Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 51–62

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 51–62

УДК 519.21

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА ДЛЯ СЛАБКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСОМ ВІНЕРА

С. В. БОДНАРЧУК, О. М. КУЛИК

Анотація. У статті розглянуто схему слабкої апроксимації розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, керованих вінерівським процесом.

Ключові слова і фрази. Стохастичні диференціальні рівняння, метод Ейлера, слабка апроксимація, поліноми Ерміта.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H35; Secondary 60G51.

1. Вступ

Розглянемо дифузійний процес, який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^d$ — фіксована точка, $W \in \mathbb{R}^m$ — процес Вінера, $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ — вимірні функції, які задовольняють загальні умови існування та єдиності слабкого розв'язку рівняння (1).

У загальному випадку точний вигляд розв'язку для рівнянь (1) невідомий, тому на практиці застосовують різні схеми їх апроксимації. Для $n \ge 1$ позначимо $h := \frac{T}{n}$ — крок розбиття відрізка $[0,T]$ та $\eta_n(t) = kh, t \in (kh,(k+1)h], k = 0,\dots,n-1,$ — найближча точка розбиття зліва від t. Найпростішею схемою апроксимації розв'язку рівняння (1) є схема Ейлера, яка була вперше досліджена в роботі [4]

$$\tilde{X}_t = x + \int_0^t a\Big(\tilde{X}_{\eta_n(s)}\Big)ds + \int_0^t \sigma\Big(\tilde{X}_{\eta_n(s)}\Big)dW_s, \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

У роботах [6, 9] було встановлено, що схема Ейлера має слабкий порядок 1 апроксимації розв'язку рівняння (1), тобто існує деяка стала C, яка не залежить від h, що виконується нерівність

$$\Big|\mathbb{E}_x f(X_T) - \mathbb{E}_x f(\tilde{X}_T)\Big| \le Ch$$

для всіх «достатньо гладких» функцій f. Тут $\mathbb{E}_x$ позначає математичне сподівання при умові $X_0 = x$.

Виникає питання: як узагальнити схему Ейлера так, щоб отримати апроксимацію слабкого порядку 2 або більше? Схеми апроксимації слабкого порядку 2 досліджувались у роботах [6, 7, 9]. Загальний підхід до отримання слабких апроксимацій вищих порядків описано в роботах [3, 5]. В основі методу побудови таких схем апроксимації лежить розклад Іто – Тейлора, який вперше описано в роботі [8]. У багатовимірному випадку для використання схем апроксимації, отриманих таким чином, виникає потреба генерувати кратні інтеграли Іто, що є досить складною задачею. Для схем *слабкої* апроксимації цього можна уникнути, замінивши кратні інтеграли Іто випадковими величинами, які мають задовольняти певні достатні умови (див. [3, наслідок 5.12.1]). Останній підхід також не дуже зручний, оскільки зазвичай не вдається знайти чіткий та зрозумілий алгоритм побудови таких випадкових величин.

У цій статті ми пропонуємо інший підхід до побудови схем слабких апроксимацій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (1), який уникає зазначених вище незручностей. Окремо відмітимо, що наш метод дозволяє отримувати схеми слабкої апроксимації довільного порядку і такі схеми можна будувати алгоритмічно. Звичайно, отримані формули будуть громіздкими, але це притаманно всім схемам апроксимацій вищих порядків.

Стаття побудована таким чином: у розділі 2 розглядаються попередні відомості та формулюється основна теорема, у розділі 3 розглядається теорема про однокрокову оцінку та пояснюється, як за допомогою запропонованого методу отримувати явний вигляд схем слабкої апроксимації, у розділі 4 доводиться основна теорема.

2. Попередні відомості та основна теорема

Схему Ейлера (2) можна переписати так:

$$\begin{cases} \tilde{X}_t = \tilde{X}_{\eta_n(t)} + a\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}\Big)(t - \eta_n(t)) + \sigma\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}\Big)\big(W_t - W_{\eta_n(t)}\big), \quad t \in [0,T], \\ \tilde{X}_0 = x. \end{cases}$$

Позначимо $\zeta_n(t) = t - \eta_n(t)$. Замість схеми Ейлера будемо розглядати її модифікацію

$$\hat{X}_t = \tilde{X}_t + \Delta_t, \quad 0 \le t \le T,$$

де коректор $\Delta_t = \Delta_t\Big(\zeta_n(t), \tilde{X}_{\eta_n(t)}, \tilde{X}_t\Big)$ потрібно обрати таким чином, щоб для деякого $\gamma > 1$ існувала така стала C, яка не залежить від h, що виконується нерівність

$$\Big|\mathbb{E}_x f(X_T) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_T)\Big| \le Ch^\gamma$$

для всіх "достатньо гладких" функцій f.

