УДК 629. 3.0275

Пожидаєв С., канд. техн. наук (НУБіП України)

Про очевидне, але хибне рівняння у теорії кочення еластичного колеса

Розглянуто наукову проблему у теорії кочення еластичного колеса, яка полягає в можливості визначення сили тяги коліс за посередництва як динамічного радіуса, так і радіуса кочення, що призводить до різних результатів. Показано, що правомірним є застосування лише радіуса кочення а застосування динамічного радіуса, яке вважається очевидно необхідним, насправді є неправомірним.

Ключові слова: радіус кочення, динамічний радіус, суперечність.

Не нам, господа, подражать Плинию.
Наше дело выравнивать линию.
Козьма Прутков

Вступ. В основі сучасної теорії кочення лежить зображена на рис. 1 схема сил і моментів, які діють на еластичне колесо, представлене як монолітне деформоване затверділе тіло [1]. З умови рівноваги такого тіла відносно точки *O* однозначно випливає наведене нижче рівняння, яке пов'язує підведений до колеса крутний момент $M_к$ і силу тяги колеса $P_к$:

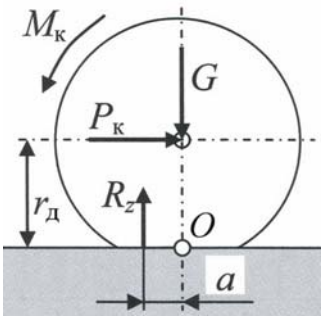


Рис. 1 – **Схема сил і моментів, що діють на колесо**

$$M_к = P_к r_д + R_z a \,, \qquad (1)$$

де $r_д$ – динамічний радіус, який являє собою відстань від опорної поверхні до осі колеса; R_z і a – відповідно нормальна реакція дороги на колесо і поздовжнє зміщення цієї реакції.

Такий підхід до визначення сили тяги еластичного колеса започаткував Є.Д Львов [2] і з того часу він став класичним у теорії трактора. Його панування обумовлене граничною простотою опису роботи колеса у силовому просторі, який очевидно випливає з рис.1.

Проте існує й інший підхід. Він випливає з опису роботи колеса в енергетичному просторі і полягає у тому, що взаємозв'язок підведеного до колеса крутного моменту $M_к$ і його сили тяги $P_к$ відбувається за посередництва радіуса кочення $r_к$, взятого без урахування буксування чи ковзання:

$$r_к = v_т / \omega \equiv L_т / \alpha \,, \qquad (2)$$

де $v_т$ – поздовжня складова теоретичної поступальної швидкості руху колеса (без урахування буксування чи ковзання); ω і α – відповідно кутова швидкість і кут повороту колеса в площині його обертання; $L_т$ – поздовжня складова теоретичного шляху, пройденого

© Пожидаєв., 2016

колесом.

У цьому випадку рівняння, яке пов'язує крутний момент $M_к$ і силу тяги колеса $P_к$, має вигляд [3]:

$$M_к = P_к r_к + fR_z r_к \quad (3)$$

де f – коефіцієнт опору коченню колеса.

Рівняння (1) і (3) представляють два різних способи обчислення однієї і тієї ж фізичної величини. З математичної точки зору кожне з них побудоване абсолютно коректно. Як наслідок, результати розрахунків за обома рівняннями повинні бути однаковими. Але, за даними роботи [4], радіус кочення може на 15...25 % відрізнятись від динамічного радіуса. Внаслідок цього результати розрахунків за рівняннями (1) і (3) теж можуть істотно розрізнятись, що є ознакою хибності принаймні одного з рівнянь (способів). Але такий висновок суперечить початковому положенню про коректність рівнянь. Таким чином маємо замкнене логічне коло, парадокс, що є безумовною ознакою не штучно сформульованої, а реальної наукової проблеми . Вона істотна, бо правильне окреслення кола параметрів, необхідних і достатніх для опису того чи іншого явища, є фундаментом будь-якої наукової теорії. Без розв'язання цієї проблеми теорія кочення у загальному випадку не може претендувати на істинність результатів розрахунку сили тяги колісних машин. Будь-які результати можна аргументовано оскаржити, протиставивши їм істотно інші.

