Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 71–82

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 71–82

УДК 519.21

ПРО ОСОБЛИВІСТЬ РОЗПОДІЛІВ ПЕРЕСТРИБКОВИХ ФУНКЦІОНАЛІВ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ЗВЕРХУ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮЗІ МАРКОВА

Д. В. ГУСАК, Є. В. КАРНАУХ

Анотація. Вивчається питання про те, чи зберігається властивість відсутності післядії, притаманної геометричному та показниковому розподілам, для перестрибкових функціоналів майже напівнеперервних зверху цілозначних та дійснозначних процесів на ланцюгу Маркова (ЛМ). Установлюється, що за умови досяжності рівня та відомого стану середовища в момент досягнення цього рівня зазначена властивість справедлива лише для перестрибку через рівень $x \geq 0$ і його розподіл не залежить ні від моменту перестрибу, ні від x. Розподіл недострибку рівня x визначається в термінах розподілу недострибку нульового рівня. Аналогічна залежність установлюється для стрибка, що накриває рівень x.

Ключові слова і фрази. Майже напівнеперервні процеси на ЛМ, відсутність післядії, функціонали перетину додатного рівня, основна факторизаційна тотожність.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K37; Secondary 60G51.

1. Вступ

Розглянемо двовимірний процес Маркова $\{\xi(t), J(t)\}$, у якого друга компонента є незвідний ергодичний ЛМ із множиною станів $\{1, \ldots, m\}$, інфінітезимальною матрицею $\mathbf{Q}$ та початковим стаціонарним розподілом π, а перша за фіксованих значень другої є процесом Леві, що починається з нуля. Для довільних $k, r = \overline{1, m}$, $x \in \mathbb{R}$ та борелевої множини A з $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{P}\{\xi(s+t) \in A, J(s+t) = r | \xi(s) = x, J(s) = k\} = \mathsf{P}\{\xi(t) \in A - x, J(t) = r | J(0) = k\}.$$

Такі процеси називають марковськими адитивними процесами, вони можуть слугувати як базова модель задач теорії ризику та теорії масового обслуговування, що дозволяє врахувати залежність від стану «зовнішнього» середовища (див. наприклад, [1, Chapter VII], [2, Chapter 3] та [3, Chapter 8]). При цьому ряд задач можна звести до вивчення розподілів перестрибкових функціоналів:

$$\begin{gathered}\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi\big(\tau^+(x)\big) - x, \\ \gamma_2(x) = x - \xi\big(\tau^+(x) - 0\big), \gamma_3(x) = \gamma_1(x) + \gamma_2(x), x \geq 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Якщо процес $\xi(t)$ є напівнеперервним зверху (траєкторії не мають додатних стрибків), то за умови досяжності рівня x ця задача є достатньо простою, оскільки тоді $\gamma_{1,2,3}(x) = 0$ майже напевно. За наявності додатних стрибків, що мають розподіли фазового типу (phase-type distributions), застосовуючи метод побудови потокових моделей (fluid flow models) (див., наприклад, [1, IX.5]), можна отримати матрично експоненційний вираз для генератрис перестрибкових функціоналів. Брейєр у [4] за допомогою методу потокових моделей одержав матрично експоненційний вираз для розподілу перестрибку і в [5] узагальнив результат щодо розподілу просторово-часового положення перестрибку та недострибку, отриманий в [6], для збуреного складного процесу Пуассона зі стрибками, що мають розподіли фазового типу, заданого на ЛМ. Цей результат Брейєр і Бадеску в [7] застосовували для знаходження, так званої, міри Гербера — Шіу (Gerber — Shiu measure), яка в теорії ризику задає функцію штрафу (expected discounted penalty function, означення див., наприклад, [8, Chapter 1]). Крім того, спільний розподіл перестрибкових функціоналів має важливе значення під час вивчення розподілів двограничних функціоналів, які, зокрема, у фінансовій математиці можна застосувати для визначення раціональної ціни довічного американського опціону (див., наприклад, [9]).

Якщо обмежити розгляд лише спільним розподілом моменту першого досягнення додатного рівня та перестрибку, то можна обійтись без істотних обмежень на розподіл від'ємних стрибків (цей висновок можемо отримати безпосередньо із другої факторизаційної тотожності [10, розділ I, теорема 3.1]). Якщо ж до розгляду включити недостибок, то метод потокових моделей вимагатиме припущення про те, що розподіл як додатних так і від'ємних стрибків має фазовий тип. У роботі [10, розділ I, теорема 3.3] при застосуванні факторизаційного методу одержано формули для спільної генератриси функціоналів перетину додатного рівня в термінах інтегральних перетворень розподілів екстремумів процесу $\xi^{\pm}(t) = \sup(\inf)_{0\le u\le t}\xi(u)$ та їх доповнень $\bar{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{+}(t), \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{-}(t)$, зупинених у експоненційно розподілений момент часу. Пошук цих інтегральних перетворень у загальному випадку також є непростою задачею, проте, якщо припустити, що додатний рівень перетинається лише стрибками, які мають розподіли із властивістю відсутності післядії ($\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху), то задача дещо спрощується [11, 12]. Нагадаємо, що властивість відсутності післядії для геометрично (показниково) розподілених випадкових величин $\eta_c > 0$ означає, що

$$\mathsf{P}\{\eta_c - x > y | \eta_c > x\} = \mathsf{P}\{\eta_c > y\} = \begin{cases} c^y, & y \in \mathbb{N}, 0 < c < 1; \\ e^{-cy}, & y > 0, c > 0. \end{cases}$$

Для скалярного випадку ($m = 1$) важливість цієї властивості для додатних стрибків була відмічена в роботі [13]. Зокрема, у [13, Proposition 2.1] для збурених процесів Пуассона з експоненційно розподіленими стрибками встановлено умовну незалежність моменту досягнення рівня та перестрибку, якщо перестрибок додатний. За припущення перетину додатного рівня лише показниково розподіленими стрибками незалежність $\gamma_1(x)$ та $\tau^+(x)$ у скалярному випадку досліджувалась також у [14, Chapter 5], питання залежності $\gamma_{2,3}(x)$ та $\tau^+(x)$ у [13] і [14] не розглядалось. Питання про незалежність $\gamma_k(x)$ від $\tau^+(x)$ зокрема є важливим під час визначення міри Гербера — Шіу і залежність $\gamma_2(x)$ від $\tau^+(x)$ слід враховувати під час її аналізу.

