{-m\beta} \mu_{j_m}(A) \|.$$

Звідси ми отримуємо, що для фіксованих $C,\ \alpha_0 > 0$ для всіх $m \geq 1$

$$\sup_{A \in \mathcal{B}((0,T])} \| C 2^{-m\beta} \mu_{j_m}(A) \| \geq \frac{\alpha_0}{128}.$$

З іншого боку, за умовою леми,

$$\sup_{A \in \mathcal{B}((0,T]), j \geq 1} \| t \mu_j(A) \| \to 0, \quad t \to 0.$$

Ми отримали суперечність, з якої випливає потрібне твердження. □

4. Основний результат

Аналогічно (3), для СМ μ_j розглянемо рівняння

$$u_j(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+at) - u_0(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(y)\, dy +$$
$$+ \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u_j(s,y))\, dy + \frac{1}{2a} \int_{(0,t]} d\mu_j(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\, dy\,. \tag{10}$$

Для всіх стохастичних інтегралів будемо використовувати модифікацію (4).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A1–A5,* μ *и* μ_j *— СМ на* $\mathcal{B}([0,T])$*, значення* $\mu_j(A)$ *обмежені за ймовірністю, та*

$$\sup_{t \in [0,T]} |(\mu_j - \mu)((0,t])| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ \ j \to \infty.$$

Тоді існують модифікації u *з* (3), u_j *з* (10) *такі, що*

$$\sup_{t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d} \left| u_j(t,x) - u(t,x) \right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0\ ,\ \ j \to \infty. \tag{11}$$

Доведення. З умов A1–A5 та теореми 2.1 [1] випливають існування та єдиність розв'язків (3) та (10) (відмітимо, що умова гельдеровості u_0 з теореми 2.1 [1] у доведенні існування та єдиності розв'язку не використовується).

Маємо

$$\begin{aligned} \big|u_j(t,x)-u(t,x)\big| \le \frac{1}{2a}\Big|\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t+s)} (f(s,y,u_j(s,y))-f(s,y,u(s,y)))\,dy\Big| + \\ +\frac{1}{2a}\Big|\int_{(0,t]} d(\mu_j(s)-\mu(s))\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy\Big|. \end{aligned} \tag{12}$$

Щоб оцінити інтеграл за $\mu_j-\mu$, розглянемо функцію

$$g(z,s)=\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)\,dy,\quad 0\le s\le t,\quad z=(x,t).$$

Очевидно, що $|g(z,0)| \overset{A4}{\le} 2aTC_\sigma$. Також маємо, що

$$\begin{aligned} |g(z,s+h)-g(z,s)| = \Big|\int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)}\sigma(s+h,y)\,dy-\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)\,dy\Big| = \\ =\Big|\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}(\sigma(s+h,y)\,dy-\sigma(s,y))\,dy-\int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)}\sigma(s+h,y)\,dy- \\ -\int_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)}\sigma(s+h,y)\,dy\Big| \overset{A4,A5}{\le} 2aTL_\sigma h^{\beta(\sigma)}+2aC_\sigma h\le Ch^{\beta(\sigma)}. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо

$$\xi_j(z)=\int_{(0,t]} g(z,s)\,d(\mu_j(s)-\mu(s)).$$

Оскільки $\beta(\sigma)>1/2$, для $0<\beta<2\beta(\sigma)-1$ з (5) отримуємо

$$|\xi_j(z)|\le C|(\mu_j-\mu)((0,t])|+C\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\beta}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|(\mu_j-\mu)(\Delta_{kn}\cap(0,t])\right|^2\right\}^{\frac12}.$$

За лемою 1,

$$\sup_z|\xi_j(z)|\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\quad j\to\infty. \tag{13}$$

Розглянемо множини $\Omega^{(j)}=\{\sup_z|\xi_j(z)|=+\infty\}$. Із (12) та A2 отримуємо, що

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}}\big|u_j(t,x)-u(t,x)\big|\mathbf{1}_{\Omega^{(j)}}(\omega)<+\infty.$$

Використовуючи A3, із (12) маємо

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|u_j(t,x)-u(t,x)\big|\le\sup_z|\xi_j(z)|+C\int_0^t\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|u_j(s,x)-u(s,x)\big|\,ds. \tag{14}$$

Із нерівності Гронуолла отримуємо

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|u_j(t,x)-u(t,x)\big|\le\sup_z|\xi_j(z)|e^{Ct}. \tag{15}$$

(На $\Omega^{(j)}$ в (14) маємо обмежені функції, зовні $\Omega^{(j)}$ права частина (15) нескінченна.)

Із (15) та (13) отримуємо (11). □

5. Приклади

Наведемо два приклади виконання умов леми 1. В обох випадках μ — така СМ на $\mathcal{B}([0,T])$, що процес $\tilde{\mu}(t)=\mu((0,t])$, $0\le t\le T$, неперервний.