Аналіз досліджень і публікацій. Не вбачаючи підстав для одночасного існування у теорії кочення двох наукових підходів, які суперечать один одному, фундатор теорії автомобіля акад. Є.О. Чудаков запропонував прирівняти праві частини виразів (1) і (3) і з них вивести допоміжне співвідношення між величинами $r_д$, $r_к$, a і f [3]. Його застосування забезпечило отримання одних і тих же результатів розрахунку за виразами (1) і (3), що, на думку Є.О. Чудакова, зняло проблему.

Але А.А. Шабаров за результатами ретельних теоретичних та експериментальних досліджень зробив висновок про те, що для розрахунків кінематики і динаміки трактора слід застосовувати виключно радіус кочення еластичних коліс, який відповідає холостому ходу трактора по рівній твердій дорозі з достатньо високими зчіпними властивостями. Застосовувати для цього динамічний радіус, наголосив він, неприпустимо [5].

Аналогічні результати отримав В.А. Петрушов (він закріпив їх у державному стандарті [1] і оприлюднив у роботі [4]), а також автори роботи [6].

Проте у цих дослідженнях застосовувались складні математичні методи (наприклад, методи механіки суцільних середовищ), виклад був переобтяжений багатьма другорядними деталями. Це зробило отримані результати мало переконливими. Положення про пріоритет радіуса кочення не було сприйнято широким колом фахівців. Прихильники застосування як одного, так і другого підходів залишились при своїй думці. Кожен з них у подальшому оприлюднював свою точку зору (наприклад, автор роботи [7] – необхідність застосування лише радіуса кочення, а автори роботи [8] – лише динамічного радіуса), але вже не згадував про можливість іншого підходу і про суперечність між ними.

Сьогодні ця наукова проблема забута. Науковці не заглиблюються у суть явищ, які описують. Не цікавлячись історією предмету своїх досліджень, загіпнотизовані поверхневою очевидністю рис.1, ігноруючи приписи діючого міждержавного стандарту [1], вони під час визначення сили тяги коліс застосовують динамічний радіус. Існування іншої точки зору не припускають. Наприклад, ця стаття була відхилена редакцією журналу «Тракторы и сельхозмашины». Головний редактор д.т.н., проф. В.М. Шарипов пояснив, що необхідність застосування динамічного радіуса є науковою істиною, яка ще у далекому минулому була встановлена Є.Д. Львовим і сумніватись у якій можуть лише неспеціалісти без технічної освіти... Очевидно, що в редакції журналу не знайомі зі стандартом [1] і вважають запорукою технічного прогресу не критичний перегляд і оновлення наукової інформації, а її довічну консервацію на рівні, досягнутому у величні часи Другої світової війни...

Метою роботи є вирішення цієї наукової проблеми без складних математичних операцій, із застосуванням гранично простих доказів і найдоступніших для розуміння пояснень.

Для цього слід розв'язати дві задачі:

а) довести, що правомірним є застосування у теорії кочення лише якогось одного радіуса еластичного колеса;

б) довести, що цим радіусом є саме радіус кочення.

Виклад основного матеріалу: перша задача досліджень. Перевіримо запропоноване Є.О. Чудаковим механічне поєднання підходів (1) і (3), для чого скористаємось методом контролю граничних умов [9]. Припустимо, що значення величин a і f у рівняннях (1) і (3) необмежено наближаються до нуля. У такому випадку до нуля прагнуть і складові $R_z a$ і $fR_z r_к$, внаслідок чого суперечність між рівняннями (1) і (3) залишається. Це означає, що пропозиція Є.О. Чудакова штучна, у загальному випадку вона не усуває проблему.