У роботах [15, 16] були досліджені розподіли функціоналів досягнення додатного рівня для процесів Пуассона на ЛМ за припущення, що від'ємні стрибки мають геометричний та показниковий розподіли відповідно, без істотних обмежень на тип розподілу додатних стрибків. У цій роботі розглядаються аналогічні функціонали для дуальних процесів (dual processes). Зокрема, досліджується незалежність або залежність $\gamma_{1,2,3}(x)$ та $\tau^+(x)$, а також установлюється зв'язок між генератрисами пар $\{\gamma_k(x), \tau^+(x)\}$, $k = 2, 3$, та спільною генератрисою для $\{\gamma_2(0), \tau^+(0)\}$, яку можемо виразити в термінах розподілу від'ємних значень $\xi(t)$. Отриманий результат дозволяє зосередитись на визначенні генератриси для $\{\gamma_2(0), \tau^+(0)\}$ під час вивчення перестрибкових функціоналів для зазначених процесів. Крім того, для скалярного цілозначного процесу одержано різні подання кореня кумулянтного рівняння залежно від знаку $E\xi(1)$, які можна застосувати для вивчення його граничної поведінки.

Для дійснозначного випадку розглядатимемо процеси Пуассона на ЛМ, які перетинають додатний рівень лише показниково розподіленими стрибками, а для цілозначних – геометрично розподіленими. В обох випадках процеси будемо називати майже напівнеперервними зверху. Унаслідок дискретності розподілу цілозначний випадок заслуговує на окрему увагу.

2. Цілозначні процеси

Спочатку розглянемо майже напівнеперервні зверху цілозначні процеси Пуассона $\xi(t)$ на ЛМ $J(t)$. Нехай $\|p_{kr}\|_{k,r=1}^{m}$ – матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга для $J(t)$ та $\{n_k, k=\overline{1,m}\}$ – інтенсивності, з якими відбуваються переходи. Позначимо через $S_k^{(1)}(t)$ та $S_k^{(2)}(t)$ незалежні в сукупності складні процеси Пуассона з інтенсивностями стрибків $\lambda_{1k}>0$ та $\lambda_{2k}>0$ відповідно, стрибки $S_k^{(1)}(t)$ геометрично розподілені з параметром $0<c_k<1$, а стрибки $S_k^{(2)}(t)$ мають розподіл $f_k(x)$, $x\in\mathbb{N}$, $k=\overline{1,m}$. Процес $\xi(t)$ починається з нуля, якщо $J(t)=k$, то його приріст визначений приростом процесу $S_k^{(1)}(t)-S_k^{(2)}(t)$. У момент переходу $J(t)$ зі стану k у стан r процес $\xi(t)$ має від'ємний стрибок величиною χ_{kr}. Еволюція так визначеного процесу задається матричною генератрисою та кумулянтою (детальніше див. [11])

$$\mathbf{E}z^{\xi(t)}=\|E\Big[z^{\xi(t)},J(t)=j|J(0)=i\Big]\|_{k,r=1}^{m}=\exp\{t\mathbf{K}(z)\},$$

$$\mathbf{K}(z)=\sum_{x\neq 0}(z^x-1)\mathbf{\Pi}_0(x)+\mathbf{Q}, \tag{2}$$

де $\mathbf{\Pi}_0(x)=\|\delta_{kr}\lambda_{2k}f_k(-x)+n_kp_{kr}\mathsf{P}\{\chi_{kr}=x\}\|$, якщо $x<0$, і якщо $x\in\mathbb{N}$, маємо $\mathbf{\Pi}_0(x)=\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C})\mathbf{C}^{x-1}$ з $\mathbf{C}=\|\delta_{kr}c_k\|$ та $\mathbf{\Lambda}_1=\|\delta_{kr}\lambda_{1k}\|$.

Позначимо через θ_s випадкову величину, незалежну від $\xi(t)$ та $J(t)$, таку, що $\mathsf{P}\{\theta_s>t\}=e^{-st}$, $s,t>0$, за допомогою якої визначається перетворення Лапласа-–Карсона, зокрема, $\mathbf{P}_s\stackrel{def}{=}Ee^{\theta_s\mathbf{Q}}=s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$. Також позначимо генератриси екстремумів та їх доповнень як

$$\mathbf{g}_{\pm}(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)}=\sum_{x\in\mathbb{Z}_{\pm}}z^x\mathbf{p}_x^{\pm}(s),$$

$$\mathbf{g}^{-}(s,z)=\mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)}=\sum_{x\in\mathbb{Z}_+}z^{-x}\check{\mathbf{p}}_{-x}^{-}(s),\mathbf{g}^{+}(s,z)=\mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}=\sum_{x\in\mathbb{Z}_+}z^x\check{\mathbf{p}}_x^{+}(s),$$

де $\mathbf{p}_x^{\pm}(s)=\mathbf{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s)=x\}$, $\check{\mathbf{p}}_{-x}^{-}(s)=\mathbf{P}\big\{\bar{\xi}(\theta_s)=-x\big\}$ та $\check{\mathbf{p}}_x^{+}(s)=\mathbf{P}\big\{\check{\xi}(\theta_s)=x\big\}$. Наведені генератриси визначають основну факторизаційну тотожність (о.ф.т.)

$$\mathbf{g}(s,z)\stackrel{def}{=}\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)}=\begin{cases}\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^-(s,z),\\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^+(s,z), \quad |z|=1.\end{cases} \tag{3}$$

Позначимо $\mathbf{p}_+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=0\}$ та $\mathbf{q}_+(s)=\mathbf{P}_s-\mathbf{p}_+(s)$ і визначимо матрицю $\mathbf{Z}_s=\big(\mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}\big)^{-1}$. В [11] встановлено, що

$$\begin{gathered}\mathbf{g}_+(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)\big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z\big)\mathbf{p}_+(s),\\ \mathbf{p}_k^+(s)=(\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-k}\mathbf{p}_+(s),k\geq 1,\\ \mathbf{P}\big\{\xi^+(\theta_s)>x\big\}\mathbf{P}_s^{-1}=\big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}.\end{gathered} \tag{4}$$

Згідно з [15, лема 2.1] твірна функція спільної генератриси перестрибкових функціоналів виражається через компоненти верхнього рядка о.ф.т. (3). Аналогічно, твірна функція генератрис функціоналів, пов'язаних із перетином «нижнього» рівня $x\leq 0$, виражається через компоненти нижнього рядка о.ф.т. (3). Оскільки для майже напівнеперервних зверху $\xi(t)$ додатні стрибки геометрично розподілені, то згортки

$$\begin{gathered}\mathbf{W}_k(s,x,u)\stackrel{def}{=}\sum_{y\geq 0}\check{\mathbf{p}}_{-y}^{-}(s)\mathbf{A}_k(x+y,u),k=\overline{1,3},\\ \mathbf{A}_1(x,u)=\sum_{k\geq x+1}u^{k-x}\mathbf{\Pi}_0(k),\mathbf{A}_2(x,u)=u^x\sum_{k\geq x+1}\mathbf{\Pi}_0(k),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\mathbf{A}_3(x,u) = \sum_{k\geq x+1} u^k \mathbf{\Pi}_0(k),$$

