

УДК 53.03

Клапченко В.І., Пономаренко С.М.¹

КОРПУСКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ ФЛУКТУАЦІЙ ФІЗИЧНОГО ВАКУУМУ

АНОТАЦІЯ. Продовжено розвиток корпускулярно-кінетичної моделі механічного руху. На основі найпростіших уявлень про фізичний вакуум розглянуто питання про спектр його флуктуацій. Показано, що спектр флуктуацій фізичного вакууму має вигляд спектру теплового випромінювання з відповідною флуктуаційною температурою.

АННОТАЦИЯ. Продолжено развитие корпускулярно-кинетической модели механического движения. На основе самых простых представлений о физическом вакууме рассмотрен вопрос о спектре его флуктуаций. Показано, что спектр флуктуаций физического вакуума имеет вид спектра теплового излучения с соответствующей флуктуационной температурой.

ABSTRACT. Development of corpuscular-kinetic model of mechanical motion is continued. On the basis of the simplest ideas about a physical vacuum a question is considered about the spectrum of his fluctuations. It is shown that the spectrum of fluctuations of physical vacuum has the appearance of spectrum of thermal radiation with a corresponding fluctuation temperature.

Вступ. Ймовірнісна інтерпретація механічного руху [1,2] сформувала початкове уявлення про фізичний вакуум: це величезна (фактично необмежена) множина універсальних структурних елементів з певною масою m_{0el} та статистично визначеною швидкістю $V_{0el}=c_0$. При цьому кожна частинка речовини (електрон, протон, нейтрон і т.п.), світло (фотон), також складені з цих же універсальних елементів. Тобто, матеріальний світ є ідентичним за складом, але різним за структурною організацією, про яку ймовірнісна інтерпретація уявлення не дає.

В даній роботі продовжено формування корпускулярно-кінетичної моделі механічного руху. Конкретною задачею роботи є поглиблення уявлень про фізичний вакуум та можливі процеси в ньому, зокрема про флуктуації фізичного вакууму. Це питання має і самостійне значення для вирішення проблем квантової електродинаміки [3].

Про зв'язність універсальних елементів. Спробуємо отримати додаткові уявлення про структурну організацію універсальних елементів фізичного вакууму з допомогою наступних міркувань. В першу чергу, необхідно відмовитись від найпростішого уявлення про фізичний вакуум як аналога класичного ідеального газу, тобто, своєрідного газового хаосу фундаментальних структурних елементів. Воно підсвідомо формується тим, що швидкість структурних елементів c_0 визначена як статистична характеристика множини цих елементів. Нагадаємо, що і в МКТ уявлення про хаотичний тепловий рух молекул залишаються в силі, навіть якщо ми переходимо до конденсованих станів речовини, тобто, в умовах, коли виникає жорсткий зв'язок між молекулами.

Ми ще довго не матимемо можливості

моделювати взаємодію між універсальними структурними елементами, але існує багато причин, що вказують на необхідність відмови від моделі незв'язних універсальних елементів. На це вказує стабільність мас спокою елементарних частинок, жорстка когерентність при розповсюдженні світла в вакуумі, та й, врешті решт, наші нинішні уявлення про фізичний вакуум: з точки зору квантової теорії поля фізичний вакуум є найнижчим енергетичним станом квантованих полів, зокрема електромагнітного [4]. Бо для моделі фізичного вакууму в вигляді незв'язних структур (фундаментального газу) повна енергія була б, фактично, нескінченною.

Дійсно, вона була б рівною величині $m_{0el}c_0^2$, помноженій на повну кількість елементів. Тобто, у всякому випадку, була б максимально можливою для тієї кількості структурних елементів, що утворюють фізичний вакуум. Крім того, на сьогодні ми допускаємо, що попри найнижчий енергетичний стан, фізичний вакуум здатний до флуктуацій. Зокрема до народження електронно-позитронних пар чи віртуальних фотонів. На цьому базується успішність застосування квантової електродинаміки [4]. Але що тоді представляли б собою флуктуації на фоні величезного хаосу?

