

Розрахунок робочих елементів котка з відсіків торса-гелікоїда

Розглянуто конструювання гвинтової робочої поверхні котка із розгортної поверхні у вигляді відсіка торса-гелікоїда. Розраховано плоску заготовку для виготовлення одного витка поверхні. Зроблено візуалізацію відсіка робочої поверхні і його розгортки.

Ключові слова: гвинтова поверхня, коток, плоска заготовка, торс-гелікоїд.

Вступ. В основі геометричної форми котка лежить циліндричне тіло з горизонтальною віссю обертання. Поверхні котків можуть суттєво відрізнятися в залежності від призначення [1]. У відповідності з технологічним завданням котки можуть бути гладенькими циліндричними або ж такими, що складаються з кілець і дисків, які мають радіальні й осьові виступи.

Різноманітність форм робочої поверхні зумовлює потребу їх розрахунку. Ми розглянемо коток, у якого робочими елементами є відсіки гвинтових поверхонь [2]. Ці поверхні можуть бути як розгортними, так і нерозгортними. Таким чином, постає питання вибору типу поверхні, чим обґрунтовується актуальність цих досліджень.

Аналіз літературних даних і суть проблеми. Теорія роботи котка ґрунтовно розглянута в праці [1]. Суттєвим параметром, що впливає на роботу котка, є його діаметр. Із збільшенням діаметра котка зменшуються витрати енергії на його перекочування, проте знижується ступінь ущільнення ґрунту, тому перевага надається котку з більшим діаметром [3].

У борончастому котку робочі елементи (зуби) розташовані по гвинтовій лінії циліндра перпендикулярно до його бічної поверхні. Отже, вони є твірними гвинтового коноїда. Це поверхня нерозгортна. В науковій літературі обґрунтовано доцільність заміни за певних умов нерозгортної поверхні розгортною [4, 5]. В цьому випадку можна точно розрахувати розгортку, оскільки робоча поверхня утворюється згинанням розгортки без зміни її площі і довжини ліній та кутів між ними. У котку, який розглядається (рис. 1), робочими елементами є відсіки гвинтового коноїда. Їх можна замінити відсіками торса-гелікоїда. Апроксимація гвинтового коноїда відсіками торса-гелікоїда та оцінювання такої апроксимації розглянуто в праці [6].



Рис. 1 – Креслення котка, у якого робочими елементами є відсіки гвинтових поверхонь

Мета досліджень – зробити розрахунок плоскої заготовки із листової сталі у вигляді кільця для виготовлення згинанням робочого елемента котка.

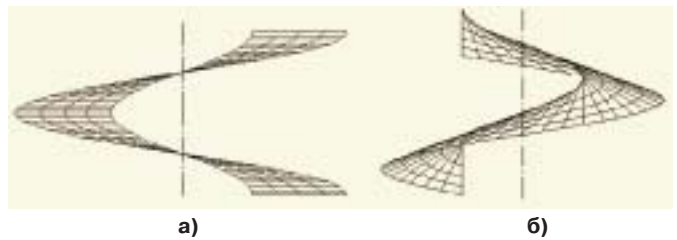


Рис. 2 – Гвинтові поверхні з вертикальною віссю (фронтальна проекція): а) гвинтовий коноїд; б) розгортний гелікоїд

Результати досліджень. Робочим елементом витка є відсік гвинтової поверхні, обмежений зовнішнім радіусом R , внутрішнім радіусом r і розміром в $1/2$ кроку (рис. 1). Цією поверхнею є гвинтовий коноїд, у якого прямолинійні твірні перетинають його вісь під прямим кутом (рис. 2, а). Зважаючи на порівняно не широкую металеву смугу між радіусами R і r , можна замінити поверхню гвинтового коноїда на відповідну смугу розгортного гелікоїда (торса-гелікоїда).