спрощуються і зводяться до показникового вигляду. Генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k=\overline{1,3}$, визначаються співвідношеннями, які зводяться до однотипного вигляду

$$\mathbf{V}_k(s,x,u) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(x)}u^{\gamma_k(x)}, \tau^+(x)<\infty\Big] = \\ = \sum_{y=0}^{x} s^{-1}\mathbf{p}^+_{x-y}(s)\mathbf{W}_k(s,y,u), x\geq 0, k=\overline{1,3}. \quad (6)$$

Для аналізу генератриси $\{\tau^+(x), \gamma_1(x)\}$ зручніше застосовувати матричний аналог другої факторизаційної тотожності (див. [17, теорема 7.3]), який після усереднення по ν_ε: $\mathsf{P}\{\nu_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, виражається через генератрису $\xi^+(\theta_s)$:

$$\mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(\nu_\varepsilon)}u^{\gamma_1(\nu_\varepsilon)}, \tau^+(\nu_\varepsilon)<\infty\Big] = \frac{(1-\varepsilon)u}{u-\varepsilon}\big(\mathbf{I}-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\mathbf{g}_+^{-1}(s,u)\big). \quad (7)$$

Теорема 1. *Для цілозначного майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ із кумулянтою (2) генератриса $\{\tau^+(x), \gamma_1(x)\}$ задовольняє співвідношення*

$$\mathbf{V}_1(s,x,u) = \big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}u(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-u\mathbf{C})^{-1}. \quad (8)$$

Генератриси для $\{\tau^+(x), \gamma_2(x)\}$ та $\{\tau^+(0), \gamma_2(0)\}$ пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{gathered}
\mathbf{V}_2(s,0,u) = s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{W}_2(s,0,u) = s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{E}(u\mathbf{C})^{|\bar{\xi}(\theta_s)|}\mathbf{\Lambda}_1,\\
\mathbf{W}_2(s,x,u) = \mathbf{E}(u\mathbf{C})^{|\bar{\xi}(\theta_s)|}(u\mathbf{C})^x\mathbf{\Lambda}_1, x\geq 0,\\
\mathbf{V}_2(s,x,u) = \mathbf{p}_+^{-1}(s)\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{V}_2(s,0,u)(u\mathbf{C})^{x-y}, x\geq 0, \qquad (9)\\
\mathbf{E}\Big(\mathbf{C}^{|\bar{\xi}(\theta_s)|}\Big) = \mathbf{P}_s\mathbf{p}_+^{-1}(s)\mathbf{E}\Big[\mathbf{C}^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s)\leq 0\Big] = \\
= (\mathbf{I}-\mathbf{C})\big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}\big)\mathbf{E}\Big[\mathbf{C}^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s)\leq 0\Big],\\
\mathbf{V}_2(s,0,1) = s^{-1}\mathbf{E}\Big[\mathbf{C}^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s)\leq 0\Big]\mathbf{\Lambda}_1.
\end{gathered}$$

Для генератрис $\mathbf{V}_3(s,0,u)$ та $\mathbf{V}_3(s,x,u)$ маємо

$$\begin{gathered}
\mathbf{V}_3(s,0,u) = s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{W}_3(s,0,u) = \\
= s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{E}(u\mathbf{C})^{|\bar{\xi}(\theta_s)|}\mathbf{\Lambda}_1 u(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-u\mathbf{C})^{-1},\\
\mathbf{W}_3(s,x,u) = \mathbf{E}(u\mathbf{C})^{|\bar{\xi}(\theta_s)|}u(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{C}u)^{-1}(u\mathbf{C})^x\mathbf{\Lambda}_1, x\geq 0, \qquad (10)\\
\mathbf{V}_3(s,x,u) = \mathbf{p}_+^{-1}(s)\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{V}_3(s,0,u)(u\mathbf{C})^{x-y}, x\geq 0.
\end{gathered}$$

При $m_1^0 = \pi^\top\mathbf{K}'(1)\mathbf{e}>0$, де $\mathbf{e}$ — вектор-стовпчик одиниць, розподіл $\bar{\xi}$ невироджений, тоді в силу співвідношення (26) із [11]

$$\mathbf{E}\Big(\mathbf{C}^{|\bar{\xi}|}\Big) = \frac{1}{\mu_*^+}(\mathbf{I}-\mathbf{C})\mathbf{\Pi}_*\int_0^\infty\sum_{x\leq 0}\mathbf{C}^{|x|}\mathbf{P}\{\xi(t)=x\}dt, \quad (11)$$

де $\mathbf{\Pi}_*$ – матриця з однаковими рядками, визначеними стаціонарним розподілом ланцюга $\{J(\tau^+(z-1)), z\geq 0\}$, а μ_*^+ – усереднене за цим стаціонарним розподілом математичне сподівання для $\tau^+(0)$ (детальніше див. [11, с. 1040]).

Доведення. У загальному випадку відношення приросту генератриси до приросту аргументу можна виразити так:

$$\frac{\Delta \mathbf{g}_+(s,u)}{\Delta u} = \frac{1}{u-\varepsilon}[\mathbf{g}_+(s,u)-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)] = \sum_{k\geq 0}\frac{u^k-\varepsilon^k}{u-\varepsilon}\mathbf{p}_k^+(s) =$$
$$= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{\varepsilon}{u}\right)^r u^{k-1}\right)\mathbf{p}_k^+(s) = \sum_{r\geq 0}\left(\frac{\varepsilon}{u}\right)^r \sum_{k\geq r+1} u^{k-1}\mathbf{p}_k^+(s). \quad (12)$$

Із (12) після підстановки $\mathbf{p}_k^+(s)$ із (4) випливає, що

$$\frac{\Delta \mathbf{g}_+(s,u)}{\Delta u} = \sum_{r\geq 0}\left(\frac{\varepsilon}{u}\right)^r(\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\sum_{k\geq r+1}\mathbf{Z}_s^{-1}u^{k-1}\mathbf{p}_+(s) =$$
$$= \big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)\big(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1}\big)\big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}u\big)^{-1}\mathbf{p}_+(s).$$

Отже

$$\frac{\mathbf{g}_+(s,u)-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)}{u-\varepsilon} = \big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)\big(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1}\big)\big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}u\big)^{-1}\mathbf{p}_+(s). \quad (13)$$

Якщо домножити (13) на $u(1-\varepsilon)$ і на $\mathbf{g}_+^{-1}(s,u)$ справа, то друга факторизаційна тотожність (7) дає

$$\mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(\nu_\varepsilon)}u^{\gamma_1(\nu_\varepsilon)}, \tau^+(\nu_\varepsilon)<\infty\Big] = u(1-\varepsilon)\big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)\big(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1}\big)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}u)^{-1}. \quad (14)$$

Після обернення (14) по ε одержуємо (8).