Як показано в роботі [6] для того, щоб досягти слабкого порядку апроксимації γ на відрізку $[0,T]$ достатньо отримати порядок $\gamma + 1$ на відрізку розбиття $[0,h]$. Тобто, основною метою є побудова оцінки на величину

$$\Big|\mathbb{E}_x f(X_h) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_h)\Big|.$$

У статті ми обмежимось випадком $\gamma = 2$, хоча даний метод без проблем можна узагальнити на випадок довільного порядку $\gamma > 2$.

Спочатку визначимо коректор Δ_t на проміжку $[0,h]$ (у цьому випадку $\zeta_n(t) = t$). Як побудувати коректор для всіх $t \in [0,T]$ показано в зауваженні 1. Для означення коректора $\Delta_t, t \in [0,h]$ будемо використовувати поліноми Ерміта. Нижче коротко пригадаємо їх означення та деякі властивості. Введемо позначення

$$b(x) = \sigma(x)\sigma^T(x), \quad b(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^d, \quad b^{-1}(x) = (b_{ij}^{-1}(x))_{i,j=1}^d.$$

Для функції $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ позначимо

$$\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_{i_1 i_2 \dots i_s}^s f := \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_s}}.$$

На відрізку $[0,h]$ схема Ейлера (2) набуває вигляду

$$\tilde{X}_t = x + a(x)t + \sigma(x)W_t, \quad 0 \le t \le h.$$

Перехідна функція ймовірностей $p_t(x,y)$ такого процесу має вигляд

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}|\det b(x)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\big(y-x-a(x)t\big)^T b^{-1}(x)\big(y-x-a(x)t\big)}{2t}\right\}.$$

Означення 1. Поліномами Ерміта будемо називати сім'ю функцій

$$\left\{H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^d, t>0, s \in \mathbb{N}\cup\{0\}, i_j = \overline{1..d}, j = \overline{1..s}\right\},$$

кожна з яких задовольняє рівність

$$\frac{\partial^s}{\partial y_{i_1}\partial y_{i_2}\ldots\partial y_{i_s}} p_t(x,y) = (-1)^s H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,y) p_t(x,y).$$

Нескладними перетвореннями можна отримати явний вигляд деяких поліномів Ерміта. Наприклад, для $k,l=\overline{1..d}$ маємо

$$H_t^0(x,y) = 1,$$

$$H_t^k(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^d b_{ik}^{-1}(x)(y_i - x_i - a_i(x)t)}{t},$$

$$H_t^{kl}(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^d b_{ik}^{-1}(x)(y_i - x_i - a_i(x)t)\sum\limits_{i=1}^d b_{il}^{-1}(x)(y_i - x_i - a_i(x)t)}{t^2} - \frac{b_{kl}^{-1}(x)}{t}$$

і так далі. У подальшому нам будуть потрібні деякі співвідношення між поліномами Ерміта, а саме для $k,l,m,n=\overline{1..d}$ справедливі такі рівності:

$$H_t^k(x,y)H_t^l(x,y) = H_t^{kl}(x,y) + \frac{b_{kl}^{-1}(x)}{t}, \tag{3}$$

$$H_t^k(x,y)H_t^{lm}(x,y) = H_t^{klm}(x,y) + \frac{b_{kl}^{-1}(x)}{t}H_t^m(x,y) + \frac{b_{km}^{-1}(x)}{t}H_t^l(x,y), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} H_t^{kl}(x,y)H_t^{mn}(x,y) = H_t^{klmn}(x,y) + \\ +\frac{b_{km}^{-1}(x)}{t}H_t^{ln}(x,y) + \frac{b_{kn}^{-1}(x)}{t}H_t^{lm}(x,y) + \frac{b_{lm}^{-1}(x)}{t}H_t^{kn}(x,y) + \frac{b_{ln}^{-1}(x)}{t}H_t^{km}(x,y) + \\ +\frac{b_{km}^{-1}(x)b_{ln}^{-1}(x) + b_{kn}^{-1}(x)b_{lm}^{-1}(x)}{t^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Відмітимо деякі властивості поліномів Ерміта. Сформулюємо їх у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай* $\tilde{X}_t = x + a(x)t + \sigma(x)W_t, t \ge 0$. *Тоді*

1) Якщо $f \in C_b^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, *то справедлива рівність*

$$\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_t)H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,\tilde{X}_t) = \mathbb{E}_x \partial^s_{i_1 i_2 \ldots i_s} f(\tilde{X}_t). \tag{6}$$

2) Якщо $f \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, $a \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, $\sigma \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d\times m})$, *то існує така стала* C, *яка не залежить від* t *та* x, *що виконується нерівність*

$$\left|\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_t)H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,\tilde{X}_t)\right| \le Ct^{-\frac{s}{2}}. \tag{7}$$

