УДК 629.3.0275

Пожидаєв С., канд. техн. наук (НУБіП України)

Про підставу, що призвела до хибного застосування динамічного радіуса у теорії кочення

Встановлено, що прийнятий у сучасній теорії кочення розгляд колісного диска і деформованої еластичної шини як єдиного монолітного затверділого тіла, у якому взаємозв'язок між прикладеною силою і створюваним нею крутним моментом відбувається за посередництва плеча, рівного відстані від лінії дії сили до центра обертання тіла, є некоректним. Ця обставина призвела до хибного застосування динамічного радіуса у теорії кочення.

Ключові слова: еластичне колесо, динамічний радіус, радіус кочення, крутний момент, сила тяги, принцип затвердіння.

Суть проблеми. У роботі [1] було показано, що застосування динамічного радіуса в теорії кочення еластичних коліс є хибним. Однак підстави, які призвели до неправомірного застосування цього радіуса в теорії кочення, залишились нерозкритими.

Метою дослідження є з'ясування згаданих підстав.

Виклад основного матеріалу. У сучасній теорії кочення застосовують відомий принцип затвердіння, згідно з яким колесо з еластичною шиною розглядають як єдине монолітне деформоване затверділе тіло [2]. Згідно з положеннями теоретичної механіки взаємозв'язок прикладеної до такого тіла сили і створюваного нею крутного моменту відбувається за посередництва плеча, роль якого відіграє відстань від лінії дії сили до центра обертання тіла, тобто динамічний радіус колеса [3; 4].

Однак застосування принципу затвердіння до еластичних тіл не має безумовного характеру, а, саме: «… из принципа отвердеваемости следует, что условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для абсолютно твердого тела, являются необходимыми, но недостаточными для соответствующего деформированного тела» [5]. Спираючись на це застереження, нами було припущено, що принцип затвердіння застосовується до еластичного колеса некоректно. Для перевірки припущення був проведений порівняльний аналіз процесів кочення жорсткого та еластичного коліс.

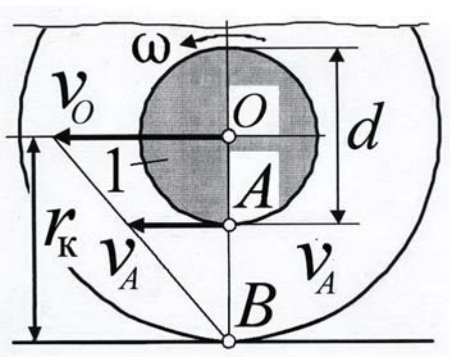

Рис. 1 – **До аналізу процесу кочення жорсткого колеса**

Припустимо, що диск 1 жорсткого колеса (рис. 1) приводиться в обертання з кутовою швидкістю ω, а буксування або ковзання колеса відносно опорної поверхні відсутнє. У такому випадку точка *B* контакту колеса з опорною поверхнею являє собою миттєвий центр його обертання в абсолютному русі, внаслідок чого лінійна швидкість руху точки *O* дорівнює:

$$v_O = \omega \cdot r_к, \tag{1}$$

де $r_к$ – радіус кочення колеса (тут і надалі застосовується радіус кочення, взятий без урахування буксування чи ковзання), який, згідно з пунктом 27 стандарту [6], визначають за виразом:

$$r_к = v / \omega \equiv L / \alpha, \tag{2}$$

де v – поздовжня складова теоретичної поступальної швидкості руху колеса; *L* – поздовжня складова теоретичного шляху, пройденого колесом; α – кут повороту колеса у площині його обертання.

Лінійна швидкість точки *A* колісного диска діаметром *d* дорівнює:

$$v_A = v_O - \omega \cdot 0{,}5d = \omega \cdot (r_к - 0{,}5d), \tag{3}$$

Точка *B* являє собою миттєвий центр обертання колеса, тому її лінійна швидкість і довжина вектора швидкості дорівнюють нулю.

Поєднавши прямими лініями кінці векторів швидкостей точок *O*, *A* і *B*, отримуємо епюру розподілу лінійних швидкостей точок жорсткого колеса в перетині *OAB*. Вона по всій довжині являє собою пряму лінію, що свідчить про однаковість кутових швидкостей обертання жорсткого колеса у всьому згаданому перетині.

