УДК 530.1

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗА НАЯВНОСТІ СУХОГО ТА НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ

© В. С. Ловейкін, д.т.н., професор, Ю. В. Човнюк, к.т.н., професор, М. М. Бондар, к.пед.н., доцент, Л. С. Шимко, Національний аграрний університет, Київ, Україна

Осуществлено математическое моделирование колебаний упругих механических систем при наличии сухого и (нелинейно) вязкого трения. Для построенных моделей определены точные аналитические решения.

The mathematical modeling of the mechanical elastic systems' oscillations with the coulomb and (nonlinear) viscous frictions is realized. One may obtain the accurate analytical solution for the constructed models.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливим науково-практичним завданням

Відомо, що припущення про можливість вважати усі сили, які виникають у пружних механічних системах, лінійними функціями координат чи швидкостей, справедливе для досить широкого класу сил [1—3]. Однак, у реальних фізико-механічних системах, можливі такі випадки коли представлення про лінійні сили (у тому числі про сили тертя) не дає достатньо точної відповіді на питання про рух системи навіть у дуже вузькому (однак фізично цікавому) діапазоні змін значень координат чи швидкостей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питання про можливість «лінеаризації» реальної фізико-механічної системи зазвичай ілюструють на прикладі механічної системи з тертям [2], наприклад маси m, яка закріплена на пружинах але за умови, що вантаж або знаходиться під впливом відомого опору руху зі сторони оточуючого його середовища (газ, рідина), або ж рухається з тертям вподовж поверхні будь-якого твердого тіла. Питання про «лінеаризацію» такої системи, у випадку відсутності тертя, не викликає ніяких труднощів, бо при малих відхиленнях пружна сила пружини, як це випливає із закону Гука — пропорціональна відхиленню, тоді як масу тіла, у широких межах, можна вважати незалежною від швидкості. Проте, у випадку наявності тертя (відомо, що сила тертя залежить від швидкості) виникає питання — чи можна силу тертя «лінеаризувати», тобто розглядати її як лінійну функцію швидкості, хоча б у діапазоні дуже невеликих швидкостей.

Відповідь на зазначене питання можна отримати проаналізувавши нескладний дослід. Рухаючи деякий вантаж визначаємо ту роботу, котру треба витратити на здолання сил тертя при переміщенні вантажу на відому відстань. Далі, повторюємо ці вимірювання знову і знову за все менших швидкостей руху вантажу (шлях при цьому залишається незмінним). Відповідним чином аналізуючи результати запропонованого досліду, матимемо можливість встановити залежність між роботою, витраченою на здолання сил тертя й швидкістю руху вантажу.

Виявлена залежність є досить складною та значно різниться для випадків руху маси вантажу m у газі чи рідині, або у випадку тертя маси вантажу m з будь-якою твердою поверхнею. (Відомо, що подібні моделі руху маси вантажу m застосовуються для аналізу процесів поверхневого вібраційного формування будівельних сумішей, матеріалів, виробів).

У першому випадку (руху маси вантажу m у газі чи рідині), робота витрачена на здолання сил тертя суттєво залежить від швидкості та при зменшенні швидкості зменшується тобто, може бути як завгодно малою. У другому випадку «сухого тертя», навпаки, робота мало залежна від швидкості, отже, як повільно б не рухався вантаж — на його переміщення витрачається деяка скінчена, конкретна робота, а відтак — сили тертя, навіть при наперед малій швидкості, мають скінчену величину.

Необхідно мати на увазі, що напрям сили тертя завжди спрямований у сторону, полярну напряму вектора швидкості, відповідно, при переході значення швидкості через нуль, сила тертя змінює свій знак на протилежний. Зважаючи на зазначену вище обставину, а також на результати дослідів, можна встановити хоча б якісно, зв'язок між силою тертя й швидкістю у діапазоні значень малих швидкостей.