Як вже зазначалось, загальноприйняте рівняння (1) отримане на підставі зображеної на рис. 1 очевидної схеми сил і моментів, що діють на колесо. Проте очевидне не завжди є правильним. Наприклад, очевидно, що Сонце обертається навколо Землі, але навіть школярам відомо, що це не так. Тому слід покладатися не на очевидності, які можуть виявитись оманливими, а на найбільш загальні закони природи і на математично строгий опис процесів. Стосовно роботи еластичного колеса це може бути опис за допомогою рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = Q, \quad (4)$$

де T – кінетична енергія колеса; q – узагальнена координата, вона являє собою кут повороту колеса α у площині його обертання; $\dot{q}$ – перша похідна за часом від узагальненої координати, це кутова швидкість ω обертання колеса у площині його обертання; Q – узагальнена сила.

Кінетична енергія колеса T разом з узагальненою силою Q являють собою опис роботи колеса в енерге-

тичному просторі. Після виконання операцій диференціювання рівняння (4) перетворюється в диференціальне рівняння руху колеса, тобто в опис його роботи в силовому просторі.

Це означає, що опис роботи колеса у силовому просторі не є самостійним – він є всього лише математичною похідною від опису в енергетичній області.

Набір конструкційних параметрів колеса, що входять в опис його роботи в енергетичному просторі, формується під час визначення кінетичної енергії *T* та узагальненої сили *Q*. А набір конструкційних параметрів, які входять в опис його роботи в силовому просторі, виходячи з попереднього абзацу, просто переходить у цей простір з опису колеса в енергетичному просторі. Через це ніякі інші конструкційні параметри, окрім тих, які фігурують у енергетичному описі, в силовому описі з'явитись не можуть. Звідси випливає висновок, що у силовому описі роботи колеса повинен фігурувати той і тільки той радіус колеса, який фігурує у енергетичному описі. Таким чином перша задача дослідження виконана: встановлено, що одночасне існування (а значить і застосування) у теорії кочення двох різних радіусів колеса неправомірне. У ній повинен застосовуватись лише якийсь один радіус.

Друга задача досліджень. Визначимо перелік параметрів, які входять в опис колеса в енергетичному просторі, тобто у вирази для визначення кінетичної енергії та узагальненої сили. Кінетична енергія колеса обумовлена двома видами його руху одночасно: поступальним і обертальним у площині свого обертання:

$$T = \frac{m v_д^{\ 2}}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m[r_к \omega(1-s)]^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (5)$$

де *m* – маса колеса; $v_д = v_т(1-s) = r_к\omega(1-s)$ – дійсна швидкість поступального руху колеса; $s = 1 - v_д / v_т$ – коефіцієнт буксування колеса; *I*– момент інерції колеса.

З виразу (5) випливає, що для визначення кінетичної енергії колеса потрібне значення радіуса кочення колеса $r_к$, а значення динамічного радіуса $r_д$ не потрібне.

Узагальнена сила *Q* визначається як коефіцієнт варіації узагальненої координати $\delta\alpha$ в рівнянні для віртуальної роботи колеса δA. Складемо це рівняння.

Під час повороту колеса в площині його обертання на деякий кут $\delta\alpha$ (рис. 2) відбувається принаймні одне з двох таких явищ:

• деяке дійсне поступальне переміщення колеса δL_s, на якому колесо виконує корисну механічну роботу $\delta L_s P_к$

• деяке пробуксовування колеса δL_s, що являє собою шлях поступального переміщення протектора шини відносно опорної поверхні в напрямі, протилежному напряму теоретичної швидкості руху. На цьому шляху розсіюється механічна енергія $\delta L_s R_x$, де R_x – поздовжня реакція дороги. Остання чисельно дорівнює силі тяги колеса $P_к$, внаслідок чого енергія, яке розсіюється, може бути записана у вигляді $\delta L_s P_к$.

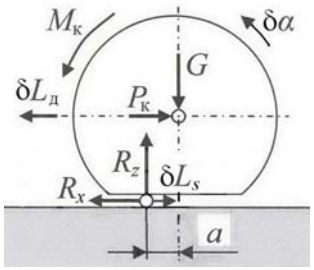


Рис. 2 – **До складання рівняння віртуальної роботи колеса**

Окрім того, під час подолання моменту опору перекочуванню $R_z a$ (обумовленому втратами енергії в матеріалі шини і опорної поверхні) колесо виконує механічну роботу $R_z a \delta\alpha$.