Доведення. 1) Запишемо

$$\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_t)H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,\tilde{X}_t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{H_t^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x,y)p_t(x,y)}_{(-1)^s \frac{\partial^s}{\partial y_{i_1}\partial y_{i_2}\ldots\partial y_{i_s}} p_t(x,y)} dy =$$

$$= |\text{ інтегруємо частинами } s \text{ разів }| = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \partial^s_{i_1 i_2 \ldots i_s} f(y)p_t(x,y)dy = \mathbb{E}_x \partial^s_{i_1 i_2 \ldots i_s} f(\tilde{X}_t).$$

2) Використаємо метод математичної індукції. Для $s = 1$ маємо

$$\left|\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_t) H_t^{i_1}(x, \tilde{X}_t)\right| = \left|\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y) \sum_{i=1}^d b_{ii_1}^{-1}(x)(y_i - x_i - a_i(x)t) p_t(x,y)dy\right| =$$

$$= \mid \text{зробимо заміну } z = \tfrac{1}{\sqrt{t}}(y - x - a(x)t) \mid =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{t}(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\det b(x)|^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\Big(\sqrt{t}z + x + a(x)t\Big) \sum_{i=1}^d b_{ii_1}^{-1}(x) z_i \exp\Big\{-\frac{z^T b^{-1}(x) z}{2}\Big\} dz\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Остання нерівність правильна, оскільки нормальний випадковий вектор має моменти всіх порядків.

Із рівності

$$\frac{\partial^{s+1}}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_{s+1}}} p_t(x,y) = \frac{\partial}{\partial y_{i_{s+1}}}\left(\frac{\partial^s}{\partial y_{i_1}\dots\partial y_{i_s}} p_t(x,y)\right)$$

випливає співвідношення

$$H_t^{i_1\dots i_{s+1}}(x,y) = H_t^{i_1\dots i_s}(x,y) \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^d b_{ii_{s+1}}^{-1}(x)(y_i - x_i - a_i(x)t)}{t} - \frac{\partial}{\partial y_{s+1}} H_t^{i_1\dots i_s}(x,y).$$

Звідси бачимо, що при переході від s до $s+1$ при заміні $z = \frac{1}{\sqrt{t}}(y - x - a(x)t)$ в інтегралі з'являється додатковий множник $\frac{1}{\sqrt{t}}$, що і доводить необхідне твердження. $\square$

Запишемо вигляд коректора $\Delta_t, t \in [0,h]$. Нехай $\Delta_t = (\Delta_{t,1}, \dots, \Delta_{t,d})^T$. Для $i = \overline{1..d}$ покладемо

$$\Delta_{t,i} = t^2 \sum_{j,k=1}^d \Big(c_{ijk}^{(0)}(x) + c_{ijk}^{(1)}(x) H_t^j(x, \tilde{X}_t) + c_{ijk}^{(2)}(x) H_t^{jk}(x, \tilde{X}_t)\Big). \tag{8}$$

Зауваження 1. На всьому проміжку $[0,T]$ коректор Δ_t визначається так: для $i = 1, \dots, d$ покладемо

$$\Delta_{t,i} = \zeta_n(t)^2 \sum_{j,k=1}^d \Big(c_{ijk}^{(0)}\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}\Big) + c_{ijk}^{(1)}\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}\Big) H_{\zeta_n(t)}^j\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}, \tilde{X}_t\Big) + c_{ijk}^{(2)}\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}\Big) H_{\zeta_n(t)}^{jk}\Big(\tilde{X}_{\eta_n(t)}, \tilde{X}_t\Big)\Big).$$

Коефіцієнти $c_{ijk}^{(0)}(x), c_{ijk}^{(1)}(x)$ та $c_{ijk}^{(2)}(x)$ потрібно підібрати таким чином, щоб отримана схема $\hat{X}$ мала слабкий порядок 2 апроксимації розв'язку рівняння (1). Один зі способів, як знаходити ці коефіцієнти, показано в ході доведення теореми про однокрокову оцінку. Щоб не шукати їх серед доволі громіздких формул, випишемо явний вигляд знайдених коефіцієнтів тут:

$$c_{ijk}^{(0)}(x) = \frac{1}{2d}\partial_j a_i(x) a_j(x) + \frac{1}{4}\partial_{jk}^2 a_i(x) b_{jk}(x), \tag{9}$$

$$c_{ijk}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\partial_k a_i(x) b_{jk}(x) + \frac{1}{4} a_k(x)\partial_k b_{ij}(x) + \frac{1}{8}\sum_{l=1}^d \partial_{kl}^2 b_{ij}(x) b_{kl}(x) -$$

$$-\frac{1}{32d} \sum_{p,q,r,u,v,w=1}^d \partial_r b_{ip}(x) \partial_w b_{iu}(x) b_{qr}(x) b_{vw}(x) \big(b_{pu}^{-1}(x) b_{qv}^{-1}(x) + b_{pv}^{-1}(x) b_{qu}^{-1}(x)\big), \tag{10}$$

$$c_{ijk}^{(2)}(x) = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{d} \partial_l b_{ij}(x) b_{kl}(x). \tag{11}$$

Основним результатом цієї статті є теорема 1.