Зі співвідношення (6) при $x=0$ виводимо вирази для генератрис перестрибкових функціоналів рівня 0 у формулах (9) та (10). Із (5) для $k=2,3$ при підстановці $\mathbf{\Pi}_0(k) = \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C})\mathbf{C}^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, знаходимо показникові зображення $\mathbf{W}_k(s,u,x)$. Із (6), враховуючи вирази для $\mathbf{V}_2(s,0,u)$ та $\mathbf{V}_3(s,0,u)$, отримаємо останні співвідношення в (9) та (10). Останні два співвідношення в (9) випливають із матричного узагальнення формули (7.29) у [17] при $z=\mathbf{C}^{-1}$ (див. також [11]):

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s\mathbf{p}_+^{-1}(s)\bigg(\mathbf{E}\Big[z^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s)\leq 0\Big]+$$
$$+\big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{E}\Big[\mathbf{C}^{|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s)<0\Big] =$$
$$= \mathbf{P}_s\mathbf{p}_+^{-1}(s)\int_0^\infty se^{-st}\sum_{x\leq 0}\bigg(z^x\mathbf{I}+\big(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C}\big)z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\times$$
$$\times\Big(\mathbf{C}^{|x|}-z^x\mathbf{I}\Big)\bigg)\mathbf{P}\{\xi(t)=x\}dt.$$

Формула (11) випливає із першого співвідношення в (9) після граничного переходу $s\to 0$, $u\to 1$. □

Позначимо $\eta_{\mathbf{C}} = \|\delta_{kr}\eta_{c_k}\|_{k,r=1}^m$ та $\eta_{\mathbf{C}}^0 = \|\delta_{kr}\eta_{c_k}^0\|_{k,r=1}^m$, де η_{c_k} та $\eta_{c_k}^0$ – випадкові величини, що мають геометричний розподіл, який стартує з 1 та 0 відповідно, із параметром c_k. Тоді для генератрис відповідно маємо $Eu^{\eta_{\mathbf{C}}} = \|\delta_{kr}Eu^{\eta_{c_k}}\| = \|\delta_{kr}\frac{u(1-c_k)}{1-uc_k}\| = u(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-u\mathbf{C})^{-1}$ та $Eu^{\eta_{\mathbf{C}}^0} = \|\delta_{kr}Eu^{\eta_{c_k}^0}\| = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-u\mathbf{C})^{-1}$. Позначивши також $\mathbf{T}^+(s,x) = \mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x)<\infty\Big]$, рівність (8) можемо записати як

$$\mathbf{V}_1(s,x,u) = \mathbf{T}^+(s,x)Eu^{\eta_{\mathbf{C}}}.$$

У розгорнутому вигляді маємо, що для $i,j=\overline{1,m}$

$$E\Big[e^{-s\tau^+(x)}u^{\gamma_1(x)}, \tau^+(x)<\infty, J\big(\tau^+(x)\big)=j|J(0)=i\Big]=$$
$$=E\Big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x)<\infty, J\big(\tau^+(x)\big)=j|J(0)=i\Big]Eu^{\eta_{c_j}}$$

або

$$E\Big[e^{-s\tau^+(x)}u^{\gamma_1(x)}|\tau^+(x)<\infty, J\big(\tau^+(x)\big)=j\Big]=$$
$$=E\Big[e^{-s\tau^+(x)}|\tau^+(x)<\infty, J\big(\tau^+(x)\big)=j\Big]Eu^{\eta_{c_j}}.$$

Звідки робимо висновок, що $\tau^+(x)$ та $\gamma_1(x)$ за умови $\tau^+(x)<\infty$ та $J(\tau^+(x))=j$ є незалежними. Більш того, за цієї умови $\gamma_1(x)$ є геометрично розподіленою. Тобто, за згаданої умови $\gamma_1(x)$ має властивість відсутності післядії.

Із (9) та (10) випливає, що генератриси $\mathbf{V}_2(s,0,u)$ та $\mathbf{V}_3(s,0,u)$ пов'язані співвідношенням $\mathbf{V}_3(s,0,u)=\mathbf{V}_2(s,0,u)Eu^{\eta_{\mathbf{C}}}$. Залежність $\mathbf{V}_2(s,x,u)$ та $\mathbf{V}_3(s,x,u)$ від $\mathbf{V}_{2,3}(s,0,u)$ та від x доповнюється залежністю через згортку розподілу $\xi^+(\theta_s)$ із розподілом $\eta^0_{u\mathbf{C}}$. У скалярному випадку, коли ланцюг $J(t)$ має лише один стан, результати теореми 1 можна переписати в дещо іншій формі за рахунок комутативності окремих множників.

Наслідок 1. *Якщо $\xi(t)$ – скалярний майже напівнеперервний зверху цілозначний процес, тоді*

$$\begin{gathered}V_1(s,x,u)=T^+(s,x)Eu^{\gamma_+(x)},\\ T^+(s,x)=q_+(s)z_s^{-x}, Eu^{\gamma_+(x)}=u(1-c)(1-uc)^{-1}, 0<c<1,\\ z_s^{-1}=q_+(s)+p_+(s)c.\end{gathered}\tag{15}$$

Якщо $m_1^0=E\xi(1)\ge 0$, тоді $z_s\to 1$, $s\to 0$, відповідно z_s^{-1} зводиться до вигляду

$$z_s^{-1}=1+\lambda_1(1-c)\int_0^\infty\big(1-e^{-st}\big)\sum_{x\le 0}c^{|x|}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}dt.\tag{16}$$

При $m_1^0<0$ маємо $z_0^{-1}<1$ та

$$z_s^{-1}=z_0^{-1}+\lambda_1(1-c)\int_0^\infty\big(1-e^{-st}\big)\sum_{x\le 0}c^{|x|}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}dt.\tag{17}$$

При $k=2$

$$V_2(s,0,1)=q_+(s)=\lambda_1\int_0^\infty\sum_{x\le 0}c^{|x|}e^{-sx}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}dt.$$

Якщо $m_1^0<0$, тоді $p_+=\big(1-z_0^{-1}\big)(1-c)^{-1}$, $q_+=q_+(0)=\big(z_0^{-1}-c\big)(1-c)^{-1}$,

$$q_+(s)=q_+(0)+\lambda_1\int_0^\infty\big(e^{-st}-1\big)\sum_{x\le 0}c^{|x|}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}dt.\tag{18}$$

При $m_1^0\ge 0$ маємо $q_+(s)\to 1$, $s\to 0$ та

$$q_+(s)=1+\lambda_1\int_0^\infty\big(e^{-st}-1\big)\sum_{x\le 0}c^{|x|}\mathsf{P}\{\xi(t)=x\}dt.\tag{19}$$