Таким чином, отримуємо таке рівняння віртуальної роботи колеса:

$$\delta A = P_к(\delta L_д + \delta L_s) + R_z a\,\delta\alpha. \qquad (6)$$

Сума величин у дужках – це віртуальний теоретичний шлях поступального переміщення колеса $\delta L_т$, який з урахуванням (2) можна записати у вигляді добутку $r_к\delta\alpha$:

$$\delta A = P_к r_к \delta\alpha + R_z a\,\delta\alpha = (P_к r_к + R_z a)\,\delta\alpha. \qquad (7)$$

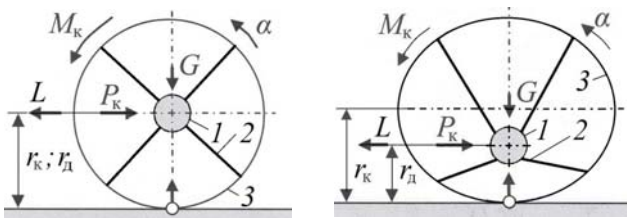
Вираз у дужках – це шукана узагальнена сила *Q*

$$Q = P_к r_к + R_z a. \qquad (8)$$

У вираз (8), як і у вираз (5), входить радіус кочення колеса $r_к$, а динамічний радіус $r_д$ не входить. Це означає, що опис колеса в енергетичному просторі включає в себе радіус кочення, а не динамічний радіус. Виходячи з раніше викладеного, радіус кочення переходить і в опис колеса в силовому просторі. Тобто в обох просторах опису колеса фігурує радіус кочення, а не динамічний радіус. Цим самим виконана друга задача досліджень: встановлено, що правомірним у теорії кочення є застосування лише радіуса кочення, який необхідний для опису роботи колеса як у силовому, так і в енергетичному просторі.

А «очевидний» динамічний радіус, як бачимо, не має відношення до процесу роботи колеса. Він є чужорідним параметром для теорії кочення. Його появу у згаданій теорії можна пояснити лише якоюсь некоректністю під час побудови виразу (1), який виявився хибним. Але якою саме некоректністю – це повинно стати предметом іншого дослідження.

Отримані результати можна проілюструвати. На рис. 3 а схематично зображене жорстке колесо, яке складається з маточини *1*, спиць *2*, виготовлених із практично недеформованого матеріалу, і бігової доріжки *3*. Його динамічний радіус $r_д$ і радіус кочення $r_к$ (взятий без урахування буксування чи ковзання) однакові.



а) б)

Рис. 3 – **Спрощена схема жорсткого (а) і еластичного (б) коліс**

Якщо жорсткий матеріал спиць замінити гумою, то отримаємо еластичне колесо – рис. 3 б. Під дією нормального навантаження *G* маточина *1* цього колеса дещо опуститься, внаслідок чого динамічний радіус $r_д$

стане істотно меншим – на рис. 3 б він майже удвічі менший ніж радіус кочення $r_к$.

Бігова доріжка *3* еластичного колеса теж деформується. Але, як зазначено у роботі [10], вона має велику жорсткість в окружному напрямку, внаслідок чого веде себе під час кочення колеса подібно тракторній гусеничній стрічці. Внаслідок цього поворот того і другого коліс, здійснений у площині їх обертання на деякий кут α, викликатиме поступальне переміщення кожного з них на однаковому шляху *L*. Наприклад, під час повороту одного і другого коліс на один оберт вони пройдуть однаковий шлях, рівний довжині бігової доріжки.

А тепер згадаємо «золоте правило» механіки зі шкільного курсу фізики: у скільки разів ми програємо у шляху, у стільки ж разів виграємо у силі. Тобто, якщо ми бажаємо отримати виграш у силі, то повинні „заплатити" за це зменшенням шляху. А якщо зменшення шляху не відбувається, то не буде і виграшу у силі.