Теорема 1. *Нехай $f \in C_b^6(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $a \in C_b^6(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $\sigma \in C_b^6(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times m})$. Тоді існує деяка стала C, яка не залежить від h, що виконується нерівність*

$$\left|\mathbb{E}_x f(X_T) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_T)\right| \le Ch^2.$$

3. Однокрокова оцінка

Для доведення теореми 1, як було зазначено вище, достатньо отримати слабкий порядок 3 апроксимації схеми $\hat{X}$ на одному кроці розбиття $[0, h]$. Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай $f \in C_b^6(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $a \in C_b^4(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $\sigma \in C_b^4(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times m})$. Тоді існує деяка стала C, яка не залежить від h, що виконується нерівність*

$$\left|\mathbb{E}_x f(X_h) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_h)\right| \le Ch^3.$$

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що виконуються такі рівності

$$\mathbb{E}_x f(X_h) = f(x) + Af(x)h + \frac{1}{2}A(Af(x))h^2 + R_h(x), \quad |R_h(x)| \le Ch^3, \tag{12}$$

та

$$\mathbb{E}_x f(\hat{X}_h) = f(x) + Af(x)h + \frac{1}{2}A(Af(x))h^2 + \hat{R}_h(x), \quad |\hat{R}_h(x)| \le Ch^3, \tag{13}$$

де

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i(x)\partial_i f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x)\partial_{ij}^2 f(x),$$

$$A(Af(x)) = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\partial_j a_i(x) a_j(x) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d}\partial_{jk}^2 a_i(x) b_{jk}(x)\right)\partial_i f(x) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{d}\left(a_i(x)a_j(x) + \sum_{k=1}^{d}\left(\partial_k a_i(x) b_{jk}(x) + \frac{1}{2}a_k(x)\partial_k b_{ij}(x)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{d}\partial_{kl}^2 b_{ij}(x) b_{kl}(x)\right)\partial_{ij}^2 f(x) +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d}\left(a_i(x) b_{jk}(x) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d}\partial_l b_{ij}(x) b_{kl}(x)\right)\partial_{ijk}^3 f(x) +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{d} b_{ij}(x) b_{kl}(x)\partial_{ijkl}^4 f(x).$$

Співвідношення (12) є наслідком відомої теореми з теорії напівгруп (див. [2, теорема 11.6.3]).

Доведемо рівність (13). Розглянемо схему $\hat{X}$ із коректором Δ, визначеним формулою (8) із поки що довільними коефіцієнтами $c^{(0)}_{ijk}(x), c^{(1)}_{ijk}(x)$ та $c^{(2)}_{ijk}(x)$. За формулою Тейлора

$$\mathbb{E}_x f(\hat{X}_h) = \mathbb{E}_x f(\tilde{X}_h + \Delta_h) = \mathbb{E}_x f(\tilde{X}_h) + \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}_x \partial_i f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j} + \frac{1}{6}\sum_{i,j,k=1}^{d} \mathbb{E}_x \partial^3_{ijk} f(\tilde{X}_h + \theta_h\Delta_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j}\Delta_{h,k}, \quad \theta_h \in (0,1).$$

Розглянемо кожен доданок окремо.

1) $\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_h)$. Зараз

$$\tilde{X}_t = x + a(x)t + \sigma(x)W_t, \quad 0 \le t \le h.$$

Застосуємо формулу Іто тричі

$$\mathbb{E}_x f(\tilde{X}_h) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(x)\int_0^h \mathbb{E}_x \partial_i f(\tilde{X}_s)ds + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x)\int_0^h \mathbb{E}_x \partial_{ij} f(\tilde{X}_s)ds =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(x)\int_0^h \Bigg(\partial_i f(x) +$$

$$+\int_0^s \Bigg(\sum_{j=1}^{d} a_j(x)\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_r) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(x)\mathbb{E}_x \partial^3_{ijk} f(\tilde{X}_r)\Bigg)\Bigg) ds +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x)\int_0^h \Bigg(\partial^2_{ij} f(x) +$$

$$+\int_0^s \Bigg(\sum_{k=1}^{d} a_k(x)\mathbb{E}_x \partial^3_{ijk} f(\tilde{X}_r) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} b_{kl}(x)\mathbb{E}_x \partial^4_{ijkl} f(\tilde{X}_r)\Bigg)\Bigg) ds =$$

$$= f(x) + Af(x)h + \sum_{i,j=1}^{d} a_i(x)a_j(x)\int_0^h\int_0^s \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_r)drds +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d} a_i(x)b_{jk}(x)\int_0^h\int_0^s \mathbb{E}_x \partial^3_{ijk} f(\tilde{X}_r)drds +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{d} b_{ij}(x)b_{kl}(x)\int_0^h\int_0^s \mathbb{E}_x \partial^4_{ijkl} f(\tilde{X}_r)drds =$$