При такій заміні потрібно оцінити ступінь відхилення розгортної поверхні від нерозгортної. Торс-гелікоїд також є лінійчастою поверхнею, однак його прямолинійні твірні розташовані інакше – вони є дотичними до гвинтової лінії – ребра звороту (рис. 2, б). Вони нахилені під сталим кутом β до площини, яка перпендикулярна до осі торса-гелікоїда. Якщо для гвинтового коноїда за робочий елемент можна вибрати будь-яку смугу поверхні між сусідніми гвинтовими лініями, то для торса-гелікоїда існує обмеження: ми можемо взяти відсік поверхні тільки ззовні від ребра звороту, тому що всередині поверхні не існує. Тоді постає питання, який відсік краще брати: далі від ребра звороту чи ближче до нього. Для відповіді на це питання зробимо аналіз із застосуванням математичного апарату. Параметричні рівняння торса-гелікоїда мають вигляд [2]:

$$\begin{aligned} X &= r_0 \cos t + u \cos \beta \sin t; \\ Y &= r_0 \sin t - u \cos \beta \cos t; \\ Z &= r_0 t \operatorname{tg} \beta - u \sin \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

де u – довжина прямолинійної твірної, t – кут повороту точки гвинтової поверхні навколо її осі (t і u – незалежні змінні поверхні);

r_0 – радіус циліндра, на якому розташована внутрішня гвинтова лінія – ребро звороту.

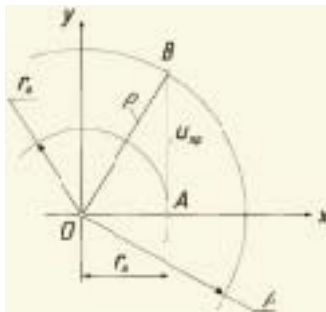


Рис. 3 – До визначення довжини прямолинійної твірної торса-гелікоїда через відстань ρ від його осі до точки на поверхні

Якщо надати для змінної u конкретного значення ($u=const$), то відсік гвинтової поверхні буде обмежено зовнішньою крайкою робочої поверхні – гвинтовою лінією на циліндрі радіуса ρ . На рис. 3 показана горизонтальна проекція твірної твірної ребра звороту. При визначенні дійсної довжини відрізка AB потрібно врахувати, що прямолинійна твірна u , на якій він розташований, нахилена до горизонтальної площини проєкцій під кутом β .

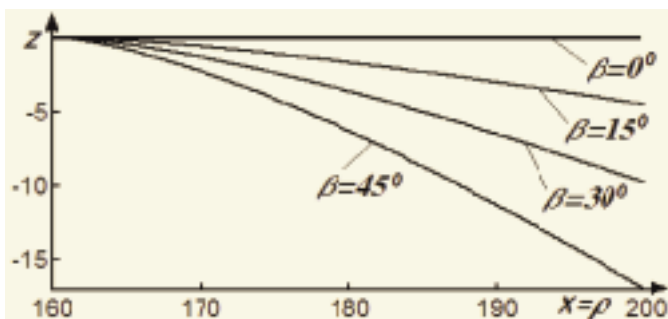


Рис. 4 – Криві осьового перерізу торса-гелікоїда при різних значеннях кута β

Знайдемо, чому дорівнює u . Для цього визначимо відстань осі торса-гелікоїда до точки на поверхні (1) за формулою:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{r_0^2 + u^2 \cos^2 \beta}. \quad (2)$$

Отриманий результат очевидний, якщо врахувати, що в прямокутному трикутнику OAB (рис. 3) $u_{\text{пр}} = u \cos \beta$. Із (2) знаходимо:

$$u = \frac{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (1), отримаємо параметричні рівняння торса-гелікоїда, в яких від змінної u перейшли до змінної ρ :

$$\begin{aligned} x &= r_0 \cos t + \sqrt{\rho^2 - r_0^2} \sin t; \\ y &= r_0 \sin t - \sqrt{\rho^2 - r_0^2} \cos t; \\ z &= \left(r_0 t - \sqrt{\rho^2 - r_0^2} \right) \text{tg} \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо в рівняннях (4) встановити межі зміни ρ від r до R , то вони опишуть потрібний відсік торса-гелікоїда для проектування робочого елемента котка згідно з рис. 1.

З'ясуємо, наскільки поверхня торса-гелікоїда відрізняється від гвинтового коноїда і де краще вибирати його смугу – ближче чи далі від ребра звороту. Для цього порівняємо осьові перерізи цих двох поверхонь.

Осьовим перерізом коноїда є пряма лінія – його твірна. Щоб знайти осьовий переріз торса-гелікоїда (4), прирівняємо одне із двох перших рівнянь до нуля. Наприклад, прирівнявши середнє рівняння до нуля і розв'язавши його відносно t , отримаємо:

$$t = \text{Arc} \cos \frac{r_0}{\rho}, \quad (5)$$

Підставимо (5) у перше і третє рівняння (4) і отримаємо вирази, що описують криву осьового перерізу торса-гелікоїда:

$$x = \rho; \quad z = \left(r_0 \text{Arc} \cos \frac{r_0}{\rho} - \sqrt{\rho^2 - r_0^2} \right) \text{tg} \beta. \quad (6)$$

Областю зміни аргумента ρ будуть значення, починаючи від r_0 і закінчуючи заданим значенням. Крива перерізу буде починатися з точки на ребрі звороту. На рис. 4 побудовано криву при різних значеннях кута β для $r_0 = 160$ мм і зміні ρ в межах 160-200 мм.