На рис. 2 зображене колесо з еластичною шиною. Його диск 1 приводиться в обертання з тією ж кутовою швидкістю ω, що і жорстке колесо. Брекерний пояс шини, як відомо, має велику жорсткість в окружному напрямку, внаслідок чого бігова доріжка "... поводить себе під час кочення колеса подібно до тракторної гусеничної стрічки" [7]. За таких умов шлях, який проходить колесо під час його повороту в площині обертання на один радіан, залишається таким же, як і шлях жорсткого колеса. Це означає, що радіус кочення колеса (відповідно до виразу (2)) і лінійна швидкість руху точки *O* (відповідно до виразу (1)) у цьому випадку теж будуть такими, як і у жорсткого колеса, що відображено на рис. 2 вектором швидкості руху точки *O*, рівним такому ж вектору на рис. 1. Відповідно до співвідношення (3) лінійна швидкість руху точки *A* теж залишиться без змін, що також відображено на рис. 2. Лінійна швидкість і довжина вектора швидкості точки *B′* дорівнюють нулю.

Поєднавши кінці векторів швидкостей точок *O*, *A* і *B′* прямими лініями, отримуємо епюру розподілу поступальних швидкостей руху точок колеса з еластичною шиною у вертикальному перетині *OAB′*. Вона являє собою ламану лінію. Це свідчить про різні кутові швидкості обертання ділянок *OA* і *AB′*. Кутова швидкість обертання ділянки *OA* за визначенням дорівнює ω. Але кутова швидкість ω′ ділянки AB′ через меншу довжину відрізку *AB′*, аніж відрізка *AB* жорсткої шини, виявляється дещо більшою, ніж швидкість ω:

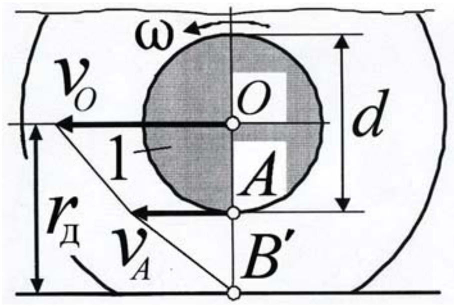

Рис. 2 – **До аналізу процесу кочення еластичного колеса**

$$\omega' = \frac{v_A}{(r_д - 0{,}5d)} = \frac{\omega(r_к - 0{,}5d)}{(r_д - 0{,}5d)} \quad (4)$$

Збільшення кутової швидкості ділянки *AB′* шини відбувається за рахунок тангенціальних деформацій її боковин. Точки останніх розташовані ближче до центра колеса, у процесі проходження свого найнижчого положення отримують додаткове переміщення вперед відносно точок, розташованих ближче до опорної поверхні. Це, до речі, пояснює причину катастрофічно швидкого руйнування боковин напівспущених шин – їх тангенціальні деформації стають у цьому випадку неприпустимо великими.

Через наявність тангенціальних деформацій боковин твердий колісний диск і еластичну шину не можна розглядати як єдине ціле, тобто як монолітне затверділе тіло. Це і є причиною некоректності, допущеної у сучасній теорії кочення. Еластичну шину, до якої застосовується принцип затвердіння, слід розглядати окремо від колісного диска і враховувати, що точки її вертикального перетину, розташованого нижче осі обертання, мають дещо більшу кутову швидкість, аніж колісний диск. У такому випадку механічна модель колеса з еластичною шиною виглядатиме як двоє шарнірно з᾿єднаних твердих тіл (рис. 3) – колісний диск 1 з посадочним діаметром *d*, який обертається з кутовою швидкістю ω, і прикріплений до нього важіль 2 завдожки *AB′* = ($r_д$ - 0,5*d*), кутова швидкість ω′ якого визначається за формулою (4).

Модель надає правильне значення поступальної швидкості руху точки *O* колеса:

$$v_O = (r_д - 0{,}5d)\cdot\omega' + 0{,}5d\cdot\omega = r_к\cdot\omega \quad (5)$$

Але сили, які діють у такій моделі, неможливо коректно визначити за допомогою рівняння її рівноваги, на яке спираються у сучасній теорії кочення. Таке рівняння придатне лише для одного окремо взятого монолітного твердого тіла, а не для механізму, який складається з двох твердих тіл. Коректно визначити сили у такій моделі колеса можна лише за допомогою рівняння віртуальної роботи або балансу енергій і робіт, як зроблено у роботі [1]. З них випливає, що взаємозв’язок крутного моменту колеса $M_к$ і сили тяги еластичного колеса $P_к$ здійснюється за посередництва радіуса кочення $r_к$:

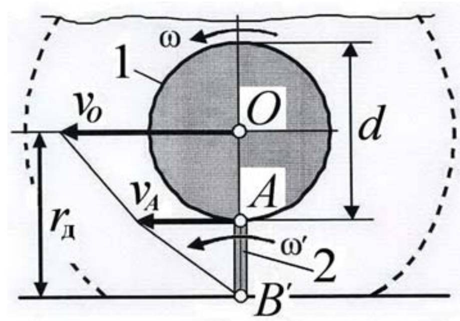

Рис. 3 – **Механічна модель еластичного колеса у вигляді двох твердих тіл**

$$M_к = P_к r_к + R_z a = P_к r_к + M_f, \quad (6)$$

де R_z і *a* – відповідно нормальна реакція опорної поверхні на колесо і поздовжнє зміщення цієї реакції; $M_f = R_z a$– момент опору перекочуванню колеса.