Найпростіше явище, яке безпосередньо вказує на зв'язність універсальних елементів фізичного вакууму є формування та розповсюдження в ньому фотона. Для появи фотона в фізичному вакуумі необхідно внесення певної порції енергії. Це еквівалентно відхиленню стану фізичного вакууму від нульового (незбуреного), на величину

$$W_i = \frac{hc_0}{\lambda_i} \quad (1)$$

¹ Клапченко В.І., доцент; Пономаренко С.М., доцент. Київський національний університет будівництва і архітектури.

Тоді характеристику λ_i можна розглядати як довжину зв'язної, певним чином організованої групи структурних елементів *того ж фізичного вакууму*. При відсутності внесеної енергії по (1), таке формування також можливе (віртуальний фотон), але воно так же швидко зникає, як і появляється.

Виходячи з (1), робимо висновок, що чим меншою за просторовою протяжністю є зв'язна упорядкована група елементів (фотон), тим більшої енергії це вимагає. Тоді справедливим буде і таке твердження: забезпечити нульовий (незбурений) стан фізичного вакууму можна лише тоді, коли *всі його структурні елементи утворюють нескінченно довгі зв'язні групи фотоподібного типу з нескінченною протяжністю $\lambda_i \rightarrow \infty$* . Це своєрідний конфайнмент структурної організації.

В нашому всесвіті ці лінійні групи мають природну межу (природне просторове квантування) – діаметр D всесвіту. Враховуючи орієнтовну величину $D \sim 4 \cdot 10^{26}$ м [5], та підставивши в (1), отримуємо $W_0 \approx 4 \cdot 10^{-52}$ Дж для кожного такого зв'язного угруповання елементів. Всі, без винятків, структурні елементи фізичного вакууму організовані в аналогічні протяжні групи і мають однакову енергію. Враховуючи, що такі зв'язні упорядковані групи є фотоподібними, їх можна віднести до класу бозонів. Тоді фізичний вакуум є бозе-конденсатом таких упорядкованих структур, і знаходиться він в найнижчому енергетичному стані (рівень бозе-конденсації W_0), який близький до нуля.

Таким чином, остаточні уявлення про фізичний вакуум матимемо такі. По перше, це величезна ізотропна множина ідентичних універсальних елементів. По друге, незбурений стан фізичного вакууму утворюють зв'язні упорядковані лінійні групи універсальних елементів фотоподібного виду, що пронизують весь всесвіт, тобто, мають характерну довжину D . По третє, зв'язні упорядковані структури елементів, що утворюють фізичний вакуум, є складовими бозівського типу, що мають однакову енергію W_0 і утворюють своєрідний бозе-конденсат. Повна енергія такого бозе-конденсату є величезною, в той час як стан фізичного вакууму, фактично, нульовий.

Тобто, фізичний вакуум є *морем непроявленої енергії, або морем прихованої маси*. Будь-яка порція енергії набуває еквівалентної їй маси за рахунок залучення та специфічного упорядкування зв'язних структур фізичного вакууму.

Насамкінець, можна прийти до висновку про те, що універсальні структурні елементи мають, як мінімум, хоч один лінійний розмір. Для нашого розгляду цей розмір не має значення, але для визначеності виберемо його рівним планківській довжині L_{Pl} :

$$L_{Pl} = \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м} , \quad (2)$$

обґрунтування чого буде надано пізніше.

Отримана уточнена корпускулярно-кінетична модель фізичного вакууму дозволяє поставити в досить загальній формі питання про флуктуації фізичного вакууму та їх можливий спектр.

Флуктуаційна здатність фізичних систем. Задачу про флуктуації в фізичному вакуумі розділимо на два етапи. На першому розглянемо загальну статистичну задачу про флуктуаційну здатність будь-яких фізичних систем *тотожних частинок*. Додатковою умовою в задачах про флуктуації є *нерозрізненість початкового стану частинок за енергією*. Флуктуаційну здатність визначатимемо як термодинамічну ймовірність стану системи елементів при її штучній дискретизації по просторовим чи кутовим елементам. В загальному вигляді таку задачу можна поставити лише для класичних частинок (принципово розрізненних) та бозонів (принципово нерозрізненних). Для ферміонів така загальна постановка не можлива, тому що можуть виникати обмеження на довільний спосіб дискретизації та заборони на розміщення частинок в фазових комірках.