Для спільної генератриси $\{\tau^+(x),\gamma_2(x)\}$ маємо

$$\begin{gathered}V_2(s,0,u)=s^{-1}p_+(s)W_2(s,0,u)=\lambda_1 s^{-1}p_+(s)E(uc)^{\left|\xi^-(\theta_s)\right|},\\ W_2(s,x,u)=\lambda_1E(uc)^{\left|\xi^-(\theta_s)\right|}(uc)^x=\lambda_1 g_-\Big(s,(uc)^{-1}\Big)\mathsf{P}\{\eta_{cu}>x\},\\ V_2(s,0,1)=q_+(s)=s^{-1}\lambda_1E\Big[c^{|\xi(\theta_s)|},\xi(\theta_s)\le 0\Big],\end{gathered}\tag{20}$$

$$E\Big[c^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s) \leq 0\Big] = \frac{\lambda_1}{s} q_+(s) = \frac{\lambda_1}{s} \frac{z_s^{-1} - c}{1 - c},$$

$$V_2(s,x,u) = p_+^{-1}(s) V_2(s,0,u) \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s)(uc)^{x-y} =$$
$$= V_2(s,0,u)\left((uc)^x - \frac{(1 - cz_s)((uc)^x - z_s^{-x})}{1 - ucz_s}\right), x \geq 0.$$

Відмітимо, що при $u = 1$ із (20) випливає

$$T^+(s,x) = T^+(s,0) z_s^{-x}, x \geq 0, T^+(s,0) = q_+(s).$$

При $k = 3$

$$V_3(s,0,u) = s^{-1} p_+(s) W_3(s,0,u) =$$
$$= \lambda_1 s^{-1} p_+(s) E(uc)^{\left|\xi^-(\theta_s)\right|} E u^{\eta_c} = V_2(s,0,u) E u^{\eta_c},$$
$$W_3(s,x,u) = \lambda_1 E(uc)^{\left|\xi^-(\theta_s)\right|} u(1-c)(1-cu)^{-1}(uc)^x, x \geq 0, \tag{21}$$

$$V_3(s,x,u) = p_+^{-1}(s) V_3(s,0,u) \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s)(uc)^{x-y} =$$
$$= V_3(s,0,u)\left((uc)^x - \frac{(1 - cz_s)((uc)^x - z_s^{-x})}{1 - ucz_s}\right), x \geq 0,$$

$$E z^{\xi^-(\theta_s)} = p_+^{-1}(s) \sum_{x \leq 0} \left(z^x + \frac{(z_s^{-1} - c) z}{1 - cz} \left(c^{|x|} - z^x \right) \right) \mathsf{P}\{\xi(\theta_s) = x\}.$$

Згідно з теоремою 7.5 у [17] при $m_1^0 > 0$ розподіл ξ^- невироджений і $p'_+(0) = = E\tau^+(0) = \frac{z'(0)}{1-c}$, $z'(0) = \frac{1}{m_1^0}$, тоді

$$E c^{\left|\xi^-\right|} = m_1^0 (1-c) \int_0^\infty \sum_{x \leq 0} c^{|x|} \mathsf{P}\{\xi(t) = x\} dt. \tag{22}$$

Слід зауважити, що для напівнеперервних зверху цілозначних пуассонівських процесів $\gamma_1(x) = \gamma_3(x) = 1$ та $\gamma_2(x) = 0$, $x \geq 0$. Відзначимо також, що аналогічні результати справедливі для майже напівнеперервного знизу процесу, зокрема, про незалежність $\tau^-(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) < x\}$, $x \leq 0$, та $\gamma^-(x) = \xi(\tau^-(x)) - x$.

Приклад 1. Нехай $m = 1$ та кумулянта $\xi(t)$ має вигляд

$$K(z) = \lambda_1 (z-1)(1-cz)^{-1} + \lambda_2 (z-1)(z-b)^{-1}, 0 < b, c < 1,$$

тобто від'ємні стрибки також геометрично розподілені з параметром b. У силу майже напівнеперервності знизу згідно із (7.12) у [17]

$$E u^{\left|\xi^-(\theta_s)\right|} = p_-(s) \frac{u+b}{u + z_1(s)}, \quad b < z_1(s) = q_-(s) + b p_-(s) < 1.$$

Тоді за першою формулою у (20) маємо

$$V_2(s,0,u) = \lambda_1 s^{-1} p_+(s) p_-(s) \frac{uc+b}{uc + z_1(s)}.$$

Звідки $q_+(s) = V_2(s,0,1) = \lambda_1 s^{-1} p_+(s) p_-(s) \frac{c+b}{c+z_1(s)}$, а значить,

$$V_2(s,0,u) = q_+(s) \frac{c + z_1(s)}{c+b} \frac{uc+b}{uc + z_1(s)}.$$

Підстановкою в останню формулу у (20) отримаємо вираз для $V_2(s,x,u)$. Відповідний вираз для $V_2(s,x,u)$ указує, що навіть у такому простому випадку спільну генератрису $\{\tau^+(x),\gamma_2(x)\}$ не можна подати як добуток маргінальних генератрис $E\Big[e^{-s\tau^+(x)},\tau^+(x)<\infty\Big]$ та $Eu^{\gamma_2(x)}$.

3. Дійснозначні процеси

Нехай $\xi(t)$ – майже напівнеперервний зверху процес Пуассона зі знесенням на ЛМ $J(t)$ (див. детальніше [12, 16]) та кумулянтою

$$\mathbf{\Psi}(\alpha)=\|\frac{1}{t}\ln E\Big[e^{\imath\alpha\xi(t)},J(t)=r|J(0)=k\Big]\|=$$
$$=\imath\alpha\mathbf{A}+\mathbf{\Lambda}_1\imath\alpha(\mathbf{C}-\imath\alpha\mathbf{I})^{-1}+\int_{-\infty}^{0}(e^{\imath\alpha}-1)d\mathbf{K}_0(x)+\mathbf{Q},\quad (23)$$

де $\mathbf{K}_0(x)=\|\delta_{kr}\lambda_{2k}F_k(-x)+p_{kr}n_k\mathsf{P}\{\chi_{kr}<x\}\|$, $x\le 0$, $F_k(x)$ – функція розподілу стрибків процесу $S_{2k}(t)$, $\mathbf{A}=\|\delta_{kr}a_k\|$, $a_k\le 0$. Для перестрибкових функціоналів зберігаються позначення (1), а о.ф.т. має вигляд

$$\mathbf{\Phi}(s,\alpha)\stackrel{def}{=}\mathbf{E}e^{\imath\alpha\xi(\theta_s)}=\begin{cases}\mathbf{\Phi}_+(s,\alpha)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{\Phi}^-(s,\alpha),\\ \mathbf{\Phi}_-(s,\alpha)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{\Phi}^+(s,\alpha),\end{cases}\quad (24)$$

де $\mathbf{\Phi}_\pm(s,\alpha)=\mathbf{E}e^{\imath\alpha\xi^\pm(\theta_s)}$, $\mathbf{\Phi}^+(s,\alpha)=\mathbf{E}e^{\imath\alpha\check{\xi}(\theta_s)}$ та $\mathbf{\Phi}^-(s,\alpha)=\mathbf{E}e^{\imath\alpha\bar{\xi}(\theta_s)}$.