Обидва колеса, зображені на рис. 3, проходять однаковий шлях. Згідно з «золотим правилом» це обумовлює однакову їхню силу тяги. Але ж динамічний радіус коліс за рис. 3 а і 3 б істотно різний. З цього випливає висновок про те, що тягові властивості еластичного колеса інваріантні відносно його динамічного радіуса. Тобто останній не має ніякого відношення до сили тяги, яку розвиває еластичне колесо.

Отримані результати можна підтвердити й іншим чином. Припустимо, що тягове колесо, яке навантажене крутним моментом $M_к$, повертається у площині свого обертання на деякий кут $\delta\alpha$. Цим самим в обертальному русі колесо виконує деяку механічну роботу δA :

$$\delta A = M_к \delta\alpha. \qquad (9)$$

Припустимо, що взаємозв'язок між підведеним до колеса крутним моментом і силою тяги колеса відбувається за посередництва динамічного радіуса (1), як прийнято у сучасній теорії кочення. Підставивши співвідношення (1) у вираз (9), отримуємо, що механічна робота на вході колеса (у обертальному русі) дорівнює:

$$\delta A = (P_к r_д + R_z a)\delta\alpha. \qquad (10)$$

Відповідно до закону збереження енергії ця робота повинна перетворитись на таку ж саму за обсягом механічну роботу на виході колеса (у поступальному русі). Значення цієї роботи запозичуємо з виразу (7):

$$\delta A = (P_к r_к + R_z a)\delta\alpha. \qquad (11)$$

Вирази (10) і (11) не тотожні. Якщо значення динамічного радіуса $r_д$ буде меншим, ніж значення радіуса кочення $r_к$, то механічна робота (10) на вході колеса буде меншою, ніж механічна робота (11) на виході. Тобто колесо ніби як перетвориться на джерело невичерпної енергії – вічний двигун, що є неможливим. Якщо ж динамічний радіус $r_д$ буде більшим, ніж значення радіуса кочення $r_к$ (це нереальний випадок, але він потрібен для повноти картини), то механічна робота (10) на вході колеса буде більшою, ніж механічна робота (11) на виході. Механічна енергія ніби як безслідно зникатиме у колесі, воно перетвориться в енергетичну „чорну діру", що теж неможливо. У обох цих випадках закон збереження енергії не виконується. А виконуватись він буде лише у тому випадку, коли у виразах (10) і (11) буде застосовуватись один і той же радіус кочення. А який саме – було встановлено вище, під час вирішення другої задачі досліджень.

Для підтвердження отриманих результатів можна скористатись ще й експериментальними даними, наведеними у роботах [11-13]. Наприклад, з рис. 3 роботи [11] випливає, що взаємозв'язок між крутним моментом колеса і його силою тяги визначається деяким радіусом (автори роботи [11] називають його «силовим»), який на 2,7% більший за радіус кочення. Результати аналогічних досліджень, описаних у роботах [12] та [13], наведено у таблиці.

Таблиця

Порівняльний аналіз значень «силового» радіуса і радіуса кочення (на холостому ходу) деяких шин за даними робіт [12] і [13]

Позначення шини	Радіус кочення $r_{к.х}$, м	«Силовий» радіус *p*, м	Похибка значення *p* відносно значення $r_{к.х}$, %
ОШ-1	0,677	0,652	-3,7
49x23,5-21LT HC2 AVTOROS	0,600*	0,634*	+5,7
49x23,5-21LT HC4 AVTOROS	0,568*	0,603*	+6,2
600/50R22,5 мод. DT-46	0,557	0,569	+2,2
	0,556	0,579	+4,1
	0,556	0,609	+9,5
Середнє значення похибки			+4,0

*Отримано під час обробки даних, представлених на рисунках 1 б і 1 в роботи [12]

Значення «силового» радіуса, наведені у роботах [11-13], у шести випадках із семи дещо перевищують значення радіуса кочення. Для коректної оцінки цього факту слід врахувати такі обставини:

а) радіус кочення еластичних коліс, взятий без урахування буксування чи ковзання, завжди дещо більший, ніж їх динамічний радіус;

б) теорія кочення під час визначення сили тяги еластичних коліс передбачає лише два фіксованих варіанта: або застосування радіуса кочення, або застосування динамічного радіуса. Внаслідок цього експеримент може підтвердити (прямо чи опосередковано) лише якийсь один з них.