На другому етапі застосуємо результати визначення флуктуаційної здатності до конкретної системи (фізичного вакууму) з урахуванням тих обмежень, які виникають при подібному умовному подрібненню системи тотожних елементів. Тобто, для використання результатів першого етапу потрібно впевнитись, що обмежень на спосіб дискретизації не виникає, як і обмежень на способи розміщення елементів по фазовим комірках. І єдиними обмеженнями є енергетичні.

Зауважимо, що вперше задачу про флуктуаційну здатність системи тотожних та нерозрізненних за енергією елементів було поставлено, вирішено на фізичних та комп'ютерних моделях, та знайдено статистичне обґрунтування для числових розрахунків в [6]. Там було показано, що подібні системи потенціально схильні до флуктуацій. Навіть більше того, такі системи нерозрізненних за енергією елементів не можуть мати рівномірного просторового чи кутового розподілу – такий стан для них є недосяжним. Приведемо найпростіший приклад з цієї роботи та формули для відповідних розрахунків.

В табл. 1 приведені розрахунки статистичних множників термодинамічних ймовірностей та відносних ймовірностей різних розподілів системи з $N=4$ елементів по $m=4$ просторових комірках. Для такої малої кількості елементів всі типи можливих макророзподілів легко перерахувати – їх всього 5. Першим в таблиці приведений рівномірний просторовий розподіл, п'ятим – самий нерівномірний.

Таблиця 1.

Розрахунок статистичних множників для макророзподілів елементів в класичній та квантовій статистиці при N=m=4.

Номер розподілу	Макророзподіли	Відносне відхилення від рівномірного	Статистичні множники			Відносна ймовірність в класичному випадку		Відносна ймовірність для бозе-частинок
						Розрахунок	Комп'ютерний експеримент	
j		$\Delta N / \langle N \rangle$	G_j	F_j	$G_j \cdot F_j$	$G_j \cdot F_j / \Omega$		$F_j / \Sigma F_j$
1	1,1,1,1	0	24	1	24	0.09	0.0903	0.03
2	2,1,1,0	0.7	12	12	144	0.56	0.5614	0.34
3	2,2,0,0	1.0	6	6	36	0.14	0.1413	0.17
4	3,1,0,0	1.2	4	12	48	0.19	0.1897	0.34
5	4,0,0,0	1.7	1	4	4	0.02	0.0172	0.12
Ω					256			
ΣF_j					35			

Повний набір статистичних множників, за якими розраховувалась ймовірність макророзподілів, визначена для класичних частинок. Наприклад, для молекулярної системи:

$$\Omega_{j\text{кл}} = G_j F_j, \tag{3}$$

де G_j - больцманівський множник для розрізненних частинок

$$G_j = \frac{N!}{N_1! \dots N_m!}, \tag{4}$$

а F_j – кратність даного макророзподілу

$$F_j = \frac{m!}{k_1! \dots k_m!}. \tag{5}$$

В (5) літерами k_i позначені кратності заселеностей комірок. Наприклад, якщо $N_1=N_2, N_3=N_4$, то $k_1=2, k_2=0, k_3=2, k_4=0$.

Для системи, складеної з елементів, що підкоряються статистиці Бозе-Ейнштейна, всі статистичні множники $G_j \neq 1$ (елементи нерозрізненні). В цьому випадку термодинамічна ймовірність макророзподілів визначається лише статистичним множником F_j :

$$\Omega_{j\text{кв}} = F_j = \frac{m!}{k_1! \dots k_m!}. \tag{6}$$

А відносне відхилення нерівномірного розподілу від рівномірного визначали так:

$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\langle N \rangle} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_i - \langle N \rangle)^2}{n}}. \tag{7}$$

Порівняння розрахунків за формулами (3)-(7) з результатами комп'ютерного моделювання для випадку класичних частинок приведено в колонці «Комп'ютерний експеримент» табл. 1. Ми бачимо хорошу кореляцію результатів розрахунків та комп'ютерного експерименту. Тобто,

приведений приклад підтверджує потенційну здатність подібних систем до флуктуацій.