Аналогами формул (4) є

$$\mathbf{p}_+^*(s)=\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}=\left(\mathbf{I}+s^{-1}\int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}\big\{\bar{\xi}(\theta_s)\in dy\big\}e^{\mathbf{C}y}\mathbf{\Lambda}_1\right)^{-1},$$
$$\mathbf{E}e^{\imath\alpha\xi^+(\theta_s)}=(\mathbf{C}-\imath\alpha\mathbf{I})\big(\mathbf{p}_+^*(s)\mathbf{C}-\imath\alpha\mathbf{I}\big)^{-1}\mathbf{p}_+(s),\quad (25)$$
$$\mathbf{P}\big\{\xi^+(\theta_s)>x\big\}=\mathbf{T}^+(s,x)\mathbf{P}_s=\mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}e^{-\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)x}\mathbf{P}_s.$$

Відмітимо, що $\mathbf{E}e^{\imath\alpha\xi^+(\theta_s)}$ можна переписати в термінах матриці $\mathbf{R}_+(s)=\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)$, яка, так само як і $\mathbf{Z}_s$ в цілозначному випадку, узагальнює скалярний корінь рівняння Лундберга. Зокрема, застосовуючи стохастичні співвідношення, наведені в доведенні теореми 3.2 з [10, с. 62], виводимо

$$(s\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)=\mathbf{A}\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\mathbf{R}_+(s)+\mathbf{\Lambda}_1+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}d\mathbf{K}_0(z)\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)e^{\mathbf{R}_+(s)z},$$

що є узагальненням рівняння Лундберга.

Зауважимо, що досліджувані генератриси «верхніх» функціоналів $\{\tau^+(x),\gamma_k(x)\}$, пов'язаних із перетином «верхнього» рівня $x\ge 0$, визначаються як і в цілозначному випадку компонентами верхнього рядка о.ф.т. (див. формулу (3.21) теореми 3.3 для $\mathbf{B}=0$ та $\mathbf{A}\le 0$ в [10, с. 70]).

Теорема 2. *Для дійснозначного майже напівнеперервного зверху процесу на ЛМ генератриси*

$$\mathbf{V}_k(s,x,u)\stackrel{def}{=}\mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma_k(x)},\tau^+(x)<\infty\Big],\quad k=\overline{1,3},$$

визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{V}_1(s,x,u)=\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)e^{-\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)x}\mathbf{C}(\mathbf{C}+u\mathbf{I})^{-1},\quad (26)$$

$$\mathbf{V}_2(s,x,u) = \mathbf{V}_2(s,0,u)e^{-(u\mathbf{I}+\mathbf{C})x} + \\ + \big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\int_0^x e^{-\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)y}\mathbf{C}\mathbf{V}_2(s,0,u)e^{-(u\mathbf{I}+\mathbf{C})(x-y)}dy, \quad (27)$$

де

$$\mathbf{V}_2(s,0,u) = s^{-1}\mathbf{p}_+^*(s)\int_{-\infty}^0 d\mathbf{P}^-(s,z)e^{(u\mathbf{I}+\mathbf{C})z}\mathbf{\Lambda}_1 = s^{-1}\mathbf{p}_+^*(s)\mathbf{E}e^{\bar{\xi}(\theta_s)(u\mathbf{I}+\mathbf{C})}\mathbf{\Lambda}_1,$$

$$\mathbf{V}_3(s,x,u) = \mathbf{V}_2(s,x,u)\mathbf{C}(u\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}. \quad (28)$$

Спільну генератрису для $\{\tau^+(0),\gamma_2(0)\}$ *можна також подати так:*

$$\mathbf{V}_2(s,0,u) = s^{-1}\bigg(\mathbf{E}\Big[e^{\xi(\theta_s)(u\mathbf{I}+\mathbf{C})},\xi(\theta_s)\le 0\Big] - \\ - \big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\mathbf{C}\int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\Big[e^{\mathbf{C}(\xi(\theta_s)-y)},\xi(\theta_s)\le y\Big]e^{(u\mathbf{I}+\mathbf{C})y}dy\bigg)\mathbf{\Lambda}_1. \quad (29)$$

Звідки випливає

$$\mathbf{V}_2(s,0,0) = s^{-1}\mathbf{E}\Big[e^{\xi(\theta_s)\mathbf{C}},\xi(\theta_s)\le 0\Big]\mathbf{\Lambda}_1 - \\ - s^{-1}\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\mathbf{C}\int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\Big[e^{\mathbf{C}(\xi(\theta_s)-y)},\xi(\theta_s)\le y\Big]e^{\mathbf{C}y}dy\mathbf{\Lambda}_1. \quad (30)$$

Доведення. Згідно з наслідком 3.4 (див. [10, с. 72]) для довільного процесу Леві з обмеженою варіацією та $\mathbf{A}\le 0$ маємо для $k=\overline{1,3}$

$$\mathbf{V}_k(s,x,u) = \int_0^x s^{-1}\mathbf{P}\big\{\xi^+(\theta_s)\in dy\big\}\mathbf{P}_s^{-1}\int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\big\{\bar{\xi}(\theta_s)\in dz\big\}\mathbf{W}_k(x-y-z,u), \quad (31)$$

де $\mathbf{W}_1(x,u) = \int_x^\infty e^{u(x-z)}d\mathbf{K}_0(z)$, $\mathbf{W}_2(x,u) = \int_x^\infty e^{-ux}d\mathbf{K}_0(z)$, а також $\mathbf{W}_3(x,u) = = \int_x^\infty e^{-uz}d\mathbf{K}_0(z)$. Для майже напівнеперервного процесу показникова форма $\mathbf{K}_0(x)$ для $x\ge 0$ дає

$$\mathbf{W}_1(x,u) = e^{-\mathbf{C}x}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{C}(u\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}, \mathbf{W}_2(x,u) = e^{-(u\mathbf{I}+\mathbf{C})x}\mathbf{\Lambda}_1,$$
$$\mathbf{W}_3(x,u) = \mathbf{W}_2(x,u)\mathbf{C}(u\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}.$$

Оскільки $s^{-1}\mathbf{E}e^{\bar{\xi}(\theta_s)\mathbf{C}}\mathbf{\Lambda}_1 = \big(\mathbf{p}_+^*(s)\big)^{-1} - \mathbf{I}$, із формули (31) виводимо таке співвідношення:

$$\mathbf{V}_1(s,x,u) = \big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)e^{-\mathbf{C}x}\mathbf{C}(u\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1} + \\ + \big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\int_0^x e^{-\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)y}\big(\mathbf{C}-\mathbf{C}\mathbf{p}_+^*(s)\big)e^{-\mathbf{C}(x-y)}dy\mathbf{C}(u\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1},$$

з якого, враховуючи що $\frac{d}{dx}\big(e^{\mathbf{D}_1x}e^{\mathbf{D}_2x}\big) = e^{\mathbf{D}_1x}(\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2)e^{\mathbf{D}_2x}$ для сталих матриць $\mathbf{D}_1$ та $\mathbf{D}_2$ відповідної розмірності, приходимо до (26). Підстановкою $\mathbf{W}_k(x,u)$ у (31) виводимо співвідношення (27) та (28) для $\mathbf{V}_k(s,x,u)$, $k=2,3$.