Але співвідношення (6) справедливе і для опису роботи жорсткого недеформованого колеса. Це приводить до несподіваного висновку: взаємозв’язок величин $M_к$ і $P_к$ не залежить від стану колеса – деформоване воно чи ні. Він залежить лише від радіуса кочення колеса. Завдяки цьому еластичне колесо можна розглядати як недеформоване жорстке, яке взаємодіє з опорною поверхнею на плечі, рівному радіусу кочення. Така модель еластичного колеса поєднує у собі граничну простоту й адекватність.

Ідентичність взаємозв’язку величин $M_к$ і $P_к$ жорсткого і еластичного коліс наштовхує на думку про можливість існування всезагального, характерного для всіх можливих видів механічних рушіїв, взаємозв’язку величин $M_к$ і $P_к$. Наприклад, під час руху по пухкому піску можуть застосовуватись квадратні колеса, під час руху по бездоріжжі – планетарно-колісні рушії (рис. 4), які можна розглядати як трикутні колеса, а також гусеничні і крокуючі рушії. Спільною їх рисою є те, що будь-який рушій є пристроєм для перетворення енергії обертального руху в механічну роботу поступального руху, внаслідок чого основні закономірності енергетичних і силових властивостей усіх рушіїв повинні бути однаковими.

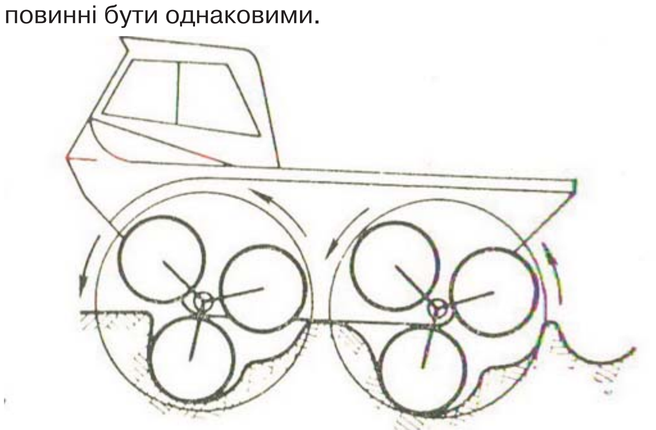

Рис. 4 – **Планетарно-колісний рушій під час руху по бездоріжжю [8]**

Для перевірки цього припущення розглянемо загальні закономірності процесу перетворення енергії обертального руху у механічну роботу поступального руху. Складемо рівняння балансу енергій (робіт) на вході пристрою (у обертальному русі) і на виході (у поступальному русі):

$$(M_к - M_f)\alpha = P_к L_т = P_к k\alpha, \quad (7)$$

де $M_к$ – підведений до пристрою крутний момент; M_f – втрати крутного моменту на подолання сил тертя у пристрої; α – кут повороту вхідного елемента пристрою; $P_к$ – сила, яку розвиває вихідний елемент пристрою у поступальному русі; $L_т$ – теоретичний шлях поступального переміщення вихідного елемента, який відбувається під час повороту вхідного елементу на кут α; $k = L_т / \alpha$ – коефіцієнт пропорційності між значеннями величин $L_т$ і α.

Із рівності (7) отримуємо вираз, який характеризує силу $P_к$ на виході будь-якого пристрою для перетворення механічної енергії обертального руху у механічну роботу поступального руху:

$$P_к = \frac{(M_к - M_f)\alpha}{L_т} = \frac{M_к - M_f}{k}. \quad (8)$$

З нього випливає таке:

а) сила $P_к$ на виході пристрою, незалежно від його конструкційного виконання, залежить від значення лише двох величин: корисної вхідної енергії $(M_к - M_f)\alpha$ і шляху $L_т$, на якому ця енергія виконує механічну роботу поступального руху. Тобто, вихідна сила $P_к$ пристрою являє собою механічну роботу, виконану на одиниці шляху $L_т$, пройденого вихідним елементом пристрою;