Найбільш імовірні флуктуації. Скористаємось результатами першого етапу безпосередньо для моделі фізичного вакууму. Тобто, нашою системою тождних та нерозрізненних за енергією частинок буде підмножина зв'язних ідентичних універсальних елементів, що утворюють в фізичному вакуумі лінійні структури довжиною D . Кількість таких елементів в лінійній структурі є велике число $N_D = D/L_{Pl} \approx 2.5 \cdot 10^{61}$, так що обмежень на штучну дискретизацію аж до мішального розміру L_{Pl} не виникне. Крім того, штучна дискретизація передбачає отримання укорочених упорядкованих структур елементів, які в фізичному вакуумі за фізичним змістом є фотонами, тобто, бозонами. Тому обмежень на способи заповнення фазових комірок теж не повинні виникати.

Спробуємо сформулювати статистичну задачу про найбільш імовірні флуктуації фізичного вакууму. Для цього, відповідно до загальної постановки задач про флуктуаційну здатність, введемо штучне подрібнення лінійної структури елементів фізичного вакууму довжиною D зразу на m кусків довільної довжини. Звичайно, спонтанна одночасна дискретизація такого типу – неможлива. А тому запропонований прийом є процедурою штучного квантування лінійних неперервних структур. Тобто, матимемо висхідні параметри нашої модельної задачі такими. Повна кількість елементів

$$N_D = \frac{D}{L_{Pl}}, \tag{8}$$

середня довжина випадкової просторової флуктуації

$$\langle \lambda \rangle = \frac{D}{m} = \langle N_i \rangle L_{Pl}, \tag{9}$$

протяжність структур випадкових флуктуацій

$$\lambda_i = N_i \cdot L_{Pl}, \quad (10)$$

причому, повна довжина випадкових флуктуацій задовольняє умову

$$D = \sum_{i=1}^m \lambda_i = L_{Pl} \sum_{i=1}^m N_i = m \langle N_i \rangle L_{Pl}, \quad (11)$$

та додаткову умову, що ні одна з цих довжин ніколи не буде рівною нулеві:

$$\lambda_i \neq 0. \quad (12)$$

Тоді повну ймовірність виникнення такої штучної дискретизації визначимо так:

$$\Omega = \sum_{j=1}^K F_j \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \frac{hc_0}{\lambda_i k T_f} \right\} = \sum_{j=1}^K F_j \cdot \exp \left\{ - \frac{hc_0}{k T_f} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} \right\}, \quad (13)$$

де сума статистичних множників (5), взята по всім можливим макророзподілах K , враховує флуктуаційну здатність системи, а експоненціальний множник враховує зниження ймовірності при появі коротких флуктуацій. Наявність суми в показнику експоненти якраз і обумовлена штучною дискретизацією, тобто, враховує одночасну появу m квантів.

Крім того, (13) необхідно піддати статистичному усередненню, зв'язаному з тим, що можливі *будь-які випадкові* розподіли, а не лише один даний випадковий розподіл. Будемо вважати, що (13) вже містить подібне усереднення. Введення флуктуаційної температури є виправданим тим, що ймовірність по (13) не є необмеженою, а має максимум. Всі статистичні розподіли з максимумом допускають введення характеристичної температури (або її аналога – дисперсії [7]).

Спробуємо ввести в (13) спрощення. Зокрема таке:

$$\sum_{j=1}^K F_j = m! \sum_{j=1}^K \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \approx m!. \quad (14)$$

Це спрощення враховує, що всі члени під знаком суми

$$\sum_{j=1}^K \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \quad (15)$$

значно менші одиниці, за винятком одного, коли всі кратності заселеностей комірок дорівнюють одиниці ($k_1=1, k_m=1$). Але такий макророзподіл може взагалі не реалізуватись. Тому заміна по (14) дає завжди завищену ймовірність, яку врахувати безпосередньо тут важко.

Стосовно суми в показнику експоненти (13). Якби всі $\lambda_i = \langle \lambda \rangle$, то

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} = \frac{m}{\langle \lambda \rangle}. \quad (16)$$

Врахування випадкових відхилень довжин флуктуацій від найбільш ймовірної λ_{mp} , яка є дуже близькою до середньої $\langle \lambda \rangle \sim \lambda_{mp}$, дозволяє записати:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} = \frac{m\eta}{\lambda_{mp}}, \quad (17)$$

де враховано, що в сумі обернених величин значно більший внесок довжин хвиль, які менші найбільш ймовірної $\lambda_i < \lambda_{mp}$. Параметр $\eta > 1$, залежить від виду розподілу випадкових величин λ_i , для типових розподілів випадкових величин [7] можна вибрати $\eta = 3$.