$$= f(x) + Af(x)h + \sum_{i,j=1}^{d} a_i(x)a_j(x)\int_0^h\int_0^s \Bigg(\partial^2_{ij} f(x) +$$

$$+\int_0^r \Bigg(\sum_{k=1}^{d} a_k(x)\mathbb{E}_x \partial^3_{ijk} f(\tilde{X}_q) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} b_{kl}(x)\mathbb{E}_x \partial^4_{ijkl} f(\tilde{X}_q)\Bigg) dq\Bigg) drds +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d} a_i(x)b_{jk}(x)\int_0^h\int_0^s\Bigg(\partial^3_{ijk}f(x)+$$

$$+\int_0^r\left(\sum_{l=1}^{d} a_l(x)\mathbb{E}_x\partial^4_{ijkl}f(\tilde{X}_q)+\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{d} b_{lm}(x)\mathbb{E}_x\partial^5_{ijklm}f(\tilde{X}_r)\right)dq\Bigg)drds+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{d} b_{ij}(x)b_{kl}(x)\int_0^h\int_0^s\Bigg(\partial^4_{ijkl}f(x)+$$

$$+\int_0^r\left(\sum_{m=1}^{d} a_m(x)\mathbb{E}_x\partial^5_{ijklm}f(\tilde{X}_q)+\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{d} b_{mn}(x)\mathbb{E}_x\partial^6_{ijklmn}f(\tilde{X}_r)\right)dq\Bigg)drds.$$

З умов теореми випливає, що всі потрійні інтеграли в останній сумі мають порядок h^3. Тому

$$\mathbb{E}_xf(\tilde{X}_h)=f(x)+Af(x)h+\frac{h^2}{2}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{d} a_i(x)a_j(x)\partial^2_{ij}f(x)+$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d} a_i(x)b_{jk}(x)\partial^3_{ijk}f(x)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{d} b_{ij}(x)b_{kl}(x)\partial^4_{ijkl}f(x)\Bigg)+O(h^3).$$

2) $\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}=$$

$$=h^2\sum_{i,j,k=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)\Big(c^{(0)}_{ijk}(x)+c^{(1)}_{ijk}(x)H^j_h(x,\tilde{X}_h)+c^{(2)}_{ijk}(x)H^{jk}_h(x,\tilde{X}_h)\Big).$$

Використавши формулу (6), можемо записати

$$\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)H^j_h(x,\tilde{X}_h)=\mathbb{E}_x\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h),$$

$$\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)H^{jk}_h(x,\tilde{X}_h)=\mathbb{E}_x\partial^3_{ijk}f(\tilde{X}_h).$$

Застосувавши формулу Іто до величин $\partial_i f(\tilde{X}_h),\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h)$ та $\partial^3_{ijk}f(\tilde{X}_h)$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial_i f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}=$$

$$=h^2\sum_{i,j,k=1}^{d}\Big(c^{(0)}_{ijk}(x)\partial_i f(x)+c^{(1)}_{ijk}(x)\partial^2_{ij}f(x)+c^{(2)}_{ijk}(x)\partial^3_{ijk}f(x)\Big)+O(h^3).$$

3) $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j}$. Маємо

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j}=$$

$$= \frac{h^4}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) \sum_{p,q=1}^{d} \Big(c^{(0)}_{ipq}(x) + c^{(1)}_{ipq}(x) H^p_h(x,\tilde{X}_h) + c^{(2)}_{ipq}(x) H^{pq}_h(x,\tilde{X}_h) \Big) \times$$
$$\times \sum_{u,v=1}^{d} \Big(c^{(0)}_{juv}(x) + c^{(1)}_{juv}(x) H^u_h(x,\tilde{X}_h) + c^{(2)}_{juv}(x) H^{uv}_h(x,\tilde{X}_h) \Big).$$

Розкриємо дужки в цьому виразі. Отримаємо (без урахування коефіцієнтів $c^{(0)}_{ijk}(x)$, $c^{(1)}_{ijk}(x)$, $c^{(2)}_{ijk}(x)$ та множника $\frac{h^4}{2}$) суму доданків виду

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h), \quad \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h), \quad \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^{pq}_h(x,\tilde{X}_h),$$
$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h) H^u_h(x,\tilde{X}_h), \quad \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h) H^{uv}_h(x,\tilde{X}_h),$$
$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^{pq}_h(x,\tilde{X}_h) H^{uv}_h(x,\tilde{X}_h).$$

Розглянемо кожен із них окремо.