Приклад 1. Нехай $[0,T]=[0,1]$, $\{\chi_i(t),\ i\ge 1\}$ – класична ортонормована система функцій Хаара (див., наприклад, [16, розділ 3] або [7, розділ 5]). Розглянемо коефіцієнти Фур'є – Хаара

$$\eta_i=\int_{[0,1]}\tilde{\mu}(t)\chi_i(t)\,dt,$$

відповідні часткові суми

$$S_j(t)=\sum_{i=1}^{j}\eta_i\chi_i(t).$$

Ряди Фур'є – Хаара, породжені СМ, розглянуто в [7]. Зокрема, було показано, що $S_j(t)\xrightarrow{\mathsf{P}}\tilde{\mu}(t)$, $j\to\infty$, за умови, що $\mu(\{t\})=0$ м. н.

Будемо використовувати позначення

$$d_n^k=k2^{-n},\quad n\ge 0,\quad 0\le k\le 2^n,\quad \Delta_n^k=\big(d_n^{k-1},d_n^k\big).$$

Як відмічено у (3.11) із [16], для $j=2^n+k,\ 1\le k\le 2^n-1$, маємо

$$S_j(t)=\begin{cases} S_{2^{n+1}}(t), & t\in[0,d_n^k),\\ S_{2^n}(t), & t\in(d_n^k,1],\\ S_{2^n}(t)+\eta_j\chi_j(t), & t=d_n^k,\end{cases}$$

за властивостями функцій Хаара, $S_j(d_n^k)=(S_j(d_n^k-)+S_j(d_n^k+))/2$.

Розглянемо випадкові функції з неперервними справа траєкторіями $\tilde{S}_j(t)=S_j(t+)$ (очевидно, що $\tilde{S}_j(t)=S_j(t)$ для $t\ne d_n^k$). Візьмемо СМ μ_j такі, що $\mu_j((0,t])=\tilde{S}_j(t)$ (це міри Стілтьєса, породжені $\tilde{S}_j$ при кожному ω). Відомо, що ряди Фур'є – Хаара неперервних функцій збігаються рівномірно (див. [16, розділ 3, теорема 2]), тому $\tilde{S}_j$ також будуть рівномірно збіжними до $\tilde{\mu}$, для μ_j і μ справедлива (6).

Покажемо тепер обмеженість за ймовірністю значень μ_j. Позначимо $j=2^n+k$, $0\le k\le 2^n-1$. При доведенні теореми 5.2 із [7] показано, що для $t\in\cup_i\Delta_n^i$

$$S_{2^n}(t)=\int_{(0,1]}\sum_{i=1}^{2^n}\big(\mathbf{1}_{(0,d_n^i]}(s)+(i-1-2^ns)\mathbf{1}_{(d_n^{i-1},d_n^i]}(s)\big)\mathbf{1}_{\Delta_n^i}(t)\,d\mu(s).$$

Зокрема, $S_{2^n}(t)$ є сталою на інтервалах Δ_n^i, тому μ_j зосереджена в точках $d_{n+1}^i<d_n^k$, $d_n^i\ge d_n^k$. Використовуючи стрибки функції $\tilde{S}_j$, ми можемо записати

$$\begin{aligned}\mu_j(A)=\int_{(0,1]}\Big(&\sum_{i=1}^{2k-1}\big(\mathbf{1}_{(d_{n+1}^{i-1},d_{n+1}^i]}(s)+(i-1-2^{n+1}s)\mathbf{1}_{(d_{n+1}^{i-1},d_{n+1}^i]}(s)-\\ &-(i-2-2^{n+1}s)\mathbf{1}_{(d_{n+1}^{i-2},d_{n+1}^{i-1}]}(s)\big)\mathbf{1}_A(d_{n+1}^i)+\\ &+\big(\mathbf{1}_{(d_{n+1}^{2k-1},d_n^k]}(s)+(k-1-2^ns)\mathbf{1}_{(d_n^{k-1},d_n^k]}(s)-(2k-2-2^{n+1}s)+\\ &+\mathbf{1}_{(d_{n+1}^{2k-2},d_{n+1}^{2k-1}]}(s)\big)\mathbf{1}_A(d_n^k)+\\ &+\sum_{i=k+1}^{2^n}\big(\mathbf{1}_{(d_n^{i-1},d_n^i]}(s)+(i-1-2^ns)\mathbf{1}_{(d_n^{i-1},d_n^i]}(s)-\\ &-(i-2-2^ns)\mathbf{1}_{(d_n^{i-2},d_n^{i-1}]}(s)\big)\mathbf{1}_A(d_n^i)\Big)\,d\mu(s).\end{aligned}$$

Підінтегральна функція невід'ємна, не перевищує 1, і з (2) випливає обмеженість за ймовірністю значень $\mu_j(A)$, $A\in\mathcal{B}((0,1])$, $j\ge 1$.