Враховуючи введені спрощення, приведемо (13) до вигляду:

$$\Omega = m! \cdot \exp \left\{ - \frac{hc_0 m^2 \eta}{k T_f D} \right\}. \quad (18)$$

Прологарифмувавши його, отримаємо:

$$\ln \Omega = \frac{m(\ln m - 1)}{a} - \frac{hc_0 m^2 \eta}{k T_f D}. \quad (19)$$

В (19) числовим множником a введено корекцію на завищення ймовірності, якщо використано спрощення типу (14). Для множника a можливі значення від 3 до 10. Для знаходження максимуму проведемо диференціювання (19) по довільному параметру дискретизації m та прирівняємо похідну до нуля. Врешті решт, маємо:

$$\ln m_{\max} = \frac{2hc_0 m \eta a}{k T_f D} = \frac{2hc_0 \eta a}{k T_f \lambda_i}, \quad (20)$$

або

$$T_f \lambda_i = \frac{2hc_0 \eta a}{k \ln m_{\max}} = \text{const} \square (1,35 \dots 4,5) \cdot 10^{-3}. \quad (21)$$

Перше, що кидається в вічі, це те, що співвідношення для визначення найбільш ймовірної довжини хвилі флуктуацій фізичного вакууму має вигляд закону зміщення Віна для спектру АЧТ. Більше того, константа Віна $\epsilon = 2,9 \cdot 10^{-3}$ мК попадає в діапазон невизначеності констант нашої моделі. З цього ми робимо висновок: *якщо найбільш ймовірні довжини хвиль в спектрі флуктуацій фізичного вакууму задовольняють умову максимуму для спектру теплового випромінювання, то сам спектр повинен описуватись формулою Планка для спектру АЧТ.*

Спонтанні, провокативні та вимушені флуктуації фізичного вакууму. Залежно від умов, при яких знаходиться фізичний вакуум, потрібно розділяти випадки, коли цей спектр формується спонтанно, коли провокується, а коли є вимушеним. Зокрема при відсутності будь-яких тіл та полів (порожній всесвіт, незбурений вакуум) можливі тільки *спонтанні* флуктуації електромагнітного поля. Їх можна називати нульовими коливаннями фізичного вакууму. Процедура формування спектру нульових коливань така. Якщо в даній області фізичного вакууму виникла випадкова флуктуація, яка має об'ємну густину енергії w_v , то вона формує локальну флуктуаційну температуру

$$\langle w_V \rangle = \frac{4\sigma T_f^4}{c_0}. \quad (22)$$

Тоді спектр нульових коливань в даній області буде відповідати спектру теплового випромінювання з даною флуктуаційною температурою. В різних областях фізичного вакууму флуктуаційна температура буде іншою. Тобто, флуктуаційна температура сама стає статистичним параметром, і тоді можна ставити задачу про найбільш імовірну температуру та про найбільш імовірний спектр, який їй відповідає.

Але ставити таку задачу не має резону. Справа в тому, що за час існування та розвитку нашого всесвіту випромінювання всіх матеріальних об'єктів сформувало в фізичному вакуумі середню об'ємну густину енергії з ефективною температурою $T_r=2,7$ К:

$$\langle w_V \rangle = \frac{4\sigma T_r^4}{c_0}. \quad (23)$$

Тобто, ми не можемо спостерігати спонтанних флуктуацій незбуреного вакууму (тобто нульових коливань), бо наявне випромінювання нав'язує флуктуаційну температуру T_r та *вимушує* мати спектр, що відповідає цій температурі. Підкреслимо, що вимушені (нав'язані) флуктуації фізичного вакууму не є нульовими коливаннями, а є реальним тепловим випромінюванням з температурою T_r , яке можна реєструвати.