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) = O(1), \tag{14}$$

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h) = |\text{ за формулою (6) }| = \mathbb{E}_x \partial^3_{ijp} f(\tilde{X}_h) = O(1), \tag{15}$$

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^{pq}_h(x,\tilde{X}_h) = |\text{ за формулою (6) }| = \mathbb{E}_x \partial^4_{ijpq} f(\tilde{X}_h) = O(1), \tag{16}$$

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h) H^u_h(x,\tilde{X}_h) = |\text{ за формулою (3) }| =$$
$$= \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) \left(H^{pu}_h(x,\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} \right) = |\text{ за формулою (6) }| =$$
$$= \mathbb{E}_x \partial^4_{ijpu} f(\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) = O\left(\frac{1}{h}\right), \tag{17}$$

$$\mathbb{E}_x \partial^2 f_{ij}(\tilde{X}_h) H^p_h(x,\tilde{X}_h) H^{uv}_h(x,\tilde{X}_h) = |\text{ за формулою (4) }| =$$
$$= \mathbb{E}_x \partial^2 f_{ij}(\tilde{X}_h) \left(H^{puv}_h(x,\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} H^v_h(x,\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pv}(x)}{h} H^u_h(x,\tilde{X}_h) \right) =$$
$$= |\text{ за формулою (6) }| =$$
$$= \mathbb{E}_x \partial^5_{ijpuv} f(\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^3_{ijv} f(\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pv}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^3_{iju} f(\tilde{X}_h) = O\left(\frac{1}{h}\right), \tag{18}$$

$$\mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) H^{pq}_h(x,\tilde{X}_h) H^{uv}_h(x,\tilde{X}_h) = |\text{ за формулою (5) }| =$$
$$= \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) \Bigg(H^{pquv}_h(x,y) +$$
$$+ \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} H^{qv}_h(x,y) + \frac{b^{-1}_{pv}(x)}{h} H^{qu}_h(x,y) + \frac{b^{-1}_{qu}(x)}{h} H^{pv}_h(x,y) + \frac{b^{-1}_{qv}(x)}{h} H^{pu}_h(x,y) +$$
$$+ \frac{b^{-1}_{pu}(x) b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x) b^{-1}_{qu}(x)}{h^2} \Bigg) =$$
$$= |\text{ за формулою (6) }| = \mathbb{E}_x \partial^6_{ijpquv} f(\tilde{X}_h) +$$
$$+ \frac{b^{-1}_{pu}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^4_{ijqv} f(\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{pv}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^4_{ijqu} f(\tilde{X}_h) +$$
$$+ \frac{b^{-1}_{qu}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^4_{ijpv} f(\tilde{X}_h) + \frac{b^{-1}_{qv}(x)}{h} \mathbb{E}_x \partial^4_{ijpu} f(\tilde{X}_h) +$$
$$+ \frac{b^{-1}_{pu}(x) b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x) b^{-1}_{qu}(x)}{h^2} \mathbb{E}_x \partial^2_{ij} f(\tilde{X}_h) =$$

$$= O\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{b^{-1}_{pu}(x)b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x)b^{-1}_{qu}(x)}{h^2}\mathbb{E}_x\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h). \quad (19)$$

Врахувавши співвідношення (14)–(19) та застосувавши формулу Іто до величини $\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h)$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial^2_{ij}f(\tilde{X}_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j} =$$

$$= \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\partial^2_{ij}f(x)\sum_{p,q,u,v=1}^{d}c^{(2)}_{ipq}(x)c^{(2)}_{juv}(x)\big(b^{-1}_{pu}(x)b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x)b^{-1}_{qu}(x)\big) + O(h^3).$$

4) $\frac{1}{6}\sum\limits_{i,j,k=1}^{d}\mathbb{E}_x\partial^3_{ijk}f(\tilde{X}_h + \theta_h\Delta_h)\Delta_{h,i}\Delta_{h,j}\Delta_{h,k}$. Аналогічно до формул (3)–(5) можна показати, що вираз $\Delta_{h,i}\Delta_{h,j}\Delta_{h,k}$ можна представити як лінійну комбінацію поліномів Ерміта до порядку 6 включно. Враховуючи множник $(h^2)^3 = h^6$, а також нерівність (7), маємо висновок, що такий вираз має порядок $h^{6-\frac{6}{2}} = h^3$.