Приклад 2. Нехай λ – міра Лебега на $[0,T]$, $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \cdots < t_{k_j}^{(j)} = T$ – послідовність розбиттів із діаметрами, що прямують до нуля,

$$\mu_j(A) = \sum_{k=1}^{k_j} \mu\big((t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}]\big) \frac{\lambda\big(A \cap (t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}]\big)}{t_k^{(j)} - t_{k-1}^{(j)}}.$$

Із неперервності $\tilde{\mu}$ випливає виконання умови (6). Також $\mu_j(A) = \int_{(0,1]} g_{j,A}(t)\, d\mu(t)$ для деякої функції $|g_{j,A}(t)| \le 1$. Тому (2) дає нам, що значення $\mu_j(A)$ обмежені за ймовірністю.

Отже, для μ_j виконуються умови леми 1. Відмітимо, що в [17] доведено, що інтеграли від будь-яких обмежених вимірних невипадкових функцій по μ_j збігаються до інтегралів по μ при умові абсолютної неперервності μ відносно λ.

В обох прикладах маємо, що СМ μ_j – знакозмінні дійсні міри при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$. Рівняння (10) для таких СМ може розв'язуватись як нестохастичне при кожному $\omega \in \Omega$, і справджується збіжність розв'язків в (11).

6. Висновки

Для хвильових рівнянь, керованих стохастичними мірами, отримано неперервну залежність розв'язку від значень стохастичного інтегратора. Показано, що для знаходження наближених розв'язків можна використовувати стохастичні міри, визначені частковими сумами рядів Фур'є – Хаара або розбиттями відрізка $[0,T]$, і розв'язувати невипадкові рівняння при кожному $\omega \in \Omega$.

Список літератури

1. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 1–16.
2. I. Bodnarchuk, *Mild solution of the wave equation with a general random measure*, Visnyk Kyiv University. Mathematics. Mechanics, **24** (2010), 28 – 33. (in Ukrainian)
3. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise*, Mod. Stoch. Theory Appl., **3** (2016), no. 3, 237–248.
4. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with stable noise*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **96** (2017), 142–154. (in Ukrainian)
5. F. J. Delgado-Vences, M. Sanz-Solé, *Approximation of a stochastic wave equation in dimension three, with application to a support theorem in Hölder norm*, Bernoulli, **20**, (2014), 2169–2216.
6. F. J. Delgado-Vences, M. Sanz-Solé, *Approximation of a stochastic wave equation in dimension three, with application to a support theorem in Hölder norm: The non-stationary case*, Bernoulli, **22**, (2016), 1572–1597.
7. V. M. Radchenko, N. O. Stefans'ka, *Fourier and Fourier-Haar series for stochastic measures*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **96** (2017), 155–162. (in Ukrainian)
8. V. M. Radchenko, N. O. Stefans'ka, *Fourier transform of general stochastic measures*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 151–158.
9. G. Samorodnitsky, M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, London, 1994.
10. S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
11. V. N. Radchenko, *Integrals with respect to general stochastic measures*, Proceedings of Institute of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 1999. (in Russian)
12. M. Talagrand, *Les mesures vectorielles a valeurs dans L_0 sont bornées*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **14** (1981), 445–452.
13. V. M. Radchenko, *Evolution equations driven by general stochastic measures in Hilbert space*, Theory Probab. Appl., **59** (2015), 328–339.
14. V. N. Radchenko, *Sample functions of stochastic measures and Besov spaces*, Theory Probab. Appl., **54** (2010), 160–168.
15. N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, S. A. Chobanian, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
16. B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, AMS, Providence, 1989.
17. V. M. Radchenko, *Approximation of integrals with respect to a random measure by integrals with respect to a real measure*, Theory Probab. Math. Statist., **55** (1997), 177–180.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: neliastefanska@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 02/04/2018

APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF WAVE EQUATION DRIVEN BY STOCHASTIC MEASURES

V. M. RADCHENKO, N. O. STEFANS'KA

Abstract. The mild solution to the wave equation driven by a general stochastic measure is considered. The theorem on the convergence of solutions of this equation under condition of convergence of paths of stochastic measures is proved.

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, УПРАВЛЯЕМОГО СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

В. Н. РАДЧЕНКО, Н. А. СТЕФАНСКАЯ

Аннотация. Рассмотрено мягкое решение волнового уравнения, управляемого общей стохастической мерой. Доказана теорема о сходимости решений данного уравнения при сходимости траекторий стохастических мер.