Фонове (або реліктове) випромінювання не тільки зареєстроване, але й досить детально вивчене. Той факт, що реліктове випромінювання представляє собою вимушені флуктуації фізичного вакууму, дає повне право вважати його абсолютною системою відліку. Тобто, будь-яке відхилення від ізотропності реліктового випромінювання означає (з урахуванням ефекту Допплера) наявність переміщення системи спостереження відносно фізичного вакууму. Крім того, реліктове випромінювання слід було б називати *сьогоднішнім* тепловим випромінюванням фізичного вакууму, тому що воно відбувається, практично, в момент реєстрації.

Проте в більшості випадків *вимушені флуктуації* фізичного вакууму ми називаємо просто тепловим випромінюванням. Тобто, та частина фізичного вакууму, що оточена розігрітою оболонкою (тілом) має флуктуаційну температуру, що співпадає з температурою тіла:

$$T_f = T \quad (24)$$

Тому зовсім не випадково спектр теплового випромінювання АЧТ ні від яких геометричних, механічних, оптичних, хімічних і інших властивостей тіл не залежить! Це перестає бути див-

ним лише тоді, коли припустити, що він формується не тілом, а фізичним вакуумом. Лише тоді стає зрозумілим, чому він, фактично, суцільний, ізотропний, з випадковими фазами та площинами поляризації.

І нарешті, про *провокативні* флуктуації фізичного вакууму. Це спонтанні коливання фізичного вакууму, тобто, флуктуації, які не випромінюються, зсув у спектрі яких спровокований додатковою поляризацією фізичного вакууму. Вони виникають в областях з сильними електростатичними чи магнітними полями. Власне якраз додаткова енергія одиниці об'єму поляризованого фізичного вакууму і є тим провокатором, що зміщує частоти. Спектр флуктуацій при цьому зберігається тепловим з флуктуаційною температурою, яка є локальною ефективною температурою, що визначається умовою:

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{4\sigma T_f^4}{c_0}. \quad (25)$$

Наприклад, в електричному полі заряду, в точці, де напруженість поля досягає значень 10^{17} В/м, ефективна флуктуаційна температура надзвичайно висока $T_f=10^9 T_r$. А довжина хвилі спектру флуктуаційних нульових коливань, на яку припадає максимум в спектрі, дорівнює:

$$\lambda_{mp} = \frac{b}{10^9 T_r} \approx 10^{-12} \text{ м}. \quad (26)$$

Такі дивні умови виникають в безпосередньому оточенні електрона. Зрозуміло тепер, що в цих умовах є висока ймовірність не тільки появи потужних віртуальних фотонів, а й утворення віртуальних електронно-позитронних пар. Зрозуміло і те, чому фізично обґрунтованим обмеженням спектру флуктуаційних коливань фізичного вакууму з боку малих довжин хвиль Вельтон [8] вважав комптонівську довжину хвилі, яка для електрона рівна $2,4 \cdot 10^{-12}$ м.

Висновок. Таким чином, спектр флуктуацій фізичного вакууму має універсальний характер, він завжди є спектром теплового випромінювання з відповідною флуктуаційною температурою, визначеною одним з виразів (22)-(25):

$$w_V(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc / \lambda k T_0) - 1}. \quad (27)$$

При цьому спонтанних флуктуацій незбуреного фізичного вакууму в розвиненому всесвіті спостерігати неможливо, вимушені флуктуації є тепловим випромінюванням, провокативні флуктуації є нульовими коливаннями в області поляризованого вакууму.

Література

1. Клапченко В.І., Тесля Ю.М. Ймовірнісна інтерпретація механічного руху. /Klapchenko, V.I. Teslya, Y.N. Probabilistic interpretation of mechanical motion. (<http://arxiv.org/find/all/1/all:+klapchenko/0/1/0/all/0/1>).
2. Клапченко В.І. Корпускулярно-кінетична модель механічного руху.
3. Бете Г. Квантовая механика. – М.: Мир, 1965. – 333 с.
4. Фейнман Р. Квантовая электродинамика. – Н.: ИО НМФИ, 1998. – 216 с.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция вселенной. –М.: Наука, 1975. – 736 с.
6. Клапченко В.І. Перколяционный квантовый релятивистский мир. – К.: Випол, 1999. – 122 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.
8. Вельтон Т. Некоторые наблюдаемые эффекты, обусловленные квантово-механическими флуктуациями электромагнитного поля. /В сб. « Вопросы причинности в квантовой механике» - М.: Инлит, 1965/ - с. 269-288.