Остаточно, можна записати

$$\mathbb{E}_x f(\hat{X}_h) = f(x) + Af(x)h + \frac{h^2}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}2c^{(0)}_{ijk}(x)\partial_i f(x) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\Bigg(a_i(x)a_j(x) +$$

$$+ \sum_{p,q,u,v=1}^{d}c^{(2)}_{ipq}(x)c^{(2)}_{juv}(x)\big(b^{-1}_{pu}(x)b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x)b^{-1}_{qu}(x)\big) + \sum_{k=1}^{d}2c^{(1)}_{ijk}(x)\Bigg)\partial^2_{ij}f(x) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}\Big(a_i(x)b_{jk}(x) + 2c^{(2)}_{ijk}(x)\Big)\partial^3_{ijk}f(x) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\frac{1}{4}b_{ij}(x)b_{kl}(x)\partial^4_{ijkl}f(x) + O(h^3).$$

Це зображення правильне для схеми $\hat{X}$ із довільними коефіцієнтами $c^{(0)}_{ijk}(x), c^{(1)}_{ijk}(x)$ та $c^{(2)}_{ijk}(x)$. Підберемо їх таким чином, щоб виконувалось співвідношення (13). Для цього достатньо, щоб були рівними коефіцієнти при $\partial_i f(x), \partial^2_{ij}f(x)$ та $\partial^3_{ijk}f(x)$ у виразах для $\mathbb{E}_x f(\hat{X}_h)$ та $\mathbb{E}_x f(X_h)$. Маємо такі співвідношення:

$$\sum_{i,j,k=1}^{d}2c^{(0)}_{ijk}(x)\partial_i f(x) = \sum_{i=1}^{d}\Bigg(\sum_{j=1}^{d}\partial_j a_i(x)a_j(x) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d}\partial^2_{jk}a_i(x)b_{jk}(x)\Bigg)\partial_i f(x), \quad (20)$$

$$\sum_{i,j=1}^{d}\Bigg(a_i(x)a_j(x) +$$

$$+ \sum_{p,q,u,v=1}^{d}c^{(2)}_{ipq}(x)c^{(2)}_{juv}(x)\big(b^{-1}_{pu}(x)b^{-1}_{qv}(x) + b^{-1}_{pv}(x)b^{-1}_{qu}(x)\big) + \sum_{k=1}^{d}2c^{(1)}_{ijk}(x)\Bigg)\partial^2_{ij}f(x) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d}\Bigg(a_i(x)a_j(x) + \sum_{k=1}^{d}\Big(\partial_k a_i(x)b_{jk}(x) + \frac{1}{2}a_k(x)\partial_k b_{ij}(x)\Big) +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{d}\partial^2_{kl}b_{ij}(x)b_{kl}(x)\Bigg)\partial^2_{ij}f(x), \quad (21)$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{d}\Big(a_i(x)b_{jk}(x)+2c^{(2)}_{ijk}(x)\Big)\partial^3_{ijk}f(x)=$$
$$=\sum_{i,j,k=1}^{d}\left(a_i(x)b_{jk}(x)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d}\partial_l b_{ij}(x)b_{kl}(x)\right)\partial^3_{ijk}f(x). \quad (22)$$

Співвідношення (20) можна переписати таким чином:

$$\sum_{i,j,k=1}^{d}2c^{(0)}_{ijk}(x)\partial_i f(x)=\sum_{i,j,k=1}^{d}\left(\frac{1}{d}\partial_j a_i(x)a_j(x)+\frac{1}{2}\partial^2_{jk}a_i(x)b_{jk}(x)\right)\partial_i f(x).$$

Тому коефіцієнти $c^{(0)}_{ijk}(x)$ можна обрати як

$$c^{(0)}_{ijk}(x)=\frac{1}{2d}\partial_j a_i(x)a_j(x)+\frac{1}{4}\partial^2_{jk}a_i(x)b_{jk}(x).$$

Із співвідношення (22), отримаємо, що

$$c^{(2)}_{ijk}(x)=\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{d}\partial_l b_{ij}(x)b_{kl}(x).$$

Підставивши знайдені коефіцієнти $c^{(2)}_{ijk}(x)$ у (21) отримаємо, що

$$c^{(1)}_{ijk}(x)=\frac{1}{2}\partial_k a_i(x)b_{jk}(x)+\frac{1}{4}a_k(x)\partial_k b_{ij}(x)+\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{d}\partial^2_{kl}b_{ij}(x)b_{kl}(x)-$$
$$-\frac{1}{32d}\sum_{p,q,r,u,v,w=1}^{d}\partial_r b_{ip}(x)\partial_w b_{iu}(x)b_{qr}(x)b_{vw}(x)\big(b^{-1}_{pu}(x)b^{-1}_{qv}(x)+b^{-1}_{pv}(x)b^{-1}_{qu}(x)\big).$$

Як бачимо, знайдені вирази для коефіцієнтів $c^{(0)}_{ijk}(x)$, $c^{(1)}_{ijk}(x)$ та $c^{(2)}_{ijk}(x)$ збігаються із формулами (9)–(11). □

Зауваження 2. Порівняємо нашу схему з деякими вже відомими. Якщо $d=m=1$, то отримана схема апроксимації має вигляд

$$\hat{X}_t=x+a(x)t+\sigma(x)W_t+\frac{1}{2}\sigma(x)\sigma'(x)(W_t^2-t)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}a(x)a'(x)+\frac{1}{4}a''(x)\sigma^2(x)\right)t^2+$$
$$+\left(\frac{1}{2}a(x)\sigma'(x)+\frac{1}{2}a'(x)\sigma(x)+\frac{1}{4}\sigma^2(x)\sigma''(x)\right)tW_t, \quad t\in[0,h],$$

і вона збігається зі спрощеною слабкою схемою Тейлора порядку 2, яка розглянута в [3, розділ 14.2].