З урахуванням наведених обставин приходимо до висновку, що у ролі «силового» радіуса шин, результати випробувань яких описано у роботах [11-13], виступає саме радіус кочення, а не динамічний. Це підтверджує результати досліджень.

Висновки. Без обчислень і складних математичних операцій, шляхом одних лише логічних міркувань встановлено, що у теорії кочення еластичного колеса правомірним є застосування лише радіуса кочення, взятого без урахування буксування чи ковзання. А застосування «очевидного» динамічного радіуса, який сьогодні панує в навчальній і науковій літературі, є неправомірним, хибним. Його усунення з теорії кочення вирішує наукову проблему. Виявлення причини, що при-

звела до неправомірного застосування у теорії кочення динамічного радіуса, повинно стати предметом іншого дослідження.

Список літератури

1. ГОСТ 17697-72. Автомобили. Качение колеса. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 24 с.
2. Львов Е.Д. Теория трактора. – Машгиз, 1946. – 368 с.
3. Чудаков Е.А. Теория автомобиля. – М.: Машгиз, 1950. – 344 с.
4. Петрушов В.А., Шуклин С.А., Московкин В.В. Сопротивление качению автомобилей и автопоездов. – М.: Машиностроение, 1975. – 225 с.
5. Шабаров А.А. Отдельные вопросы процесса равномерного качения ведущего пневматического колеса // Исследование ходовых систем колесных тракторов. – Труды НАТИ. – Вып. 212. – М.: ОНТИ, 1971. – С. 3-30.
6. Пожидаев С.П., Ляшенко П.Г. К вопросу о противоречии между балансом мощно-сти и уравнениями равновесия колеса под действием приложенных к нему сил и моментов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. Республиканский межведомственный тематический научнотехнический сборник. – Вып. 45. – К.: Урожай, 1979. С. 60-70.
7. Гришкевич А.И. Автомобили: Теория. – Мн. Выш. школа, 1986. – 208 с.
8. Скотников В.А., Мащенко А.А., Солонский А.С. Основы теории и расчета трактора и автомобиля. – М.: Агропромиздат, 1986. – 383 с.
9. Пожидаєв С.П. Моделі і моделювання у інженерній справі.– К.: Аграр Медіа Груп, 2013. – 272 с.
10. Работа автомобильной шины / В.И. Кнороз, Е.В. Кленников, И.П.Петров и др. – М.: Транспорт, 1976. – 239 с.
11. Гончаренко С.В., Годжаев З.А., Станкевич Э.Б. и др. Идентификация шин по эксплуатационным показателям / // Тракторы и сельхозмашины. – 2007. –№ 7. –С. 16-19.
12. Зайцев С.Д., Гончаренко С.В., Стреблеченко Л.С. и др. Тяговосцепные качества высокоэластичных шин сверхнизкого давления // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 2008. – № 9.–С. 29-31.
13. Зайцев С.Д., Стреблеченко С.Д., Гончаренко С.В. и др. Экспериментальная оценка тяговосцепных качеств широкопрофильной шины // Тракторы и сельхозмашины. – 2010. – № 8.–С. 25-27.

Аннотация. Рассмотрена научная проблема в теории качения эластичного колеса. Она заключается в возможности определения силы тяги колес при посредничестве как динамического радиуса, так и радиуса качения, что приводит к разным результатам. Показано, что правомерным является применение только радиуса качения. А применение динамического радиуса, которое считается очевидно необходимым, на самом деле неправомерно.

Summary. We consider the scientific problem in the theory of elastic wheel rolling. It is possible to determine the traction wheels mediated by both dynamic range and the rolling radius, which leads to different results. It is shown that the application is valid only rolling radius. And the use of the dynamic range, which is considered to be an obvious need, in fact inappropriate.

Стаття надійшла до редакції 29 липня 2016 р.

© Волоха М., Войтюк П., 2016