Матричний аналог формули (3.101) [17, с. 120] або (3.97) [14, p. 85]

$$\mathbf{P}^-(s,x) = \big(\mathbf{p}_+^*(s)\big)^{-1}\Big[\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\} - \\ - \big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_+^*(s)\big)\mathbf{C}\int_{-\infty}^0 e^{\mathbf{C}y}\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x+y\}dy\Big], x\le 0, \quad (32)$$

дозволяє записати формулу (28) таким чином:

$$\mathbf{V}_2(s,0,u) = s^{-1}\bigg(\mathbf{E}\Big[e^{(u\mathbf{I}+\mathbf{C})\xi(\theta_s)},\xi(\theta_s)\le 0\Big] -$$

$$-\big(\mathbf{I}-\mathbf{p}_-^*(s)\big)\mathbf{C}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} e^{\mathbf{C}y}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x+y\})e^{(u\mathbf{I}+\mathbf{C})x}dydx\Big)\mathbf{\Lambda}_1,$$

звідки заміною змінних та перестановкою порядку інтегрування виводимо (29), а підстановкою $u=0$ приходимо до (30). □

Зауважимо, що співвідношення (28) для $\mathbf{V}_k(s,x,u)$, $k=2,3$, однотипні у дійснозначному випадку. Розбіжність співвідношень для $\mathbf{V}_2(s,x,u)$ та $\mathbf{V}_3(s,x,u)$ у цілозначному випадку пояснюється тим, що $\gamma_2(x)$ (на відміну від $\gamma_{1,3}(x)$) набуває нульове значення з додатною ймовірністю.

Визначивши $\eta_{\mathbf{C}}$ як діагональну матрицю з показниково розподіленими елементами $\{\eta_{c_j}, j=\overline{1,m}\}$ на діагоналі, матимемо $Ee^{-u\eta_{\mathbf{C}}}=\mathbf{C}(\mathbf{C}+u\mathbf{I})^{-1}$, і значить, формули (26) та (28) можемо записати компактніше, як $\mathbf{V}_1(s,x)=\mathbf{T}^+(s,x)Ee^{-u\eta_{\mathbf{C}}}$ та $\mathbf{V}_3(s,x,u)=\mathbf{V}_2(s,x,u)Ee^{-u\eta_{\mathbf{C}}}$. Ці вирази дозволяють зробити висновки, аналогічні тим, що в цілозначному випадку щодо умовної незалежності $\gamma_1(x)$ та $\tau^+(x)$. Більш того, застосування наслідку 3.4 з [10, с. 72], аналогічне тому, що і за доведення (28), дозволяє також отримати подання для спільної генератриси $\mathbf{V}(s,x,u,v)\stackrel{def}{=}\stackrel{def}{=}\mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma_1(x)-v\gamma_2(x)},\tau^+(x)<\infty\Big]$ як добуток $\mathbf{V}_2(s,x,v)$ та $Ee^{-u\eta_{\mathbf{C}}}$, що вказує на умовну незалежність $\gamma_1(x)$ не тільки від $\tau^+(x)$, а й від $\gamma_2(x)$.

Наслідок 2. *У скалярному випадку для дійснозначного майже напівнеперервного зверху процесу справедливі співвідношення:*

$$V_1(s,x,u)=q_+(s)e^{-cp_+(s)x}c(c+u)^{-1}=q_+(s)e^{-cp_+(s)x}Ee^{-u\gamma_1(x)},$$

$$V_2(s,x,u)=\frac{ue^{-(u+c)x}+cq_+(s)e^{-cp_+(s)x}}{u+cq_+(s)}V_2(s,0,u),$$

де $V_2(s,0,u)=s^{-1}p_+(s)Ee^{\xi^-(\theta_s)(u+c)}\lambda_1$, $V_3(s,x,u)=V_2(s,x,u)Ee^{-u\gamma_1(x)}$. *Генератрису для* $\{\tau^+(0),\gamma_2(0)\}$ *можемо подати як*

$$V_2(s,0,u)=\frac{\lambda_1}{s}\bigg(E\Big[e^{(u+c)\xi(\theta_s)},\xi(\theta_s)\le 0\Big]+ \\ +\frac{c}{u}q_+(s)E\Big[e^{c\xi(\theta_s)}\Big(e^{u\xi(\theta_s)}-1\Big),\xi(\theta_s)\le 0\Big]\bigg). \quad (33)$$

Зазначимо, що формула для $V_1(s,x,u)$ узгоджується з відомими результатами (див., наприклад, [17, наслідок 3.4]).

Приклад 2. Нехай $m=1$, $\Psi(\alpha)=\imath\alpha a+\imath\alpha\Big(\lambda_1(c-\imath\alpha)^{-1}-\lambda_2(b+\imath\alpha)^{-1}\Big)$, де $a<0$ та $b,c,\lambda_1,\lambda_2>0$. Тобто $\xi(t)$ – складний процес Пуассона з від'ємним знесенням та показниково розподіленими від'ємними та додатними стрибками. Цей процес можемо проінтерпретувати як процес агрегованих втрат (aggregate loss process, [1, p. 1]), у якого вимоги мають показниковий розподіл, крім того маємо показниково розподілені надходження. Застосовуючи результати із [13, theorem 3.1], отримаємо $Ee^{\imath\alpha\xi^-(\theta_s)}=\frac{r_1(s)r_2(s)}{b}\frac{b+\imath\alpha}{(r_1(s)+\imath\alpha)(r_2(s)+\imath\alpha)}$, де $-r_1(s),-r_2(s)$ – від'ємні корені кумулянтного рівняння $\Psi(-\imath\alpha)=s$, причому $r_1(s)<b<r_2(s)$. Враховуючи, що $cp_+(s)$ також корінь цього рівняння і значить $-cp_+(s)r_1(s)r_2(s)=scb$, одержимо $V_2(s,0,u)=s^{-1}p_+(s)Ee^{\xi^-(\theta_s)(u+c)}\lambda_1=\lambda_1\frac{u+c+b}{(r_1(s)+u+c)(r_2(s)+u+c)}$. Тоді за допомогою наслідку 2 виводимо

$$V_2(s,x,u)=\lambda_1\frac{u+c+b}{(r_1(s)+u+c)(r_2(s)+u+c)}\frac{ue^{-(u+c)x}+cq_+(s)e^{-cp_+(s)x}}{u+cq_+(s)}.$$

Звідки випливає, що, як і в прикладі 1, спільна генератриса $\{\gamma_2(x), \tau^+(x)\}$ не може бути подана як добуток відповідних маргінальних генератрис.