б) для визначення сили на виході такого пристрою необхідними і достатніми є значення лише двох вказаних вище величин або інших величин, функціонально пов'язаних з ними. Наприклад, замість корисної енергії $(M_к - M_f)\alpha$ можна застосовувати корисний крутний момент $(M_к - M_f)$, а замість шляху $L_т$ – коефіцієнт пропорційності k між значеннями вихідного $L_т$ і вхідного α переміщень;

в) стосовно до гусеничного чи колісних рушіїв коефіцієнт пропорційності k являє собою радіус кочення $r_к$ відповідно тягової зірочки або коліс, який визначають за співвідношенням (2). Це підтверджує необхідність застосування для еластичного колеса саме радіуса кочення, а не якогось іншого. Стосовно до крокуючого рушія коефіцієнт пропорційності k можна розглядати як радіус кочення $r_к$ деякого фіктивного колеса, яке забезпечує рух з тією ж швидкістю, що і крокуючий рушій. З врахуванням цієї обставини вираз (7) можна записати у вигляді:

$$M_к = P_к r_к + M_f, \quad (9)$$

який ідентичний виразові (6). Це і є ті вирази, які вказують на шуканий нами всезагальний, характерний для всіх видів рушіїв, взаємозв'язок величин $M_к$ і $P_к$. До речі, на справедливість виразу (9) для гусеничних рушіїв вказували й автори роботи [9];

г) будь-які фізичні величини, функціонально не пов'язані з корисною енергією $(M_к - M_f)\alpha$ чи шляхом $L_т$, непридатні для визначення сили на виході рушіїв. Стосовно до еластичних коліс це підтверджує хибність застосування динамічного радіуса для визначення взаємозв'язку між величинами $M_к$ і $P_к$, бо цей радіус не пов'язаний ні з корисною енергією $(M_к - M_f)\alpha$, ні зі шляхом $L_т$.

Висновки. Підставою для хибного застосування динамічного радіуса у теорії кочення стала некоректність представлення колеса з еластичною шиною як єдиного монолітного деформованого затверділого тіла, у якого, згідно з положеннями теоретичної механіки, взаємозв'язок між прикладеною силою і утворюваним нею крутним моментом відбувається за посередництва плеча, роль якого відіграє відстань від лінії дії сили до центра обертання тіла. Застосовуючи принцип затвердіння до колеса з еластичною шиною, останню слід розглядати окремо від колісного диска і враховувати, що точки її вертикального перетину, розташовані під центром обертання, мають іншу кутову швидкість, ніж диск. Ця обставина приводить до необхідності розглядати згадане колесо як механізм, що складається з двох шарнірно з'єднаних між собою твердих тіл. А для механізму вказаний вище взаємозв'язок між силою і утворюваним нею крутним моментом не є справедливим.

Список літератури

1. Пожидаєв С.П. Про очевидне, але хибне рівняння у теорії кочення еластичного колеса // Техніка і технології АПК. – 2016. №8. – С. 15-19.

2. Петрушов В.А., Шуклин С.А., Московкин В.В. Сопротивление качению автомобилей и автопоездов. – М.: Машиноостроение, 1975. – 225 с.

3. Вікович І.А. Теорія руху транспортних засобів.– Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013.– 672 с.

4. Кутьков Г. М. Тракторы и автомобили. Теория и технологические свойства. М.: Инфра-М, 2014. – 504 с.

5. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1964. – 844 с.

6. ГОСТ 17697-72. Автомобили. Качение колеса. Термины и определения. – Введ. 1972-05-06. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 24 с.

7. Работа автомобильной шины / В.И. Кнороз, Е.В. Кленников, И.П.Петров и др. – М.: Транспорт, 1976. – 239 с.

8. Транспортные средства на высокоэластичных движителях / Н.Ф. Бочаров, В.И. Гусев, В.М. Семенов и др. – М.: Машиностроение, 1974. – 208 с.

9. Тракторы: Теория /В.В. Гуськов, Н.Н. Велеев, Ю.Е. Атаманов и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 376 с.

Аннотация. Установлено, что принятое в современной теории качения рассмотрение колесного диска и деформированной эластичной шины в виде единого монолитного затвердевшего тела, в котором взаимосвязь между приложенной силой и создава-

емым ею крутящим моментом происходит при посредничестве плеча, равного расстоянию от линии действия силы к центру вращения тела, некорректно. Это обстоятельство привело к ошибочному применению динамического радиуса в теории качения.

Summary. It was found that accepted in the modern theory of rolling consideration of wheel disk and deformed elastic tire as a single monolithic solidified body, where interrelation between applied force and generated torque occurs through the mediation of the arm, equal to the distance from the force line to the body's rotation center is incorrect. This led to an erroneous application of the loaded radius in the rolling theory.

Стаття надійшла до редакції 5 вересня 2016 р.