У першому випадку (руху маси вантажу m у газі чи рідині), сила тертя без стрибка проходить через нуль й змінює при цьому свій знак. Стосовно ж випадку «сухого тертя» при значеннях швидкості, що поступово наближаються до нуля, сила тертя, з обох сторін від «нульової» позначки, прямує до різних протилежних за знаком, але однакових за абсолютною величиною скінчених значень, тобто, у позначці «нуль» виникає розрив.

За умов «рідкого тертя» повсякчас маємо можливість хоча б у деякому невеликому діапазоні з обох сторін від «нульової» позначки вважати силу тертя лінійною функцією швидкості, тобто «лінеаризувати» тертя і розглядати систему як лінійну.

За умов «сухого тертя» така «лінеаризація» навіть у діапазоні дуже малих швидкостей не передає найбільш типових особливостей сухого тертя. Виходячи з того, що при переході швидкості через «нульову» позначку сила тертя змінюється стрибком, змоделювати цю особливість сили тертя, вважаючи її лінійною функцією швидкості неможливо. Тому при розгляді подібних задач, де сухе тертя суттєво впливає на процес, некоректним є розглядати систему як лінійну, навіть якщо обмежити аналіз досить малими значеннями діапазону швидкостей.

Найпростіша ідеалізація, котра може бути зроблена у випадку сухого тертя, це залежність означена Кулоном, а саме — тертя за величиною не залежить від швидкості. Отже, закон Кулона є найпростішою ідеалізацією випадків сухого тертя.

Вочевидь не завжди можливо, навіть у деякій обмеженій області, розглядати зазначену систему як лінійну. Однак у багатьох інших випадках це може виявитись допустимим. Тоді у цій обмеженій області, допускаючи припущення (ідеалізацію) про те, що всі параметри системи постійні, маємо можливість коректно змоделювати та дослідити характер і загальні властивостей руху системи.

Межі ймовірного діапазону випадків визначаються природою існуючих, реальних, фізичних систем, залежностями їх параметрів від значень координат і швидкостей а також характером поставленого завдання, однак область, у якій допустима ідеалізація, завжди обмежена відомими границями.

Мета роботи

Полягає у встановленні адекватної фізико-механічної моделі коливань пружних механічних систем за наявності сухого або лінійно-в'язкого тертя, та отримання точних аналітичних розв'язків, які описують закони руху вказаних систем.

Власні коливання пружної механічної системи за наявності сил сухого тертя

Зазвичай, власні коливання пружних механічних систем за наявності виключно сил сухого тертя описуються рівняннями:

$$m\ddot{x} + k\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + cx = 0; \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt};$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{1}$$

де m — маса, k — коефіцієнт, що характеризує амплітуду сили сухого тертя, c — жорсткість системи, x — відхилення (переміщення) від положення рівноваги, t — час.

Розшукаємо розв'язок (1) у вигляді:

$$x(t) = A \cdot e^{jwt}; \quad j = \sqrt{-1}, \tag{2}$$

де A — амплітуда, w — частота переміщення.

Амплітудна частотна залежність системи набуває вигляду:

$$W^2 = \lambda^2 + \frac{j \cdot k}{m \cdot |A|}; \quad \lambda^2 = \frac{c}{m}. \tag{3}$$

Розглянемо спочатку випадок, за якого виконується умова:

$$\frac{k}{m\lambda^2 \cdot |A|} << 1, \tag{4}$$

тоді вираз (3) можна подати наступним чином:

$$W = \lambda + \frac{j \cdot k}{2m\lambda \cdot |A|}. \tag{5}$$

Враховуючи вираз (5) закон руху системи можна подавати у вигляді:

$$X = A \cdot e^{-\frac{kt}{2m\lambda|A|}} \cdot e^{j\lambda t};$$

$$\operatorname{Re} X = A \cdot e^{-\frac{kt}{2m\lambda|A|}} \cdot \cos\lambda t. \tag{6}$$

Для початкової $x|_{t=0} = A_0$; $\dot{x}|_{t=0} = 0$ умови маємо з виразу (6):