Якщо позначити $B_1(s) = \lambda_1 \frac{b-r_1(s)}{r_2(s)-r_1(s)}$ та $B_2(s) = \lambda_1 \frac{r_2(s)-b}{r_2(s)-r_1(s)}$, тоді оберненням $V_2(s,x,u)$ по u маємо

$$E\Big[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_2(x) \in dz, \tau^+(x) < \infty\Big] =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \bigg(e^{r_i(s)x-(c+r_i(s))z} \Big(c + r_i(s) - cq_+(s) e^{-(cp_+(s)+r_i(s))(x-z)} \Big) \mathbb{1}_{\{z>x\}} +$$
$$+ cq_+(s) \Big(e^{-cq_+(s)z} - e^{(c+r_i(s))z} \Big) \bigg) \frac{B_i(s)}{cp_+(s)+r_i(s)},$$

де $\mathbb{1}_{\{z>x\}} = \begin{cases} 1, & z > x, \\ 0, & z \le x. \end{cases}$ Отриманий результат дозволяє визначити міру Гербера—Шіу, оскільки, враховуючи умовну незалежність $\gamma_1(x)$ від $\{\gamma_2(x), \tau^+(x)\}$, одержуємо

$$K^{(s)}(x, dy, dz) \overset{def}{=} E\Big[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_1(x) \in dy, \gamma_2(x) \in dz, \tau^+(x) < \infty\Big] =$$
$$= ce^{-cy} dy \times E\Big[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_2(x) \in dz, \tau^+(x) < \infty\Big].$$

Список літератури

1. S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin Probabilities*, World scientific, Singapore, 2010.
2. L. Breuer, *From Markov jump processes to spatial queues*, Springer, New York, 2003.
3. A. Pacheco, L. Tang, N. Prabhu, *Markov-modulated processes and semigenerative phenomena*, World Scientific, Singapore, 2008.
4. L. Breuer, *First passage times for Markov-additive processes with positive jumps of phase type*, J. Appl. Prob., **45** (2008), 779–799.
5. L. Breuer, *A quintuple law for Markov additive processes with phase-type jumps*, Journal of Applied Probability, **47** (2010), 441–458.
6. R. A. Doney, A. E. Kyprianou, *Overshoots and undershoots of Levy processes*, The Annals of Applied Probability, **16** (2006), 91–106.
7. L. Breuer, A. L. Badescu, *A generalised Gerber–Shiu measure for Markov-additive risk processes with phase-type claims and capital injections*, Scandinavian Actuarial Journal, **2** (2014), 93–115.
8. A. E. Kyprianou, *Gerber–Shiu Risk Theory*, Springer, New York, 2013.
9. Z. Jiang, M. Pistorius, *On perpetual American put valuation and first-passage in a regime-switching model with jumps*, Finance and Stochastics, **12** (2008), 331–355.
10. D. V. Husak, *Boundary problems for processes with independent increments on Markov chains and for semi-Markov processes*, Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv, 1998. (in Ukrainian)
11. M. S. Herych, D. V. Husak, *On the moment-generating functions of extrema and their complements for almost semicontinuous integer-valued poisson processes on Markov chains*, Ukrainian Mathematical Journal, **67** (2016), Issue 8, 1164–1182.
12. D. V. Gusak, E. V. Karnaukh, *Matrix factorization identity for almost semi-continuous processes on a Markov chain*, Theory of Stochastic Processes, **11(27)** (2005), No 1-2, 40–47.
13. S. G. Kou, H. Wang, *First passage times of a jump diffusion process*, Adv. Appl. Prob., **35** (2003), 504–531.
14. D. Husak, *Boundary functionals for Lévy processes and their applications*, Lambert Acad. Publ., 2014.
15. M. S. Gerych, *Distributions of overshoots for almost continuous stochastic processes defined on a Markov chain*, Theor. Probability and Math. Statist., **94** (2017), 37–52.
16. E. V. Karnaukh, *Overshoot functionals for almost semicontinuous processes defined on a Markov chain*, Theor. Probability and Math. Statist., **76** (2008), 49–57.
17. D. V. Husak, *Boundary value problems for processes with independent increments in the risk theory*, Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv, 2011. (in Ukrainian)

Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу, математичний факультет, Ужгородський національний університет, вул. Університетська, 14, м. Ужгород, Україна, 88000

Адреса електронної пошти: husakdv@ukr.net

Кафедра статистики й теорії ймовірностей, механіко-математичний факультет, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, проспект Гагаріна, 72, м. Дніпро, Україна, 49000

Адреса електронної пошти: ievgen.karnaukh@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 6.05.2018

ON A FEATURE OF DISTRIBUTIONS OF THE OVERSHOOT FUNCTIONALS FOR UPPER SEMICONTINUOUS PROCESSES ON A MARKOV CHAIN

D. V. HUSAK, IE. V. KARNAUKH

Abstract. We examine the question whether the memoryless property associated with the geometric and exponential distributions remains true for the overshoot functionals of almost upper semicontinuous integer- and real-valued processes on a Markov chain. It is established that under the condition of a level attainability and knowing the environment state at the moment of reaching the level this property only holds for overshoot through the level $x \geq 0$ and its distribution depends neither on the overshoot moment nor on x. The undershoot distribution of a level x is determined in terms of the zero-level undershoot distribution. A similar dependence is established for a jump that covers the level x.

ОБ ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЕРЕСКОКОВ ПОЧТИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СВЕРХУ ПРОЦЕССОВ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Д. В. ГУСАК, Е. В. КАРНАУХ

Аннотация. Изучается вопрос о том, сохраняется ли свойство отсутствия последействия, присущее геометрическому и показательному распределению, для перескоков почти полунепрерывных сверху целозначных и действительнозначных процессов на цепи Маркова. Устанавливается, что при условии достижения уровня и знания состояния окружающей среды в момент достижения уровня указанное свойство справедливо только для перескока через уровень $x \geq 0$ и его распределение не зависит ни от момента перескока, ни от x. Распределение недоскока уровня x определяется в терминах распределения недоскока нулевого уровня. Аналогичная зависимость устанавливается для прыжка, накрывающего уровень x.