Із рис. 4 видно, що в міру збільшення кута β (тобто збільшення кроку H ребра звороту, оскільки кут β і крок H зв'язані між собою співвідношенням $H = 2\pi r_0 \text{tg} \beta$, відхилення кривої від горизонтальної прямої зростає. При $\beta = 0$ крива перетворюється в пряму і збігається із перерізом гвинтового коноїда, але при цьому крок $H=0$, тобто торса-гелікоїд перетворюється у площину. Якщо нам потрібно взяти смугу торса-гелікоїда із зазначеного проміжку 160-200 шириною приміром 10, то цю смугу потрібно брати біля ребра звороту, де відхилення найменше, тобто в межах 160-170. Таким чином, приходимо до висновку, що внутрішня крайка робочого елемента котка повинна збігатися із ребром звороту, тобто $r_0 = r$. Кутом β ми не можемо впливати на форму кривої перерізу, оскільки крок H поверхні робочого елемента має бути заданий.

Нами було розглянуто проектування робочого елемента котка із торса-гелікоїда при наступних вихідних даних: $r = 160$ мм, $R = 200$ мм, $\beta = 30^\circ$. Як бачимо із рис. 4, для нашого випадку відхилення кривої від прямої у крайніх точках становить 10 мм. На рис. 5 побудовано робочий елемент котка у вигляді торса-гелікоїда із нанесеними твірними поверхні та показано товщину листового матеріалу.

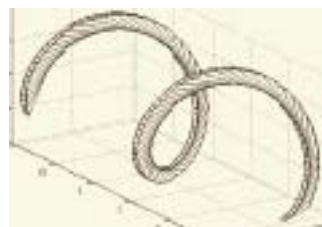


Рис. 5 – Робочий елемент котка у вигляді смуги торса-гелікоїда

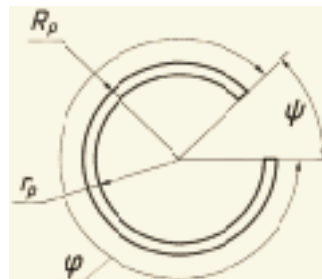


Рис. 6 – Розгортка одного витка робочого елемента з позначенням розмірів

Виготовити такий елемент можна згинанням плоскої заготовки, причому воно здійснюється вздовж прямолинійних твірних. Для цього потрібно побудувати розгортку. Із диференціальної геометрії відомо, що при згинанні розгортних поверхонь кривина ребра звороту

роту не змінюється. Для гвинтової лінії кривина стала, отже внутрішня крайка торса-гелікоїда перетвориться в коло з такою ж кривиною. Кривину k ребра звороту знайдемо за відомою формулою:

$$k = \frac{r}{r^2 + b^2}, \quad (7)$$

де b – гвинтовий параметр, який визначають діленням кроку H на 2π , тобто для нашого випадку $b = r \operatorname{tg} \beta$.

Підставивши цей вираз гвинтового параметра у формулу (7), отримуємо кривину k_p внутрішнього кола розгортки та його радіус r_p , який є оберненою величиною до кривини:

$$k_p = \frac{\cos^2 \beta}{r}, \quad \text{отже,} \quad r_p = \frac{r}{\cos^2 \beta} \quad (8)$$

Очевидно, що зовнішньою крайкою плоскої заготовки (розгортки) теж буде коло, яке позначимо через R_p (рис. 6). Його величину можна знайти за схемою, наведеною на рис. 3, із прямокутного трикутника OAB . Вважаючи, що точка A лежить на зовнішньому колі розгортки, можна записати:

$$R_p = \sqrt{OA^2 + AB^2} \quad (9)$$

Відрізок OA є радіусом r_p внутрішнього кола розгортки і визначається із другого виразу (8). Відрізок AB є довжиною прямолінійної твірної поверхні, яка буде такою ж довжини і на розгортці. Її ми знаходимо із виразу (3) за умови, що $\rho = R$ і $r_o = r$, тобто