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{kt}{2m\lambda|A|}} \cdot e^{j\lambda t};$$
$$\operatorname{Re} X = A_0 \cdot e^{-\frac{kt}{2m\lambda|A|}} \cdot \cos\lambda t. \qquad (7)$$

Точний розв'язок виразу (1) має вигляд:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{j\lambda\left(1+\frac{jk}{m\lambda^2|A|}\right)^{\frac{1}{2}} t}. \qquad (8)$$

Можна подати точний результат (8) у вигляді [4]:

$$x(t) = A_0 \cdot \exp\left\{ \begin{array}{l} -\lambda t\left(1+\dfrac{k^2}{m^2\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot \\ \cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right]\right)\end{array}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{ \begin{array}{l} j\lambda t\cdot\left(1+\dfrac{k^2}{m^2\cdot\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot \\ \cdot\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right]\right)\end{array}\right\}=$$
$$= A_0 \cdot \exp\left\{ \begin{array}{l} -\lambda t\cdot\left(1+\dfrac{k^2}{m^2\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot \\ \cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right]\right)\end{array}\right\}\times \qquad (9)$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n\left\{\lambda t\cdot\left(1+\frac{k^2}{m^2\cdot\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{jn\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right)\right]\right\},$$

де In(z) — функція Бесселя n-го порядку від z.

Таким чином, існують два процеси, які впливають на характер виникаючих у системі коливань:

а) амплітудна модуляція (затухання)

$$\sim\exp\left\{ \begin{array}{l} -\lambda t\left(1+\dfrac{k^2}{m^2\cdot\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot \\ \cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right]\right)\end{array}\right\}; \qquad (10)$$

б) нелінійна частотна модуляція

$$\sim\lambda\left(1+\frac{k^2}{m^2\lambda^4\cdot|A|^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot$$
$$\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{k}{m\lambda^2\cdot|A|}\right]\right). \qquad (11)$$

Слід зазначити, що з плином часу внаслідок затухання $|A|\to 0$, а модуляційні процеси посилюються:

а) амплітудна модуляція

$$\sim\exp\left\{-\lambda t\,\frac{k^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda\cdot\sqrt{|A|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=$$
$$=\exp\left\{-\frac{k^{\frac{1}{2}}\cdot t}{m^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{|A|}\cdot\sqrt{2}}\right\}; \qquad (12)$$

б) нелінійна частотна модуляція:

$$\sim\frac{k^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2|A|}}. \qquad (13)$$

Власні коливання пружної механічної системи за наявності сил гістерезисного тертя

Гістерезисну силу тертя за незатухаючих гармонічних коливань зручно описувати співвідношенням [3]:

$$R=-\frac{\alpha A^n}{\pi}\cdot\left\{1-\frac{x^2}{A^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{sign}(\dot{x}), \qquad (14)$$

де α, n — параметри, які визначають еквівалентність площі петлі гістерезисну $S = \alpha \cdot A^{n+1}$ роботі, яка здійснюється за один період еквівалентною силою лінійного тертя.

Якщо використати вираз (14), то можна знайти усталені вільні коливання, не використовуючи метод енергетичного балансу, безпосередньо з диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m} \cdot \left\{1 - \frac{x^2}{A^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}) + \lambda^2 \cdot x = 0. \quad (15)$$

Це складне, нелінійне рівняння має простий точний розв'язок:

$$x = A \cdot \sin(\omega t - \gamma). \quad (16)$$

Для визначення A, ω, γ підставляємо розв'язок (16) у рівняння (15), отримаємо:

$$-A\omega^2 \cdot \sin(\omega t - \gamma) + \frac{\alpha A^n}{\pi \cdot m} \cdot \cdot \cos(\omega t - \gamma) + A\lambda^2 \cdot \sin(\omega t - \gamma) = 0. \quad (17)$$