У випадку $d>1, m>1$ для отримання спрощеної слабкої схеми Тейлора порядку 2 потрібно генерувати дві групи незалежних випадкових величин – прирости процесу Вінера та певні допоміжні двоточкові випадкові величини (див. формули (2.7)–(2.10) у [3, розділ 14.2]). Тоді як схема, отримана нашим методом, вимагає генерування лише приростів процесу Вінера.

4. Доведення теореми 1

Будемо використовувати підхід, запропонований у роботі [6]. Спершу помітимо, що з марковської властивості випливає рівність

$$\mathbb{E}_x f(X_T) = \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{X_{T-t}} f(X_t) = \mathbb{E}_x f^t(X_{T-t}),$$

де

$$f^t(x) := \mathbb{E}_x f(X_t).$$

Позначимо

$$u_k(x) := \mathbb{E}_x f^{kh}(\hat{X}_{T-kh}).$$

Тоді

$$\mathbb{E}_x f(X_T) = u_n(x), \quad \mathbb{E}_x f(\hat{X}_T) = u_0(x),$$

і можна записати таке ланцюгове представлення:

$$\mathbb{E}_x f(X_T) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_T) = \sum_{k=1}^{n} \Big(u_k(x) - u_{k-1}(x) \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{E}_x f^{kh}(\hat{X}_{T-kh}) - \mathbb{E}_x f^{(k-1)h}(\hat{X}_{T-(k-1)h}) \Big).$$

Із рівностей

$$\mathbb{E}_x f^{(k-1)h}(\hat{X}_{T-(k-1)h}) = \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{\hat{X}_{T-kh}} f^{(k-1)h}(\hat{X}_h)$$

та

$$f^{kh}(y) = \mathbb{E}_y f^{(k-1)h}(X_h),$$

випливає, що

$$\mathbb{E}_x f^{kh}(\hat{X}_{T-kh}) = \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{\hat{X}_{T-kh}} f^{(k-1)h}(X_h).$$

Остаточно можемо написати

$$\mathbb{E}_x f(X_T) - \mathbb{E}_x f(\hat{X}_T) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x \Big(\mathbb{E}_{\hat{X}_{T-kh}} f^{(k-1)h}(X_h) - \mathbb{E}_{\hat{X}_{T-kh}} f^{(k-1)h}(\hat{X}_h) \Big).$$

Для доведення теореми залишилось перевірити, що функція $f^t(\cdot) \in C^6(\mathbb{R}^d)$, при чому всі її похідні рівномірно обмежені по змінній t. Це твердження випливає із теореми 1 та наслідку 1 книги [1, § 8].

5. Подяка

Автори вдячні Фонду Александера фон Гумбольтда за підтримку цього дослідження в рамках Research Group Linkage Programme між Інститутом математики Потсдамського університету та Інститутом математики НАН України

Автори висловлюють глибоку подяку рецензенту за цінні зауваження та поради, які змогли суттєво покращити текст статті.

Список літератури

1. I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1972.
2. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analisys and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1996.
3. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer, Berlin, 1995.
4. G. Maruyama, *Continuous Markov processes and stochastic equations*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **4** (1955), 48–90.
5. R. Mikulevicius, E. Platen, *Time Discrete Taylor Approximations for Ito Processes with Jump Component*, Mathematische Nachrichten, **138** (1988), 93–104.
6. G. N. Milshtein, *A Method of Second-Order Accuracy Integration of Stochastic Differential Equations*, Theory Probab. Appl., **23** (1978), no. 2, 396–401.

7. E. Platen, *Zur zeitdiskreten Approximation von Itoprozessen*, Diss.B., IMath, Akad. der Wiss. der DDR, Berlin (1984).
8. E. Platen, W. Wagner, *On a Taylor formula for a class of Ito processes*, Probab. and Math. Statistics, **3** (1982), no. 1, 37–51.
9. D. Talay, *Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of a SDE and applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **61** (1984), 294–313.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
Адреса електронної пошти: sem_bodn@ukr.net

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: kulik@imath.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 21.07.2018

MODIFIED EULER SCHEME FOR WEAK APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY WIENER PROCESS

S. V. BODNARCHUK, A. M. KULIK

Abstract. Weak approximation scheme of solutions of stochastic differential equations driven by Wiener processes is considered.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВИНЕРОВСКИМ ШУМОМ

С. В. БОДНАРЧУК, А. М. КУЛИК

Аннотация. В статье рассматривается схема слабой аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений с винеровским шумом.