$u = \sqrt{R^2 - r^2} / \cos \beta$. Підставивши вказані вирази у (9), остаточно отримуємо:

$$R_p = \frac{1}{\cos^2 \beta} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta} \quad (10)$$

Останній параметр, який потрібно визначити – це відповідність довжини смуги поверхні і її довжини на розгортці. Для цього візьмемо відсік поверхні, який відповідає одному її витку, тобто в межах одного кроку. Для цього скористаємося тим фактом, що довжина лінії на поверхні (наприклад, ребра звороту) і на розгортці є рівними. Довжину одного витка ребра звороту знайдемо з того, що на розгортці циліндра гвинтова лінія на його поверхні перетворюється у пряму – гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого одним катетом є довжина кола $2\pi r$, а другим – крок одного витка $H = 2\pi r \operatorname{tg} \beta$. Скориставшись формулою (9), знаходимо довжину s внутрішньої крайки одного витка робочого елемента котка:

$$s = \sqrt{(2\pi r)^2 + (2\pi r \operatorname{tg} \beta)^2} = \frac{2\pi r}{\cos \beta} \quad (11)$$

Довжину s внутрішньої крайки розгортки, яка відповідає одному витку, визначимо з виразу: $s = r_p \varphi$. Прирівнявши цей вираз до виразу (11) і розв'язавши отримане рівняння відносно φ , отримуємо:

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r_p \cos \beta} = 2\pi \cos \beta \quad (12)$$

Кут φ визначає величину сектора плоскої заготовки, яку необхідно вилучити (рис. 6). Знайдені формули (8), (10) і (11) повністю описують геометричну форму розгортки одного витка торса-гелікоїда за заданими конструкційними параметрами його відсіку. Для конструкційних параметрів $r=160$ мм, $R=200$ мм, $\beta=30^\circ$ знаходимо: $r_p=213,4$ мм, $R_p=254,4$ мм, $\varphi=312^\circ$. Для половини витка відповідатиме заготовка, отримана діленням розгортки одного витка (рис. 6) на дві рівні частини. Отримані результати повністю узгоджуються з результатами, отриманими в праці [2], однак знайдені вони значно простішим шляхом.

Висновки. Заміна нерозгортної гвинтової поверхні на розгортку у вигляді відсіка торса-гелікоїда дала можливість точно розрахувати плоску заготовку для виготовлення витка робочої поверхні котка. Для максимального наближення робочого елемента витка з відсіку торса-гелікоїда до аналогічного відсіку із гвинтового конікоїда потрібно внутрішню крайку витка приймати за ребро звороту. Одержані результати дали можливість зробити розрахунки і за ними виготовити розгортки витків котка.

Список літератури

1. Заїка П.М. Теорія сільськогосподарських машин. Т. 1 (ч. 1). Машини та знаряддя для обробітку ґрунту / П.М. Заїка. – Харків: Око, 2001. – 444 с.
2. Пилипака С.Ф. Розрахунок заготовки для виготовлення гвинтової поверхні котка / С.Ф. Пилипака, В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака, О.С. Хмеленко // Електротехніка і механіка. – К., 2008. – № 1. – С. 71 – 77.
3. Теория, конструкция и расчет сельскохозяйственных машин: Учебник для вузов сельскохозяйственного машиностроения / Е.С. Босой, О.В. Верняев, И.И. Смирнов, Е.Г. Султан-Шах. под ред. Е.С. Босого. – М.: Машиностроение, 1977. – 568 с.
4. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности / Л.В. Гячев. – зерноград, 1961. – 317 с.
5. Сысоев Н.И. Теоретические основы и расчет сортировки “Змейка” / Н.И. Сысоев // Сельхозмашина. – № 8, 1949. – С. 5 – 8.
6. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового конікоїда смугами торсів-гелікоїдів / С.Ф. Пилипака, Л.С. Бойко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010. – Вип. 26. – С. 73 – 80.

Аннотация. Рассмотрено конструирование винтовой рабочей поверхности котка из развертывающейся поверхности в виде отсека торса-геликоида. Рассчитано плоскую заготовку для изготовления одного витка поверхности. Сделано визуализацию отсека рабочей поверхности и его развертки.

Summary. Designing of a screw working surface of a roller from an unrolled surface in the form of a helicoid coil is considered. It is calculated a plate blank for manufacturing of one coil of a surface. It is made visualisation of a compartment of a working surface and its development.

Стаття надійшла до редакції 6 квітня 2015 р.