Другий член у лівій частині (17) записаний без множника $\operatorname{sign}(\dot{x})$, оскільки необхідна для рівняння зміна знаку сили тертя (при зміні знаку швидкості) забезпечується зміною знаку косинуса. Перетворюючи співвідношення (17), отримаємо:

$$\begin{bmatrix} A(\lambda^2 - \omega^2) \cdot \cos\gamma + \\ + \dfrac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m} \cdot \sin\gamma \end{bmatrix} \cdot \sin\omega t - -\begin{bmatrix} A(\lambda^2 - \omega^2) \cdot \sin\gamma - \\ \dfrac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m} \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} \cdot \cos\omega t = 0. \quad (18)$$

Для тотожного виконання цієї рівності необхідно, щоб вирази, що стоять у квадратних дужках, були кожний окремо рівні нулю, тобто:

$$\begin{cases} A(\lambda^2 - \omega^2) \cdot \cos\gamma + \\ + \dfrac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m} \cdot \sin\gamma = 0, \\ A(\lambda^2 - \omega^2) \cdot \sin\gamma - \\ \dfrac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m} \cdot \cos\gamma = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Тоді:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\alpha \cdot A^n}{\pi \cdot m(\lambda^2 - \omega^2)}. \quad (20)$$

Для визначення нелінійної залежності W(|A|) треба виключити з рівняння системи (19) sinγ і cosγ. (Оскільки sinγ і cosγ лінійно незалежні, а система (19) є однорідною, то для існування ненульових розв'язків (19) треба виконати умову: детермінант системи повинен бути рівним нулю).

$$|A|^2 \cdot (\lambda^2 - \omega^2)^2 + + \frac{\alpha^2 \cdot A^{2n}}{\pi^2 \cdot m^2} = 0. \quad (21)$$

Власні коливання пружної механічної системи за наявності сил лінійного в'язкого та сухого тертя

Вихідне рівняння для опису власних коливань є наступним:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + cx = 0. \quad (22)$$

Введемо позначення: $\frac{b}{m} = \alpha$, $\frac{k}{m} = \beta$. Тоді (22) можна переписати наступним чином:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \lambda^2 x = 0. \quad (23)$$

Знову розшукуємо розв'язок (23) у вигляді (2). Тоді треба в усіх співвідношеннях, починаючи з (3) і закінчуючи (13), замінити $\frac{k}{m\cdot|A|}\Rightarrow\left(\alpha+\frac{\beta}{|A|}\right)$. Зокрема, вираз (8) тепер отримує наступного вигляду:

$$x(t)=A_0\cdot\exp\left\{j\lambda t\cdot\left[1+\frac{j\cdot\left(\alpha+\frac{\beta}{|A|}\right)}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \quad (24)$$

Розгорнутий вираз для (24) має вид:

$$x(t)=A_0\cdot\exp\left\{-\lambda t\cdot\left[1+\frac{\left(\alpha+\frac{\beta}{|A|}\right)^2}{\lambda^4}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha+\frac{\beta}{|A|}}{\lambda^2}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\lambda t\cdot\left[1+\frac{\left(\alpha+\frac{\beta}{|A|}\right)^2}{\lambda^4}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha+\frac{\beta}{|A|}}{\lambda^2}\right)\right]\right\}. \quad (25)$$

Нелінійна амплітудна та частотна модуляція у цьому випадку визначається співвідношеннями, схожими на (10), (11) із зрозумілою заміною $\frac{k}{m\cdot|A|}\Rightarrow\left(\alpha+\frac{\beta}{|A|}\right)$.

Висновки

1. Запропоновані адекватні фізико-механічні та математичні моделі коливань (власних) пружних механічних систем за наявності сил в'язкого, гістерезисного та сухого видів тертя, для яких знайдені точні аналітичні розв'язки.

2. У вказаних умовах існує нелінійна амплітудна та частотна модуляції вільних коливань подібних систем, для котрих отримані аналітичні вирази.

3. Отримані результати дослідження можуть бути використані у подальшому для вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку подібних систем та їх уточнення.

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980. — 408 с. 2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с. 3. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1991. — 256 с. 4. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1971. — 250 с.

Рецензент — П. О. Киричок, професор, д.т.н., НТУУ «КПІ»

Надійшла до редакції 19.06.08